This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Stanford University Libraries
3 6105 027 647 192

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

IES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNI
BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFOR
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERS
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIE
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBR
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
IES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNI
BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFOR
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERS
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIE
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBR
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
IES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD

ES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNI
RARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFOR
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERS
IVERSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIE
RD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBR
SITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES ST
ES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNI
RARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFOR
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERS
IVERSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIE
RD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBR
SITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
ES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ETRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BRETON.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME II. — ANNÉE 1902.

(TOME XXII DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
23, RUE DU CALVAIRE, 23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1902

ABRÉVIATIONS.

BB., Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

CR, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

JME., (ou JMS.). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de *Mathématiques spéciales*), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS de 1881 à 1897, ensuite par G. MARIAUD de 1897 à 1901.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE.

AF., Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

STANFORD LIBRARY
OCT 21 1960
MATHEMATICS

MATHESIS

SUR LES TRIANGLES TRIHOMOLOGIQUES;

par M. Francesco Ferrari.

1. Je désigne par (ABC. A'B'C') l'homologie entre deux triangles ABC, A'B'C' dont AA', BB', CC' sont les couples de sommets correspondants, et par (ABC.·. A'B'C') les trois homologies (ABC, A'B'C'), (ABC, B'C'A'), (ABC, C'A'B'). On a le théorème suivant :

Si entre les deux triangles ABC, A'B'C' *il existe la trihomologie* (ABC.·. A'C'B'), *les deux triples de points* ABC, A'B'C' *sont des triples de points correspondants d'une même homographie cyclique du 3e ordre, et réciproquement.*

En effet, soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les coordonnées barycentriques de A', B', C' par rapport au triangle fondamental ABC; la trihomologie (ABC ·. A'C'B') exige que l'on ait

$$x_3y_2z_1 = x_1y_3z_2 = x_2y_1z_3. \tag{1}$$

Or, il existe un point réel P (x', y', z') tel que

$$x_2 : y_2 : z_2 = \frac{x'}{z'}z_1 : \frac{y'}{x'}x_1 : \frac{z'}{y'}y_1, \tag{2}$$

$$x_3 : y_3 : z_3 = \frac{x'}{y'}y_1 : \frac{y'}{z'}z_1 : \frac{z'}{x'}x_1. \tag{2'}$$

Car, si aucun des points A', B', C' n'est sur un côté du triangle ABC, les équations (2) donnent

$$\frac{x'^2}{y'z'} = \frac{x_1x_2}{y_2z_1}, \quad \frac{y'^2}{z'x'} = \frac{y_1y_2}{z_2x_1}, \quad \frac{z'^2}{x'y'} = \frac{z_1z_2}{x_2y_1};$$

en divisant l'une de ces égalités par chacune des autres, on obtient

$$x' : y' : z' = \sqrt[3]{\frac{x_1^2y_1}{y_2^2z_2}} : \sqrt[3]{\frac{y_1^2z_1}{z_2^2x_2}} : \sqrt[3]{\frac{z_1^2x_1}{x_2^2y_2}}. \tag{3}$$

D'ailleurs, les égalités (1) se changent en des identités si l'on y remplace x_2, y_2, z_2 et x_3, y_3, z_3 par les quantités qui leur correspondent dans les proportions (2) et (2').

Si A′ est sur BC, B′ sur CA, C′ sur AB, les égalités (2) et (2′) réduisent à

$$x_2 : z_2 = \frac{x'}{z'} z_1 : \frac{z'}{y'} y_1, \quad x_3 : y_3 = \frac{x'}{y'} y_1 : \frac{y'}{z'} z_1 ;$$

on en tire

$$x' : y' : z' = \sqrt[3]{x_2^2 x_3^2 y_1 z_1} : \sqrt[3]{y_3^2 y_1^2 z_2 x_2} : \sqrt[3]{z_1^2 z_2^2 x_3 y_3}. \qquad (3$$

Les égalités (3) prennent la forme (3′) si l'on y remplace le rappo $\frac{x_1}{y_2}$ par sa valeur tirée de (1).

Les cas où deux des points A′, B′, C′ sont sur un même côté d triangle ABC seront exclus de nos développements.

Les coordonnées de A′, B′, C′ étant respectivement

$$(x_1, y_1, z_1), \quad \left(\frac{x'}{z'} z_1, \frac{y'}{x'} x_1, \frac{z'}{y'} y_1\right), \quad \left(\frac{x'}{y'} y_1, \frac{y'}{z'} z_1, \frac{z'}{x'} x_1\right), \qquad (5)$$

on voit que ces points sont trois points correspondants de l'homographie cyclique définie par les formules

$$X : Y : Z = \frac{x'}{z'} z : \frac{y'}{x'} x : \frac{z'}{y'} y. \qquad (6)$$

Les points A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) forment également un cycle, et le point P(x', y', z') est un élément uni de cette homographie, que nous pouvons représenter par la notation (ABC . P).

Réciproquement, si l'on prend pour triangle de référence le triangle ABC de trois points d'un cycle, l'homographie cyclique du troisième ordre s'exprime par les formules (6); les coordonnées des points d'un cycle quelconque sont de la forme (5), et elles vérifient la relation (1).

2. Les droites AP, BP, CP se correspondent dans l'homographie (ABC . P); donc si l'on prend A′ sur AP, B′ sera sur BP et C′ sur CP.

Entre les deux triangles ABC, A′B′C′ *on aura la trihomologie* (ABC .·. A′C′B′) *et en outre la quatrième homologie* (ABC . A′B′C′). Réciproquement, *si l'on a entre deux triangles quatre homologies* (ABC .·. A′C′B′), (ABC . A′B′C′), *le centre de la quatrième homologie sera le point uni de l'homographie cyclique définie par les deux triangles.*

3. On peut toujours représenter les coordonnnées d'un point A′ par ($x'x_1$, $y'y_1$, $z'z_1$); alors, d'après les formules (5), les coordonnées des sommets d'un triangle A′B′C′ trihomologique avec ABC seront

$$(x'x_1, y'y_1, z'z_1), \quad (x'z_1, y'x_1, z'y_1), \quad (x'y_1, y'z_1, z'x_1). \qquad (7)$$

Les quantités x_1, y_1, z_1 étant considérées comme les coordonnées d'un point Q, le résultat précédent peut s'énoncer ainsi :

Les sommets d'un triangle A'B'C' *trihomologique avec* ABC *sont les points factoriens d'un même point* P *et respectivement d'un point* Q *et des deux isobariques* Q', Q'' *de* Q (*).

Comme la trihomologie s'exprime par les deux conditions (1), il existe ∞^4 triangles A'B'C' trihomologiques avec ABC; ce fait résulte aussi de ce que les cycles de points de l'homographie cyclique dépendent de deux points P (x', y', z') et Q (x_1, y_1, z_1). J'appellerai série T_p l'ensemble des ∞^2 triangles A'B'C' qu'on obtient en *factorisant* au moyen d'un même point P, les différents triangles QQ'Q'' isobariques avec ABC; et série T_q l'ensemble des ∞^2 triangles A'B'C' qu'on obtient en *factorisant* un même triangle QQ'Q'' au moyen d'un point variable P.

4. Des expressions (7), on déduit pour les équations des droites B'C', C'A', A'B' :

$$\frac{x_1^2 - y_1 z_1}{x'} x + \frac{y_1^2 - z_1 x_1}{y'} y + \frac{z_1^2 - x_1 y_1}{z'} z = 0,$$

$$\frac{z_1^2 - x_1 y_1}{x'} x + \cdots = 0, \quad \frac{y_1^2 - z_1 x_1}{x'} x + \cdots - 0.$$

Par conséquent, si l'on représente par u_1, v_1, w_1 les quantités $x_1^2 - y_1 z_1$, $y_1^2 - z_1 x_1$, $z_1^2 - x_1 y_1$ et par u', v', w' les quantités $\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{y'}$, $\frac{1}{z'}$, les coordonnées des droites B'C', C'A', A'B' prennent la forme

$$(u'u_1, v'v_1, w'w_1), \quad (u'w_1, v'u_1, w'v_1), \quad (u'v_1, v'w_1, w'u_1). \qquad (8)$$

Les quantités u', v', w' sont les coordonnées de la polaire trilinéaire de P par rapport à ABC; cette polaire que je désignerai par p, est la *droite unie* réelle de l'homographie (ABC. P). Les quantités (u_1, v_1, w_1), (v_1, w_1, u_1), (w_1, u_1, v_1) sont les coordonnées des côtés du triangle QQ'Q''.

On serait arrivé aux mêmes expressions (8) en traitant directement la question de la trihomologie en coordonnées tangentielles.

5. Les triangles d'une série T_p sont trihomologiques deux à deux, avec les mêmes éléments unis P et p.

(*) Si l'on substitue aux coordonnées barycentriques des coordonnées trilinéaires telles que le point uni P devienne le *point unitaire*, les coordonnées des points A', B', C' prennent la forme (x_1, y_1, z_1), (z_1, x_1, y_1), (y_1, z_1, x_1) (J. N.)

Parmi ces triangles, il y en a ∞^1 qui sont quadrihomologiques avec ABC et quadrihomologiques deux à deux : car pour obtenir un tel triangle, il suffit de prendre le sommet A′ sur la droite AP.

Si l'on considère une série T_q, ou aucun triangle de la série n'est quadrihomologique avec ABC ou ils le sont tous; en effet, la condition que A′ se trouve sur AP se traduit par l'égalité $y_1 = z_1$, de sorte que le triangle fixe QQ′Q″ doit avoir ses sommets sur les médianes de ABC.

Si A′B′C′, A″B″C″ sont deux triangles quelconques d'une même série T_q, on vérifie facilement, au moyen des expressions (7), que les droites A′A″, B′B″, C′C″ forment un triangle trihomologique avec ABC, et que les intersections des côtés homologues sont les sommets d'un triangle trihomologique.

6. Si l'on pose

$$x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = x'', \quad x'z_1 + y'x_1 + z'y_1 = y'',$$
$$x'y_1 + y'z_1 + z'x_1 = z'',$$

et qu'on se rappelle la signification des coordonnées barycentriques, on déduit facilement, des expressions (7) :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A'BC}{x'x_1} = \frac{A'CA}{y'y_1} = \frac{A'AB}{z'z_1} = \frac{ABC}{x''}, \\ &\frac{B'BC}{x'z_1} = \frac{B'CA}{y'x_1} = \frac{C'AB}{z'y_1} = \frac{ABC}{y''}, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

On en conclut

$$A'BC : B'CA : C'AB = \frac{x'}{x''} : \frac{y'}{y''} : \frac{z'}{z''}, \qquad (10)$$

et deux relations analogues.

On trouve aisément que (x'', y'', z'') sont les coordonnées de P par rapport au triangle A′B′C′ ; par suite, si l'on intervertit les rôles des triangles ABC, A′B′C′, on peut aussi écrire

$$AB'C' : BC'A' : CA'B' = \frac{x''}{x'} : \frac{y''}{y'} : \frac{z''}{z'}. \qquad (11)$$

De (10) et (11), on déduit

$$A'BC \,.\, AB'C' = B'CA \,.\, BC'A' = C'AB \,.\, CA'B'.$$

Soient $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les coordonnées normales absolues des points A′, B′, C′ par rapport au triangle ABC; si a, b, c sont les longueurs des côtés de ABC, les égalités (9) donnent encore

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 : \beta_1\beta_2\beta_3 : \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \left(\frac{x'}{a}\right)^3 : \left(\frac{y'}{b}\right)^3 : \left(\frac{z'}{c}\right)^3. \qquad (12)$$

Lorsque P est le centre du cercle inscrit à ABC, la relation (12) devient

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \beta_1\beta_2\beta_3 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3,$$

elle s'applique par exemple au triangle KJ_1J_2 formé par le point de Lemoine et les points de Jeřabeck. Si P est le point de Lemoine, on a

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 : \beta_1\beta_2\beta_3 : \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = a^3 : b^3 : c^3;$$

c'est ce qui a lieu dans le triangle formé par le point (a^4, b^4, c^4) avec les points de Brocard, et aussi dans les triangles trihomologiques avec ABC et inscrits dans le cercle ABC.

Remarquons encore les relations

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 : \alpha_2\beta_2\gamma_2 : \alpha_3\beta_3\gamma_3 = \frac{1}{x''^3} : \frac{1}{y''^3} : \frac{1}{z''^3},$$

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 : \alpha_2\beta_3\gamma_1 : \alpha_3\beta_1\gamma_2 = x_1^3 : y_1^3 : z_1^3$$

qui résultent également des équations (9).

7. La formule de l'aire d'un triangle en coordonnées barycentriques donne

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{x'y'z'}{x''y''z''}\,\Sigma x_1\,(\Sigma x_1^2 - \Sigma x_1y_1). \qquad (13)$$

On aura les triangles A'B'C' réels et d'aire nulle en posant $\Sigma x_1 = 0$, ce qui transporte les points Q, Q', Q'' à l'infini et les points A', B', C' sur la droite $\Sigma\frac{x}{x'} = 0$; le rôle d'élément uni de l'homographie (ABC . P) que joue cette droite, faisait prévoir ce résultat.

Pour que les triangles A'B'C' aient une aire constante k . ABC, on doit avoir

$$x'y'z'\,(\Sigma x_1^3 - 3x_1y_1z_1) = kx''y''z''. \qquad (14)$$

Si l'on considère (x_1, y_1, z_1) comme des coordonnées courantes, l'équation (14) représente le lieu des sommets des triangles QQ'Q'' qui, factorisés au moyen du même point P, se transforment en des triangles A'B'C' de même aire k. ABC. On obtient l'équation du lieu de ces points A', B', C' en remplaçant, dans (14), x_1, y_1, z_1 par $\frac{x}{x'}, \frac{y}{y'}, \frac{z}{z'}$, où x, y, z sont des coordonnées courantes; ce lieu est également une cubique, que l'on peut qualifier d'*anallagmatique* dans l'homographie cyclique (ABC. P).

L'équation (14), où l'on prend x', y', z' pour coordonnées courantes,

représente le lieu des points P qu'il faut adopter comme élément un l'on veut transformer un triangle isobarique donné QQ'Q'' en un triangle trihomologique d'aire k. ABC. Les points A', B', C' décrivent alors trois cubiques dont les équations se déduisent de (14) en remplaçant x_1, y_1, z_1 respectivement par $\frac{x}{x_1}, \frac{y}{y_1}, \frac{z}{z_1}$ ou par $\frac{x}{z_1}, \frac{y}{x_1}, \frac{z}{y_1}$ ou par $\frac{x}{y_1}, \frac{y}{z_1}$,

Lorsque $x' = y' = z'$, l'équation (14) devient

$$\Sigma x_1 [(k-1)\Sigma x_1^2 + (2k+1)\Sigma x_1 y_1] = 0;$$

elle représente, abstraction étant faite du facteur Σx_1, une conique lieu des sommets des triangles d'aire k. ABC et isobariques avec ABC.

8. Nous désignerons par (S_1, s_1), (S_2, s_2), $S_3, s_3)$ respectivement le centre et l'axe des homologies (ABC. A'C'B'), (ABC. C'B'A'), (ABC. B'A'C' Puisque S_1, S_2, S_3 sont les points de rencontre des droites du cycle (AA', BB', CC') de l'homographie (ABC. P) respectivement avec les droites du cycle (BC', CA', AB'), ces points forment eux-mêmes un cycle. D'ailleurs, on le voit aussi par les expressions de leurs coordonnées :

$$S_1\left(\frac{x'}{x_1}, \frac{y'}{z_1}, \frac{z'}{y_1}\right), \quad S_2\left(\frac{x'}{y_1}, \frac{y'}{x_1}, \frac{z'}{z_1}\right), \quad S_3\left(\frac{x'}{z_1}, \frac{y'}{y_1}, \frac{z'}{x_1}\right), \tag{15}$$

qu'on déduit facilement de (7).

Pour les axes d'homologie, on trouve les coordonnées

$$s_1\left(\frac{u'}{u_1}, \frac{v'}{w_1}, \frac{w'}{v_1}\right), \quad s_2\left(\frac{u'}{v_1}, \frac{v'}{u_1}, \frac{w'}{w_1}\right), \quad s_3\left(\frac{u'}{w_1}, \frac{v'}{v_1}, \frac{w'}{u_1}\right). \tag{16}$$

Les triangles $S_1S_2S_3$, $s_1s_2s_3$ *sont non seulement trihomologiques avec* ABC, *mais ils appartiennent avec* ABC *et* A'B'C' *à une même série* T_p *et par là sont aussi trihomologiques entre eux.*

Si ABC, A'B'C' sont quadrihomologiques, A' et S_1, se trouvent sur AP, et l'on a $y_1 = z_1$; les coordonnées des centres et des axes d'homologie deviennent

$$S_1\left(\frac{x'y_1}{x'}, y', z'\right), \quad s_1\left(-\frac{y_1}{x'(x'+y')}, \frac{1}{y'}, \frac{1}{z'}\right), \text{ etc.} \tag{17}$$

Les triangles $S_1S_2S_3$, $s_1s_2s_3$ sont également quadrihomologiques entre eux.

Des formules (15) on tire encore les conclusions suivantes :

Si l'on considère une série T_p, *les points* S_1, S_2, S_3 *correspondent aux*

points A′, B′, C′ *dans des transformations quadratiques si l'on considère une série* T_q, *les premiers points correspondent aux seconds dans une transformation homographique.*

9. Lorsque le point Q décrit une courbe $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, les points A′, B′, C′ d'un cycle de la projectivité (ABC.P) décrivent les trois courbes

$$f\left(\frac{x}{x'}, \frac{y}{y'}, \frac{z}{z'}\right) = 0, \quad f\left(\frac{y}{y'}, \frac{z}{z'}, \frac{x}{x'}\right) = 0, \quad f\left(\frac{z}{z'}, \frac{x}{x'}, \frac{y}{y'}\right) = 0. \quad (18)$$

Si ces trois courbes coïncident en une seule, celle-ci est une *ligne unie* ou une *anallagmatique* de l'homographie (ABC.P). Pour qu'il en soit ainsi, $f(x, y, z)$ doit rester invariable par une permutation cyclique des lettres x, y, z.

Par exemple, l'équation générale d'une conique anallagmatique est

$$A\left(\frac{x^2}{x'^2} + \frac{y^2}{y'^2} + \frac{z^2}{z'^2}\right) + 2B\left(\frac{xy}{x'y'} + \frac{yz}{y'z'} + \frac{zx}{z'x'}\right) = 0. \quad (19)$$

Ainsi, toute conique circonscrite ou inscrite au triangle ABC est anallagmatique pourvu qu'on prenne pour P le centre d'homologie du triangle ABC et de son conjugué par rapport à la courbe. Je désignerai ces courbes par les lettres U_p, V_p; le point P les détermine complètement.

De même, la quartique tricuspidale

$$\Sigma \frac{x^2y^2}{x'^2y'^2} - 2\frac{xy^2}{x'y'z'}\Sigma\frac{x}{x'} = 0$$

est anallagmatique.

Si f_1, f_2, f_3, sont trois lignes correspondantes de l'homographie (ABC.P), il est clair que les points d'intersection des lignes (f_2, f_3), (f_3, f_1), (f_1, f_2) forment des cycles de l'homographie; il en est encore de même des points de rencontre des lignes f_1, f_2, f_3 avec une anallagmatique. Cette remarque très simple conduit à des conséquences très curieuses.

Par exemple, si l'on considère la trihomologie (ABC .·. A′B′C′), les triples de droites (AA′, BB′, CC′), (AB′, BC′, CA′), (AC′, BA′, CB′) forment des triangles trihomologiques entre eux, et rencontrent les côtés (BC, CA, AB) et les côtés (B′C′, C′A′, A′B′) aux sommets de six triangles qui sont trihomologiques entre eux et aux premiers triangles.

De même, si A'B'C' est le triangle pédal d'un point P par rapport un triangle ABC (A', B', C' sont les points de rencontre de AP, BP, C avec BC, CA, AB); si A''B''C'' est le triangle pédal de P par rappo à A'B'C', et ainsi de suite, tous ces triangles ABC, A'B'C', A''B''C'',. sont quadrihomologiques entre eux.

Les coniques U_p et V_p sont rencontrées par les droites AP, BP, C aux sommets de triangles qui sont quadrihomologiques deux à deux.

10. La circonférence circonscrite au triangle ABC est une anallag matique de l'homographie cyclique (ABC . K). Un cycle de cette homographie est formé par le point K_1 (a^4, b^4, c^4) et par les points de Brocard Ω_1, Ω_2. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Les côtés du triangle $K_1\Omega_1\Omega_2$, les droites $(KK_1, K\Omega_1, K\Omega_2)$, *les droites* $(AK_1, B\Omega_1, C\Omega_2)$ *et les côtés du triangle pédal de* K *par rapport à* ABC, *etc. rencontrent la circonférence* ABC *aux sommets de triangles qui sont trihomologiques avec* ABC *et entre eux. Tous ces triangles ont même point de Lemoine* K.

11. Si f_1, f_2, f_3 désignent trois courbes qui se correspondent dans l'homographie cyclique (ABC . P), et A'B'C' un cycle de points, il est clair que les polaires du même ordre de A', B', C' respectivement par rapport à f_1, f_2, f_3 ou à f_2, f_3, f_1 ou à f_3, f_1, f_2 sont également des courbes correspondantes. Il en est de même des polaires de A', B', C' rapport à une anallagmatique de la transformation.

En particulier, *les polaires des points* A', B', C' d'un cycle de l'homographie (ABC . P) *par rapport à une conique anallagmatique* (19) *forment un triangle* $A_1B_1C_1$ *quadrihomologique avec le triangle* A'B'C'; *le centre de l'homologie* (A'B'C', $A_1B_1C_1$) *est nécessairement le point* $P(x', y', z')$ *et l'axe de cette homologie qui est la droite unie p de l'homographie, est la polaire de* P *par rapport à la conique.* La droite *p* est la droite polaire de P par rapport à une anallagmatique d'ordre quelconque (*).

(*) Le Mémoire de M. Ferrari contient encore d'autres développements, que le défaut d'espace nous empêche de reproduire. Ce qui précède, suffit pour donner une idée des méthodes employées par notre honorable collaborateur.

(*Rédaction*).

UN THÉORÈME DE M. APPELL;

(Extrait d'une lettre de M. A. Mineur, professeur à l'Université de Bruxelles).

La livraison de février 1894 des *Nouvelles Annales de Mathématiques* contient le théorème suivant dû à M. Appell : Pour que les deux trièdres $Oxyz$, $Ox_1y_1z_1$ soient trirectangles il faut et il suffit que

$$\Delta = \pm 1; \qquad (1)$$

Δ est le déterminant des cosinus des angles que les axes x_1, y_1, z_1 font avec x, y, z. Soient :

$$\omega^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos(xy) & 1 & \cos(yz) \\ \cos(xz) & \cos(yz) & 1 \end{vmatrix}; \quad \omega_1^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1y_1) & \cos(x_1z_1) \\ \cos(x_1y_1) & 1 & \cos(y_1z_1) \\ \cos(x_1z_1) & \cos(y_1z_1) & 1 \end{vmatrix};$$

$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les cosinus des angles que les axes x_1, y_1, z_1 font avec x, y, z; (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) les coefficients de projection de x_1, y_1, z_1 relativement à x, y, z; A_i, B_i, C_i les mineurs de la colonne i du déterminant ω^2. Si les deux systèmes xyz, $x_1y_1z_1$ sont trirectangles, on a :

$$\alpha_i\alpha_i + \beta_i\beta_i + \gamma_i\gamma_i = 1, \quad \alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = 0,$$

donc

$$\Delta^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \Delta = \pm 1.$$

La condition (1) est donc nécessaire.

Elle est suffisante. En effet, si on multiplie successivement les déterminants :

$$| l_i m_i n_i |, \quad \omega^2, \quad | l_i m_i n_i |,$$

en tenant compte de la formule(*)

$$\cos(x_iy_i) = \frac{1}{2}\Sigma l_i \frac{d\varphi}{dl_2} = \frac{1}{2}\Sigma l_2 \frac{d\varphi}{dl_i}$$

et de ses analogues, le produit obtenu est ω_1^2. Ainsi(**)

$$| l_i m_i n_i | = \pm \frac{\omega_1}{\omega}.$$

D'ailleurs, on a :

$$\alpha_i = l_i + m_i\cos(xy) + n_i\cos(xz), \quad l_i\omega^2 = A_i\alpha_i + B_i\beta_i + C_i\gamma_i,$$
$$\beta_i = l_i\cos(xy) + m_i + n_i\cos(yz), \quad m_i\omega^2 = A_2\alpha_i + B_2\beta_i + C_2\gamma_i,$$
$$\gamma_i = l_i\cos(xz) + m_i\cos(yz) + n_i; \quad n_i\omega^2 = A_3\alpha_i + B_3\beta_i + C_3\gamma_i,$$

(*) $\varphi(l, m, n) = \Sigma l^2 + 2\Sigma lm\cos(xy)$.

(**) *Cours de Géométrie analytique de l'Université de Bruxelles*, p. 4.

donc

$$| l_1 m_1 n_1 | \omega^6 = | A_1 B_1 C_1 \| \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 | .$$

Mais

$$| l_1 m_1 n_1 | = \pm \frac{\omega_1}{\omega}, \quad | A_1 B_1 C_1 | = \omega^4, \quad | \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 | = \pm 1$$

par suite,

$$\omega \omega_1 = \pm 1$$

ce qui exige que

$$\omega = \omega_1 = \pm 1.$$

Les trièdres xyz, $x_1 y_1 z_1$ sont donc trirectangles.

RELATIONS ENTRE DEUX SYSTÈMES D'AXES;

par C. Servais, Professeur à l'Université de Gand.

1. Sur trois semi-droites concourantes x, y, z on prend respectivement trois segments OA, OB, OC égaux et positifs; on imagine un mobile parcourant la circonférence ABC de façon à passer successivement par les points A, B, C. Si le sens du mouvement de ce point mobile est vu positivement du point O, l'angle trièdre (xyz) formé par les semi-droites x, y, z dans l'ordre xyz est positif. Cet angle solide est négatif dans le cas contraire. Ainsi on a $(xyz) = -(xzy)$.

On appelle *sinus de l'angle trièdre* (xyz) la racine carrée du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos(xy) & 1 & \cos(yz) \\ \cos(xz) & \cos(yz) & 1 \end{vmatrix}$$

prise positivement ou négativement selon que l'angle (xyz) est positif ou négatif.

2. Théorème. Si $(l_1 m_1 n_1)$, $(l_2 m_2 n_2)$, $(l_3 m_3 n_3)$ *sont les coefficients de projection des semi-droites* XYZ *par rapport aux axes* x, y, z *on a en grandeur et en signe* (*) :

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \frac{\sin(XYZ)}{\sin(xyz)}.$$

(*) *Cours de Géométrie analytique de l'Université de Gand*, p. 8.

En effet. soient $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$, $(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$ les cosinus des angles que les semi droites XYZ font avec x, y, z. Les formules

$$\alpha_1 = l_1 + m_1\cos(xy) + n_1\cos(xz), \quad l_1\alpha_1 + m_1\beta_1 + n_1\gamma_1 = 1,$$
$$\beta_1 = l_1\cos(xy) + m_1 + n_1\cos(yz), \quad l_1\alpha_2 + m_1\beta_2 + n_1\gamma_2 = \cos(XY),$$
$$\gamma_1 = l_1\cos(xz) + m_1\cos(yz) + n_1; \quad l_1\alpha_3 + m_1\beta_3 + n_1\gamma_3 = \cos(XZ);$$

et leurs analogues montrent que l'on a

$$\left| \begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{matrix} \right| \qquad (1)$$

$$\left| \begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 1 & \cos(XY) & \cos(XZ) \end{matrix} \right|; \qquad (2)$$

par suite,

$$\left| \begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \end{matrix} \right|^2 = \frac{\sin^2(XYZ)}{\sin^2(xyz)} \quad \text{ou} \quad \left| \begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \end{matrix} \right| = \pm\frac{\sin(XYZ)}{\sin(xyz)}.$$

On fait tourner le trièdre XYZ supposé invariable autour d'un axe normal au plan xX jusqu'à ce que les semi-droites x et X coïncident; par une rotation nouvelle autour de x, on amène l'axe Y dans le plan xy, de telle sorte que les angles (xy) et (XY) soient de même signe. Les nouveaux coefficients de projection de XYZ sont pour cette position du trièdre XYZ

$$(1, \quad o, \quad o) \quad (l_2' \quad m_2' \quad o) \quad (l_3' \quad m_3' \quad n_3')$$

et leur déterminant est égal à $m_2' n_3'$. Cette valeur est aussi celle du déterminant $| l_1 m_1 n_1 |$; car pendant les déplacements du trièdre XYZ, le déterminant $| l_1 m_1 n_1 |$, fonction continue ne peut passer brusquement de la valeur $+\sin(XYZ)$: $\sin(xyz)$ à la valeur $-\sin(XYZ)$: $\sin(xyz)$ et, par suite, reste invariable.

La quantité m_2' est positive; la quantité n_3' est positive ou négative selon que les semi-droites z et Z pour la dernière position du trièdre XYZ sont du même côté du plan xy ou de côtés différents; c'est à dire selon que les angles XYZ, xyz sont de même signe ou de signes contraires donc

$$| l_1 m_1 n_1 | = +\frac{\sin(XYZ)}{\sin(xyz)}. \qquad (3)$$

3. Des égalités (2) et (3) on tire :

$$| \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 | = \sin(XYZ)\sin(xyz).$$

Donc si $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$, $(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$ *sont les cosinus des angles que*

les semi-droites XYZ *font avec xyz, on a, en grandeur et en signe* (*)

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \sin(XYZ).\sin(xyz).$$

COROLLAIRE. Les trièdres XYZ, *xyz* sont trirectangles et de même signe, ou trirectangles et de signes contraires selon que :

$$|\alpha_1\beta_1\gamma_1| = +1, \quad \text{ou} \quad |\alpha_1\beta_1\gamma_1| = -1.$$

Le trièdre XYZ est trirectangle et positif ou négatif selon que :

$$|\alpha_1\beta_1\gamma_1| = +\sin(xyz), \quad \text{ou} \quad |\alpha_1\beta_1\gamma_1| = -\sin(xyz).$$

4. *Volume du tétraèdre* ABCD. Le signe du volume du tétraèdre ABCD est, par définition, celui de l'angle trièdre formé par les semi-droites AB, AC, AD. Cela étant on établit aisément la formule (**)

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{(1234)}{(5678)}. \qquad (4)$$

Les déterminants (1234), (5678) désignent les déterminants bien connus formés avec les coordonnées des quatre sommets A, B, C, D, ou A', B', C', D'.

On mène par l'origine O trois semi-droites XYZ formant entre elles un angle solide trirectangle positif et on porte respectivement sur ces semi-droites les segments positifs $OB_1 = OC_1 = OD_1 = 1$. Les coordonnées $(l_1m_1n_1)$, $(l_2m_2n_2)$, $(l_3m_3n_3)$ des trois points B_1, C_1, D_1 sont respectivement les coefficients de projection de XYZ. Le volume du tétraèdre $OB_1C_1D_1$ est positif et égal à $\frac{1}{6}$. Le déterminant analogue à (1234) et formé à l'aide des coordonnées des sommets de ce tétraèdre est égal à

$$-\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = -\frac{\sin(XYZ)}{\sin(xyz)} = -\frac{1}{\sin(xyz)}.$$

Donc, si dans l'égalité (4) on substitue à A'B'C'D' le tétraèdre $OB_1C_1D_1$, on a

$$ABCD = -\frac{1}{6}(1234)\sin(xyz). \qquad (5)$$

(*) P. APPELL. NAM, 1894, 43. M. NIEWENGLOWSKI (*Géométrie analytique*, p. 35) montre que le déterminant $|\alpha_1\beta_1\gamma_1|$ est positif ou négatif selon que les trièdres sont de même espèce ou d'espèces différentes.

(**) NIEWENGLOWSKI. *Géométrie analytique*, p. 55.

Corollaire. Soient $OA_2 = a$, $OB_2 = b$, $OC_2 = c$ trois segments positifs ou négatifs comptés sur trois semi-droites concourantes x, y, z.

D'après la formule (5) on a

$$OA_2B_2C_2 = \frac{1}{6} abc \sin(xyz).$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur le théorème de Darboux.* La démonstration de M. Darboux du théorème relatif au tétraèdre est plus simple que celle que nous avons exposée dans *Mathesis*, (3), I, pp. 243-244 sans avoir le texte de l'auteur sous les yeux. Voici la démonstration de M. Darboux :

Un tétraèdre ABCD *est la somme arithmétique de six hexaèdres autosymétriques* (c'est-à-dire, identiques chacun à leur symétrique).

Soient I le centre de la sphère inscrite au tétraèdre ; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les projections de I sur les faces BCD, CDA, DAB, ABC.

Le tétraèdre sera la somme des six hexaèdres :

$$IAB\gamma\delta,\ IBC\delta\alpha,\ ICA\beta\delta,\ IAD\beta\gamma,\ IBD\gamma\alpha,\ ICD\alpha\beta.$$

Chacun d'eux, par exemple $IAB\gamma\delta$, a pour plan de symétrie le plan bissecteur IAB et, par suite, est superposable à son symétrique (*Bulletin des sciences mathématiques*, 1900, (2), XXIV, 1re partie, p. 274, note).

C'est M. L. Gérard qui a attiré notre attention sur la remarque précédente. (P. M.)

2. *Sur l'astroïde et les astroïdales.* Ces courbes ont été étudiées par Otto Böklen dans les *Archives de Grunert*, t. XXXVII, p. 105. Nous extrayons de cet article la proposition intéressante que voici :

Si une hypocycloïde à quatre rebroussements roule sur l'une de ses tangentes, son centre décrit une ellipse.

3. *Démonstration du théorème de Pythagore.* La surface du triangle ABC rectangle en A a pour expression $\frac{1}{2} bc$, et aussi $pr = \frac{1}{4}(a+b+c)(b+c-a)$, car on voit facilement que r est égal au segment $p - a$ compris entre A et le point de contact de AB avec le cercle inscrit. Par conséquent

$$\frac{1}{2} bc = \frac{1}{4}(b+c+a)(b+c-a),$$

d'où l'on déduit facilement $a^2 = b^2 + c^2$. (Möllmans, *Archives de Grunert*, t. XVII).

sur la courbe. Alors QT devra coïncider avec δ à moins que la cour ne soit une parabole ayant Q pour foyer et l'axe des x comme directric Donc *les courbes telles que le symétrique du pied de l'ordonnée p rapport à la tangente se trouve sur une droite fixe δ sont les parabol ayant l'axe des x comme directrice et dont le foyer est un point quelconq de δ. Les bissectrices des angles formés par δ avec l'axe des x constituen des solutions singulières.* (A. Gob)

Solution par M. V. Retali (Milan). Au lieu de la logarithmique e son asymptote, considérons une courbe plane quelconque et une droite donnée arbitrairement dans son plan que nous prenons pour axe des abcisses. Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires ; appelons P le pied de l'ordonnée du point M (x, y) de la courbe, et Q le symétrique de P par rapport à la tangente en M : *le cercle ayant pour centre* M *et* MP *pour rayon touche son enveloppe au point* Q (*) et comme les coordonnées (XY) de Q sont évidemment.

$$X = x - \frac{2f(x)\,f'(x)}{1 + f'(x)^2}, \quad Y = \frac{2f(x)}{1 + f'(x)^2}$$

nous avons ainsi les équations paramétriques ponctuelles de l'enveloppe cherchée.

Dans le cas de la logarithmique $y = e^x$, on obtient

$$X = x - e^x \text{ séch } x, \qquad Y = \text{séch } x$$

qui sont les équations paramétriques du lieu cherché. En éliminant le paramètre x, nous avons

$$X = \text{Argch}\frac{1}{Y} - Ye^x$$

et passant aux logarithmes népériens

$$X = l.\frac{1 + \sqrt{1 - Y^2}}{Y} - (1 + \sqrt{1 - Y^2}).$$

Cette courbe est aussi *le lieu des foyers des paraboles tangentes à la logarithmique et ayant son asymptote pour directrice, et l'enveloppe des droites symétriques de l'asymptote par rapport aux tangentes de la logarithmique.*

(*) V. *Periodico di Mat.* T. XIII, p. 95, question 401 ; T. XV, pp. 74-76 et 163-164.

Solution par MM. Rius y Casas, Verheugen *et* Rose. L'équation du cercle est :

$$(x-a)^2+y^2-2e^a y=0. \tag{1}$$

Dérivant par rapport à a, on trouve

$$x-a+e^a y=0. \tag{2}$$

Ces équations définissent l'enveloppe. En éliminant x, on obtient

$$e^{2a}y^2+y^2-2e^a y=0;$$

d'où $y=0$, solution qu'on connaissait à priori, et

$$y=\frac{2e^a}{1+e^{2a}}=\frac{2}{e^{-a}+e^a}=\frac{1}{\mathrm{C}ha}. \tag{3}$$

On a ensuite

$$x=a-e^a y=a-\frac{2e^a}{e^{-a}+e^a} \tag{4}$$

Transportons l'origine des coordonnées au point (— 1,0), les équations (3) et (4), qui définissent l'enveloppe prendront la forme

$$y=\frac{1}{\mathrm{C}ha}$$

$$x=a-\frac{2e^a}{e^a+e^{-a}}+1=a-\mathrm{T}ha.$$

Autre solution par M. Emmerich et Soons.

Question 1306.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 40).

On considère tous les triangles ayant pour sommet un point A, *dont les sommets* B *et* C *glissent sur une droite donnée et dont les angles* B *et* C *ont une différence donnée* α. *Démontrer par la géométrie les théorèmes suivants :*

1° *Les hauteurs* BB', CC' *enveloppent une parabole;* 2° *la droite d'Euler* OGH *enveloppe une parabole;* 3° *les médianes issues de* B, C *enveloppent une ellipse;* 4° *les points* B', C' *décrivent une strophoïde oblique;* 5° *les centres isodynamiques se meuvent sur une circonférence;* 6° *le point de Lemoine* K *et son associé* K_a *décrivent chacun une hyperbole;* 7° *l'axe orthique et la droite de Lemoine passent chacun par un point fixe;* 8° *le cercle des neuf points touche une droite fixe; les cercles tritangents* I *et* I_a *touchent aussi une droite fixe* (*autre que* BC), *et il en est de même des cercles* I_b *et* I_c. (J. Déprez.)

Solution par M. EMMERICH. 1° Le centre O du cercle circonsc
meut sur une droite fixe AE, perpendiculaire à la tangente AL au
met et formant avec la hauteur AD l'angle α (Les points E et L
supposés appartenir à la droite BC).

Menons par D la parallèle à AL et soient β, β', γ, γ', M les pc
où elle rencontre BB', AC, CC', AB et AE; B'C' étant parallèle à
on démontre aisément que $\beta D = B'D = \beta' D$. Ensuite, on tire
triangles semblables $\beta' DA$, BEA, $\beta' D : BE = AM : AD = \cos \alpha$, d
$\beta D : BE = \text{const}$. Les points β, B décrivent donc des ponctuelles s
blables, c'est-à-dire que BB' enveloppe une parabole. CC' enveloppe
même parabole, car on a de même $\gamma D : CE = \cos \alpha$. Le cercle circons
au triangle ABC formé par trois tangentes passe constamment par
symétrique A' de A par rapport à BC; donc A' est le foyer de la pa
bole. La droite DM, droite de Simson de A' par rapport au triangle HE
est la tangente au sommet; la droite AL est la directrice, et le somm
est le symétrique du point M par rapport à D.

2° Le point G parcourt la parallèle H_2O_2 à DE qui divise AD et A
en H_2 et O_2 dans le rapport 2 : 1. F étant le point de rencontre de A
et DE, les ponctuelles G et F sont perspectives; FO restant parallè
à DA, les ponctuelles F et O sont aussi perspectives. Il s'ensuit que l
ponctuelles G et O sont semblables, donc HO enveloppe une parabole
d'ailleurs de $AH = 2OF$, on conclut que H et O engendrent des ponc
tuelles semblables. Comme les tangentes H_2O_2 et H_2A sont perpen
diculaires, la directrice passe par H_2; elle passe aussi par le point d
concours des hauteurs du triangle tangentiel ADE_1 si E_1 désigne l
milieu de AE; on en conclut que LH_2 est la directrice. L_1 étant le milieu
de AL, le foyer est le pied de la perpendiculaire abaissée de E_1 sur L_1H_2.

3° Soient B_1 et C_1 les pieds des médianes issues de B et C, D_1 et E_1
les points de rencontre de AD et AE avec B_1C_1. On a $(B_1C_1D_1E_1)$
$= (C_2B_2D_2E_2) = (B_1C_1E_1D_1)$. Les droites BB_1, CC_1 enveloppent une
conique touchant les parallèles DE, D_1E_1 en L, L_1 respectivement.
Les directions DB, E_1B_1 étant opposées, c'est une ellipse. Son centre est
le milieu de LL_1; le demi-diamètre conjugué à LL_1 parallèle à LD, a
pour longueur k : $\sin \alpha \sqrt{2}$, c'est ce qui résulte de LB. $LC = \overline{LA}^2$, si
BB_1 est parallèle à LA.

4° Si DB', DC' coupent LA en U, V respectivement, on a : angle
$UAB' = UB'A = B$, $VAC' = VC'A = C$, ce qui montre que les points

B′, C′ décrivent une strophoïde définie par le point D, l'origine A et la directrice AL.

5° Les centres isodynamiques étant à l'intersection des cercles d'Apollonius, ils parcourent le cercle de centre L et de rayon LA.

6° Prenons la conjuguée isogonale AF′ de AF par rapport à l'angle DAE. Elle coupe D_1F au point de Lemoine K. Les faisceaux D_1F et AF étant en perspective, les faisceaux D_1F et AF′ sont projectifs. Le point K décrit une hyperbole parce que D_1F et AF′ tournent en sens opposés. Si D_1F est parallèle à AF′ on a, en posant l'angle $DAF = \varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = DF : h$, $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = DF' : h = 2DF : h$, donc $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = 2\operatorname{tg}\varphi$. Pour construire les angles φ_1, φ_2 satisfaisant à cette équation, prolongeons AE de $\frac{1}{2}$ AE jusqu'en S. Le cercle de diamètre AS coupe la perpendiculaire en E sur DE aux points R, R′ qui joints à A donnent les directions des asymptotes. — Les faisceaux projectifs et de sens opposés AK, H∞ F font naître l'hyperbole du point K_e.

7° Si l'axe orthique rencontre BC en A_o, CA en B_o, on a le faisceau harmonique $A_o(ACB'B_o)$. Comme A_oA, A_oC, A_oB' coupent LA en A, L, ∞ respectivement, A_oB_o passe par le milieu L_1 de AL. — La droite de Lemoine passe constamment par le point L.

8° La tangente du cercle DB′C′ au point D fait avec le côté DB′ l'angle $B'DT = C' = A + B - C$. On en conclut que l'angle $CDT = \alpha$, ou que DT passe par L_1. — Les cercles I et I_a ont leurs centres sur la bissectrice fixe AN de l'angle DAE. Comme ils touchent constamment DE, ils ont pour seconde tangente commune la perpendiculaire de N sur AE. Les centres I_b et I_c sont sur la bissectrice extérieure AN′ de l'angle DAE; la seconde tangente commune aux cercles I_b, I_c est la perpendiculaire abaissée de N′ sur AE.

×Question 1810.

(Voir *Mathesis*, (3), t. I, p. 64.)

Résoudre le système

$$x^2 - y = y^2 - z = z^2 - x = 2. \qquad \text{(Emmerich.)}$$

Solution par M. E. N. Barisien. On aperçoit immédiatement les deux solutions

$$x = 2, \quad y = 2, \quad z = 2; \qquad (1)$$

$$x = -1, \quad y = -1, \quad z = -1. \qquad (2)$$

D'ailleurs, si on fait $x = y = z$, les trois équations

$$x^2 - y = 2, \quad y^2 - z = 2, \quad z^2 - x = 2, \tag{3}$$

se réduisent à $x^2 - x - 2 = 0$, ce qui donne les solutions (1) et (2).

Pour avoir *toutes* les valeurs de x qui satisfont aux équations (3), éliminons y et z. Comme on a

$$y = x^2 - 2, \quad z = y^2 - 2 = (x^2 - 2)^2 - 2,$$

l'équation finale est

$$[(x^2 - 2)^2 - 2]^2 - x = 2,$$

ou

$$x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 - x + 2 = 0. \tag{4}$$

On connaît les racines $x = -1$, $x = 2$; en divisant par $(x + 1)(x - 2)$, on obtient

$$x^6 + x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 1 = 0, \tag{5}$$

équation qui a trois racines comprises entre 0 et 2, et trois entre 0 et -2.

On se rend facilement compte de l'existence de ces six racines par une méthode graphique. Si on élimine z entre les deux dernières des équations (3), on voit que x et y sont les coordonnées des points de rencontre d'une parabole et d'une quartique :

$$y = x^2 - 2, \quad y^2 = 2 \pm \sqrt{x + 2},$$

courbes qui se coupent en huit points réels.

Solution par M. A. Gob. Posons $x = X + 1$, $y = Y + 1$, $z = Z + 1$; nous obtenons :

$$X^2 + 2X - Y = Y^2 + 2Y - Z = Z^2 + 2Z - X = 2 \tag{1}$$

ou

$$X(X + 2) = Y + 2, \text{ etc.}$$

Multiplions ces équations membre à membre ; nous obtenons $XYZ = 1$ ou $(X + 2)(Y + 2)(Z + 2) = 0$. La solution $X = -2$ substituée dans les équations (1) donne $X = Y = Z = -2$, d'où $x = y = z = -1$.

Dans le cas où $XYZ = 1$, posons $\Sigma YZ = u$, $\Sigma X = t$ et additionnons membre à membre les équations (1) ; il vient

$$\Sigma X^2 + \Sigma X = 6 \quad \text{ou} \quad t^2 - 2u + t = 6. \tag{2}$$

Additionnons encore membre à membre les équations (1) après les avoir multipliées respectivement par X, Y, Z ; nous trouvons

$$\Sigma X^3 + 2\Sigma X^2 - u = 2t,$$

ou en tenant compte de l'identité $\Sigma X^3 - 3XYZ = \Sigma X.(\Sigma X^2 - \Sigma YZ)$ et de la relation $XYZ = 1$:

$$t^3 + 2t^2 - 2t + 3 - u(5 + 3t) = 0. \qquad (3)$$

Eliminons u entre (2) et (3); il vient

$$t^3 + 4t^2 - 9t - 36 = 0.$$

Les racines de cette équation sont $3, -3, -4$; les valeurs correspondantes de u sont $3, 0, 3$. Les valeurs de X, Y, Z sont donc les racines de l'une ou l'autre des équations

$$w^3 - 3w^2 + 3w - 1 = 0,$$
$$w^3 + 3w^2 - 1 = 0,$$
$$w^3 + 4w^2 + 3w - 1 = 0.$$

Nous obtenons ainsi les solutions

$$X = Y = Z = 1$$
$$X = 0{,}532, \quad Y = -0{,}653, \quad Z = -2{,}879^{\times}$$
$$X = 0{,}247^{\times}, \quad Y = -1{,}445^{\times}, \quad Z = -2{,}802.$$

D'où

$$x = y = z = 2$$
$$x = 1{,}532, \quad y = 0{,}347, \quad z = -1{,}879^{\times}$$
$$x = 1{,}247^{\times}, \quad y = 0{,}445^{\times}, \quad z = -1{,}802.$$

Les solutions marquées d'une croix sont approchées par excès. Des permutations circulaires des valeurs trouvées donnent de nouvelles solutions.

M. Rius y Casas nous a envoyé une solution qui se rapproche beaucoup de celle de M. Barisien, mais qui renferme également les valeurs données par M. Gob Autres solutions par M. Plakhovo et par M. Malengreau.

×Question 1333.

(Voir *Mathesis* (3), I, p. 215).

Soit SABCD *une pyramide quelconque ayant pour base un parallélogramme* ABCD. *Si un plan rencontre les arêtes* SA, SB, SC, SD *aux points* A', B', C', D'. *on a la relation*

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}. \qquad (J.\ N.)$$

Solution par M. R. Van Cauwenberghe. Appelons a, b, c, d, a', b', c', d', les distances SA, SB, ..., et soient P, Q, R les intersections

des droites A'D' et AD, B'C' et BC, A'D' et B'C'. La droite SR, intersection des plans SAD, SBC menés par les parallèles AD, BC est elle-même parallèle à AD et BC. Par conséquent,

$$\frac{a-a'}{a'}=\frac{AP}{SR},\quad \frac{d-d'}{d'}=\frac{DP}{SR},\quad \frac{b-b'}{b'}=\frac{DQ}{SR},\quad \frac{c-c'}{c'}=\frac{CQ}{SR}.$$

Soustrayons la seconde de ces égalités de la première, la quatrième de la troisième ; il vient

$$\frac{a}{a'}-\frac{d}{d'}=\frac{AP-OP}{SR},\quad \frac{b}{b'}-\frac{c}{c'}=\frac{DQ-CQ}{SR}.$$

Or $AP-DP=DQ-CQ$, etc.

Solution par M. J. Déprez. Les pyramides SABD, SBCD, SADC, SABC étant équivalentes, on peut écrire

$$\frac{SB'C'D'}{SBCD}+\frac{SA'B'D'}{SABD}=\frac{SA'C'D'}{SACD}+\frac{SA'B'C'}{SABC},$$

ou

$$\frac{b'c'd'}{bcd}+\frac{a'b'd'}{abd}=\frac{a'c'd'}{acd}+\frac{a'b'c'}{abc}.$$

Multiplions tous les termes de cette égalité par $\frac{abcd}{a'b'c'd'}$, etc.

Solution et généralisation par M. Emmerich. I. Appelons M, M' les points de rencontre des diagonales des quadrilatères ABCD, A'B'C'D', et soient m, m' les longueurs SM, SM'. Les triangles A'C'A, A'C'M, A'C'C ayant même base A'C' et leurs hauteurs en progression arithmétique, on a successivement

$$\frac{A'C'A}{A'C'S}+\frac{A'C'C}{A'C'S}=2\frac{A'C'M}{A'C'M},$$

$$\frac{a-a'}{a'}+\frac{c-c'}{c'}=2\frac{m-m'}{m'}$$

$$\frac{a}{a'}+\frac{c}{c'}=2\frac{m}{m'}$$

Par analogie,

$$\frac{b}{b'}+\frac{d}{d'}=2\frac{m}{m'};$$

d'où la relation proposée.

Nous avons supposé les points A', B', C', D' situés sur les arêtes mêmes; s'il n'en est pas ainsi, il suffit de substituer au plan A'B'C'D'

un plan parallèle qui rencontre directement les arêtes, et d'observer que les droites a'. b', c', d' sont alors multipliées par un même facteur.

II. Si le base ABCD est un quadrilatère quelconque, les hauteurs α, γ, μ des triangles AA'C, CA'C', MA'C' vérifient la relation

$$\mu \cdot AC = \alpha \cdot MC + \gamma \cdot AM;$$

d'où successivement, en multipliant par $\frac{1}{2}$ A'C' et divisant par A'C'S' :

$$\frac{MA'C'}{SA'C'} \cdot AC = \frac{AA'C'}{SA'C'} \cdot MC + \frac{CA'C'}{SA'C'} \cdot AM,$$

$$\frac{m - m'}{m'} \cdot AC = \frac{a - a'}{a'} \cdot MC + \frac{c - c'}{c'} \cdot AM$$

$$\frac{m}{m'} AC = \frac{a}{a'} \cdot MC + \frac{c}{c'} \cdot AM.$$

Par analogie,

$$\frac{m}{m'} BD = \frac{b}{b'} \cdot MD + \frac{d}{d'} \cdot BM.$$

Il en résulte

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{MC}{AC} + \frac{c}{c'} \cdot \frac{AM}{AC} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{MD}{BD} + \frac{c}{c'} \cdot \frac{BM}{BD}.$$

Cette formule conduit à une solution de la question 1336.

Note par M. C. A. Laisant. Dans le J. M. E. (1891, p. 151) j'ai publié une note *Sur la perspective d'une figure plane*, où je démontre que si A'B'C' est la perspective sur un plan d'un triangle ABC, le point M ayant M' pour perspective, on a

$$\frac{SM'}{SM} = \frac{1}{\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} + \frac{\gamma}{r}}$$

en supposant qu'on ait

$$\frac{SA'}{SA} = p, \quad \frac{SB'}{SB} = q, \quad \frac{SC'}{SC} = r$$

et que α, β, γ, (avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$), soient les coordonnées barycentriques de M par rapport à ABC.

Dans la question proposée, avec ces notations, en remplaçant D par M, la relation à démontrer est

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{SM}{SM'}.$$

Mais, ABCD étant un parallèlogramme, on a $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = -1$,

$$\frac{SM'}{SM} = \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}}, \quad \text{ou} \quad \frac{SM}{SM'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}.$$

Remarque. Si ABCD, BCAE, CABF sont des **parallèlogrammes** et si G, centre de gravité de ABC, a pour perspective G' sur le plan A'B'C', on a les relations :

$$\frac{SG}{SG'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'}, \quad \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} - \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'},$$

$$\frac{SE}{SE'} = \frac{SB}{SB'} - \frac{SC}{SC'} + \frac{SA}{SA'}, \quad \frac{SF}{SF'} = \frac{SC}{SC'} - \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'}.$$

Question 1340.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 240.)

Déterminer les surfaces telles que le produit des distances d'un point arbitraire de la surface et du plan tangent en ce point à un pôle fixe soit constant. (V. Retali).

Solution par M. E. Cesàro. Cherchons, plus généralement, les surfaces pour lesquelles il y a une relation quelconque

$$f(r, z) = 0 \qquad (1)$$

entre les distances r et z d'un point fixe O à tout point M de la surface et au plan tangent en ce point. Soient x et y les distances de O aux plans des sections principales en M. On sait (*Geometria intrinseca*, p. 157) que les dérivées de r et de z par rapport aux arcs s_1 et s_2 des lignes de courbure sont données par les formules

$$\frac{\partial r}{\partial s_1} = -\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial s_1} = -\frac{x}{\rho_1}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial s_2} = -\frac{y}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial s_2} = -\frac{y}{\rho_2}, \qquad (3)$$

où ρ_1 et ρ_2 représentent les rayons de courbure principaux. Cela étant, la dérivation de (1) nous donne, en vertu de (2) et de (3),

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial f}{\partial z}\right)x = 0. \quad \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial f}{\partial z}\right)y = 0. \qquad (4)$$

Si l'on prend $x = 0$, $y = 0$, la surface est nécessairement une sphère ($r = z = constante$). Il en est de même lorsque x et y ne sont pas nuls ; car on a, dans cette hypothèse, $\rho_1 = \rho_2$. Il faut donc supposer une seule des coordonnées x, y, égale à zéro : soit $y = 0$. Alors, pour satisfaire à la première égalité (4), il faut que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

En outre, d'après les égalités (3), on voit que r et z, et par suite ρ_1, en vertu de (5), ne varient pas avec s_2. Il en résulte que *les lignes de courbure du second système sont des lignes sphériques*, tracées sur des sphères concentriques. D'ailleurs, la courbure géodésique des lignes du premier système est égale, en vertu d'une autre condition d'immobilité (*loc. cit.*), à

$$\frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial s_1} = 0,$$

c'est-à-dire que ces lignes sont des géodésiques de la surface. Donc (*Geom. intr.*, p. 152) *les lignes de courbure du premier système sont des courbes planes*, dont les plans coupent la surface à angle droit. Elles sont d'ailleurs toutes *égales entre elles*, puisque ρ_1 ne dépend que de s_1. Les surfaces cherchées sont donc les SURFACES DE MONGE, qui constituent, parmi les surfaces à lignes de courbure planes dans un système et sphériques dans l'autre, le premier des trois *genres* trouvés par J. A. SERRET (*Journal de Liouville*, 1853, p. 137). L'enveloppe des plans des lignes de première courbure ne peut être qu'un cône, d'ailleurs quelconque, ayant O pour sommet, de sorte que *toutes les normales touchent un cône fixe*. Lorsque le cône se réduit à une droite, on obtient une surface de révolution, dont le méridien est défini par la relation (1).

Celle-ci sert à définir, dans le cas général, la forme (unique) des lignes de courbure *planes*. En effet, si l'on représente par s et ρ l'arc et le rayon de courbure de ces lignes, on peut d'abord déduire $z = \varphi(r)$ de la relation (1) ; puis, d'après (2),

$$s = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \varphi^2(r)}}, \quad \rho = \frac{r}{\varphi'(r)}.$$

Il suffit d'éliminer r entre ces égalités pour avoir l'équation intrinsèque des lignes cherchées. Dans le cas particulier considéré par M. Retali

on a $rz = constante$, et l'égalité (5) devient $\rho z + r^2 = 0$, d'où il s
que la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur
symétrique du pôle par rapport à M. C'est là, comme on sait (*Geo
intr.*, pp. 45, 48), une propriété caractéristique de l'*hyperbole équilatèr*
Pour avoir un exemple des surfaces demandées par M. Retali il suff
donc de faire tourner une hyperbole équilatère autour de l'un de se
diamètres.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1031. Si les diagonales d'un quadrilatère ABCD sont rectangulaires, tous les rectangles circonscrits à ce quadrilatère sont semblables entre eux. (NAM, 1855, p. 368).

En effet, les côtés d'un rectangle circonscrit sont doubles des projections sur leurs directions des côtés correspondants du rectangle qui a pour sommets les milieux des côtés de ABCD; or les angles entre les côtés homologues des deux rectangles sont égaux.

Le centre d'un rectangle circonscrit est à l'intersection des parallèles à ses côtés menées par les milieux des diagonales AC, BD; le lieu de ce centre est donc une circonférence. (J. N.)

1032. Déterminer le nombre de mots que l'on peut former avec 19 consonnes et 5 voyelles, chaque mot étant composé de 3 consonnes différentes et de 2 voyelles différentes; on exclut les mots renfermant trois consonnes de suite.

Réponse : $C_{19}^{3}\, C_{5}^{2}\, (P_5 - P_3)$.

1033. Même question, en supposant qu'une même lettre puisse être répétée.

Réponse (Voir NAM, 1844, (1), III, p. 311) :

$$\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 19^3 \cdot 5^2 - 19^2 \cdot 5^2 \cdot 3.$$

1034. Lieu des milieux des cordes égales d'une parabole.

Eliminer α entre les équations

$$(y + d \sin \alpha)^2 = 2p\,(x + d \cos \alpha),$$
$$(y - d \sin \alpha)^2 = 2p\,(x - d \cos \alpha).$$

1035. Résoudre le système

$$(\alpha + x)^2 - a^2 = y^2,\ (\beta + y)^2 + b^2 = x^2.$$

(Unferdinger).

Si l'on fait

$$c^2 = \alpha^2 - \beta^2,\ R^2 = -(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c),$$

la solution est

$$x = \frac{2c^2}{y}\left\{\alpha(a^2 - b^2 - c^2) \pm \beta R\right\},..$$

1038. Résoudre le système

$$xy + xz + yz = \alpha,\quad xz(x+y)(y+z) = \beta,$$
$$x(y-z) = \gamma.$$

(UNFERDINGER).

On trouve

$$x = \sqrt{\frac{vw}{u}},\ y = \sqrt{\frac{uw}{v}},\ z = \sqrt{\frac{uv}{w}},$$

où $$u = \tfrac{1}{2}(-2\gamma \pm \sqrt{(2\alpha + \gamma^2 - 8\beta)},..$$

1039. Si x et y sont liés par la relation $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, trouver la limite du rapport $\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(y-\beta)}$ pour $x = \alpha$, $y = \beta$.

(UNFERDINGER).

On a

$$\lim \frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(y-\beta)} = \lim \frac{\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)\cos\frac{1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(y-\beta)\cos\frac{1}{2}(y-\beta)} = \lim \frac{\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(y-\beta)}.$$

De la relation donnée, on déduit

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin x - \sin\alpha}{\sin y - \sin\beta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)\cos\frac{1}{2}(x+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(y-\beta)\cos\frac{1}{2}(y+\beta)};$$

la limite cherchée est donc égale à

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \times \lim \frac{\cos\frac{1}{2}(y+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(x+\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

1038. Par les sommets d'un triangle ABC, on mène trois droites parallèles et les trois droites perpendiculaires. On obtient ainsi trois rectangles qui ont respectivement pour diagonales AB, BC, CA. Démontrer que les trois autres diagonales concourent en un point du cercle des neuf points du triangle ABC. (*J. de Vuibert*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1351**. Soient A, B, C trois circonférences qui se touchent extérieurement deux à deux et telles qu'une tangente commune extérieure aux cercles A et B soit parallèle à une tangente commune extérieure aux cercles A et C. Démontrer qu'une tangente commune extérieure aux cercles B et C, limitée aux points de contact, est égale au rayon du cercle A.

Déduire de là une solution du problème de Malfatti lorsque deux côtés du triangle fondamental deviennent parallèles. (E. N. BARISIEN.)

1352. Quelles sont les surfaces, dont les normales sont également distantes d'une droite fixe? (E. CESÀRO.)

1353. A une ellipse donnée par ses axes AA', BB', inscrire un triangle MNP dont les côtés soient parallèles aux côtés d'un triangle donné M'N'P'.

1354. On projette un point quelconque M d'une ellipse en N et P sur les diamètres conjugués égaux. Démontrer que la normale en M passe au milieu Q de la distance NP. (STEINER).

Trouver le lieu géométrique du point Q lorsque M parcourt l'ellipse, ainsi que l'enveloppe de la droite NP.

1355. Deux coniques U, U' touchent les côtés d'un triangle ABC, la première en M, N, P, la seconde en M', N; P'. Soient A', B', C' les points d'intersection des côtés homologues des triangles MNP, M'N'P'. Démontrer que le triangle A'B'C' est circonscrit au triangle ABC et est autopolaire par rapport aux deux coniques U, U'; la quatrième tangente commune à ces courbes est l'axe d'homologie de ces triangles.

Conclure de là que le cercle inscrit et les deux coniques touchant les côtés du triangle ABC soit aux pieds des hauteurs, soit aux pieds des bissectrices intérieures ont une quatrième tangente commune.

×**1356**. Résoudre l'équation

$$\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = a.$$

(E. N. BARISIEN.)

CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ PAR UN NOMBRE ENTIER QUELCONQUE,

par M. Gino Loria, Professeur à la Faculté de Sciences de Gênes (Italie).

Le problème de « reconnaître si un nombre N est divisible par un autre à l'aide seulement des chiffres du premier » remonte, au moins, à B. Pascal, qui, dans un de ses mémoires les moins connus(*), s'est proposé de généraliser le caractère de la divisibilité qui sert de base à l'« épreuve par 9 ». La règle formulée par le célèbre géomètre ne diffère pas, au fond, de celle que Kronecker exposait dans ses leçons(**); mais comme, au point de vue pratique, elle n'est pas tout-à-fait satisfaisante, on en a proposé d'autres dont la plus récente et peut-être la plus générale appartient à M. J. Malengreau (***). Je me propose dans ce qui suit de montrer qu'on peut la remplacer par une autre encore plus générale, d'une application simple et uniforme et qui est la source d'un nombre illimité de caractères de divisibilité particuliers et très utiles aux calculateurs.

1. Un nombre entier quelconque g (que nous supposons positif) peut toujours être choisi comme *base d'un système de numération*. Alors tout nombre N compris entre 0 et g^{n+1} peut s'écrire sous la forme

$$N = \sum_{k=0}^{k=n} a_k g^k, \tag{1}$$

où $a_0, a_1, \ldots a_n$ sont des nombres non négatifs inférieurs à g qui sont déterminés sans ambiguïté par la connaissance de N et g; ce sont les *chiffres* de N écrit dans le système considéré. Posons

$$S_g(N) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k, \quad (2) \qquad S_g^*(N) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k a_k; \quad (3)$$

$S_g(N)$ est donc la *somme des chiffres de* N, tandis que S_g^* est ce que nous appelons *somme alternée des mêmes chiffres*. Des relations (1), (2), (3) on tire :

$$N - S_g(N) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k (g^k - 1); \quad N - S_g^*(N) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k (g^k - (-1)^k).$$

(*) *De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis* (Œuvres de B. Pascal, T. V., La Haye, 1779, p 123 134).

(**) *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*. Erster Abschn., I Bd, Leipzig, 1901).

(***) V. la note *Caractère de divisibilité par un nombre quelconque* dans le cahier d'août-septembre 1901 de *Mathesis*.

Or, tous les binômes $g^k - 1$ sont divisibles par $g - 1$, donc $N - S_g(N)$ est aussi divisible par ce nombre ; de même tous les binômes $g^k - (-1)^k$ sont divisibles par $g + 1$ donc $N - S_g^*(N)$ est un multiple de $g + 1$.

Cela prouve que tout nombre a qui est un diviseur de $g - 1$ ou de $g + 1$ est aussi diviseur de $N - S_g(N)$ ou de $N - S_g^*(N)$; et *vice versa*.

On peut en conséquence considérer comme établis les théorèmes suivants :

I. *Pour qu'un nombre entier* N *soit divisible par un autre entier* a, *il est nécessaire et suffisant que* $S_g(N)$ *soit divisible par* a, $S_g(N)$ *étant la somme des chiffres de* N *écrit dans un système de numération dont la base* g *est un multiple quelconque de* n *augmenté de l'unité.*

II. *Pour qu'un nombre entier* N *soit divisible par un autre entier* a, *il est nécessaire et suffisant que* $S_g^*(N)$ *soit divisible par* a, $S_g^*(N)$ *étant la somme* ALTERNÉE *des chiffres de* N *écrit dans un système de numération dont la base est un multiple quelconque de* a *diminué de l'unité* (KRONECKER, (l. c. pp. 109-110).

2. Ces deux propositions prouvent que la question de chercher des conditions de divisibilité d'un nombre quelconque N par un nombre entier a n'est au fond que celle d'écrire N dans un système déterminé de numération ; c'est un problème qui n'offre aucune difficulté théorique, mais qui mène par des calculs en général très laborieux à des conclusions variables avec a. Or, on évite ces deux inconvénients, si, en supposant d'abord N écrit dans notre système décimal, on prend après comme base une puissance quelconque de 10. En effet, si l'on a

$$N = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \cdots (0 \leqq a_i < 10)$$

et si l'on écrit

$$N = (a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{m-1}a_{m-1}) + 10^m(a_m + 10a_{m+1} + \cdots + 10^{m-1}a_{m-1}) + \cdots,$$

on voit de suite que le nombre N, écrit dans le système de numération ayant 10^m comme base, a les *chiffres* suivants :

$$a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{m-1}a_{m-1},\quad a_m + 10a_{m+1} + \cdots + 10^{m-1}a_{2m-1}, \cdots,$$

qui s'obtiennent simplement en divisant les chiffres du nombre donné (toujours supposé écrit de la manière ordinaire) à partir de la droite en groupes formés tous (le dernier *tout au plus* excepté) de m chiffres consécutifs. En appliquant ces hypothèses aux propositions du n° précédent on peut énoncer ces deux autres :

III. *Pour qu'un nombre* N, *écrit dans le système décimal, soit divisible par un entier a qui est un facteur de* $10^m - 1$, *il est nécessaire que la* SOMME *des nombres résultants de la séparation des chiffres de* N *en tranches de m chiffres chacun à partir de la droite soit divisible par a.*

IV. *Pour qu'un nombre* N, *écrit dans le système décimal, soit divisible par un entier a, qui est un facteur de* $10^m + 1$, *il est nécessaire que la* SOMME ALTERNÉE *des nombres résultants de la séparation des chiffres de* N *en tranches de m chiffres chacun à partir de la droite, soit divisible par a* (*).

Par ex. : tous les nombres de la forme $10^{mk} - 1$ sont des multiples de $10^m - 1$ et tous les nombres de la forme $10^{mk} - (-1)^k$ le sont du nombre $10^m + 1$.

3. Pour déterminer les bornes de la région arithmétique à laquelle s'étendent les considérations que nous venons d'exposer, il suffit de se rappeler qu'en vertu du théorème de FERMAT généralisé par EULER, *si a est un nombre premier avec* 10, $10^{\varphi(a)} - 1$ *est divisible par a*, où $\varphi(a)$ désigne, comme à l'ordinaire le nombre des nombres de la série 1, 2..., *a* qui sont plus petits que *a* et premiers avec lui.

Le théorème III est donc applicable à tout nombre *a* premier avec 10 pourvu qu'on prenne $m = \varphi(a)$. M is nous pouvons ajouter encore quelque chose. Comme $\varphi(a)$ est un nombre toujours pair si $a > 2$ on peut écrire $10^{\varphi(a)} - 1 = \left(10^{\frac{\varphi(a)}{2}} - 1\right)\left(10^{\frac{\varphi(a)}{2}} + 1\right)$; *a* divise, par conséquent, un des deux nombres $10^{\frac{\varphi(a)}{2}} \mp 1$; s'il divise le premier on appliquera le théorème III, s'il divise le second, le théorème IV, prenant toujours $m = \frac{\varphi(a)}{2}$. Ce n'est pas assez. Si ω est un diviseur (1 *non exclu*) de $\varphi(a)$ il peut arriver que *a* divise un nombre de la forme $10^\omega \mp 1$ ($\omega < \frac{1}{2}\varphi(a)$); il convient alors d'appliquer les propositions III ou IV, en prenant ω égal au minimum de ω. La détermination de ce minimum peut se faire ou par un nombre borné de tentatives, ou à l'aide d'une table donnant la

(*) C'est seulement tout récemment qu'on m'a averti que ces deux propositions se trouvent dans l'*Arithmétique* de M. l'Abbé GELIN (que je ne connais pas directement). — [Ces théorèmes remontent assez haut ; voir, p. ex., l'*Algèbre* de Choquet. Au fond, les théorèmes de M. l'abbé Gelin sont généraux, parce qu'il représente par 10, ce que M. Loria représente par g dans son n° 1 (P. M.)].

décomposition en facteurs des nombres de la forme $10^n \pm 1$, (*) ou enfin (d'après une belle remarque de M. L. Bianchi) en exprimant $(1 : a)$ en fraction périodique, comme nous allons le prouver.

Soit $$\frac{1}{a} = \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\right) + \frac{1}{10^n}\left(\frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\right) + \cdots;$$

on aura $$\frac{10^n - 1}{a} = a_n + 10a_{n-1} + \cdots + 10^{n-1}a_1,$$

donc $10^n - 1$ est un multiple de a et le théorème III est applicable pourvu qu'on prenne $m = n$, nombre des chiffres de la période du développement de $\frac{1}{a}$ en fraction périodique. — Dans le cas particulier où n est égal à un nombre pair $2v$ et que l'on a

$$a_{v+1} = 9 - a_1, \quad a_{v+2} = 9 - a_2, \cdots, a_{2v} = 9 - a_v,$$

de l'égalité précédente découle la suivante

$$\frac{10^v + 1}{a} = a_v + 10a_{v-1} + \cdots + 10^{v-1}a + 1 \text{ (**)}.$$

4. Pour mieux faire saisir le procédé, nous allons l'appliquer à la recherche du caractère de divisibilité par le nombre premier **271**. Comme on a dans ce cas

$$10^{\varphi(a)} - 1 = 10^{a-1} - 1 = 10^{270} - 1 = (10^{135} - 1)(10^{135} + 1),$$

on cherchera si 271 est diviseur d'un nombre de la forme $10^\omega \pm 1$, ω étant un des nombres 1, 3, 3^2, 3^3, 5, 5.3, 5.3^2; comme on a $10^5 - 1 = 3^3 \times 41 \times 271$, on peut dire : « pour qu'un nombre N soit divisible par 271 il est nécessaire et suffisant que cela arrive pour la

---

(*) Voici les premières lignes de cette table :

$10 - 1 = 3^2$.	$10 + 1 = 11$.
$10^2 - 1 = 3^2 \times 11$.	$10^3 + 1 = 101$.
$10^3 - 1 = 3^3 \times 37$.	$10^4 + 1 = 7 \times 11 \times 13$.
$10^4 - 1 = 3^2 \times 11 \times 101$	$10^5 + 1 = 73 \times 137$.
$10^5 - 1 = 3^3 \times 41 \times 271$.	$10^5 + 1 = 11 \times 9091$.
$10^6 - 1 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$.	$10^6 + 1 = 101 \times 9901$.

(**) D'après un article récent de M. Hertzer (*Archiv. für Math. und Phys.*, 1902, (3), II, 248), M. Kessler a déjà calculé les nombres des chiffres des fractions décimales égales à $\frac{1}{p}$, p étant un nombre premier < 100000; dans l'article cité, ce calcul est poussé plus loin, c'est-à-dire jusqu'aux valeurs de $p < 112500$. Ces résultats sont utiles à qui veut appliquer la remarque de M. Bianchi.

somme des nombres qui naissent en séparant, autant que cela est possible, les chiffres de N en tranches de cinq chiffres chacun à partir de la droite; » c'est la conclusion même à laquelle conduit la méthode de M. Bianchi, car $(1 : 271) = 0{,}00369\ 00369\ldots$ Pour prouver combien il est facile d'appliquer cette règle, nous l'appliquerons à chercher si le nombre suivant (que j'emprunte à M. Malengreau)

$$3345678984640138761350882563003775062$$

est divisible par 271. A cet effet nous l'écrivons comme il suit :

$$33 \mid 45678 \mid 98464 \mid 01387 \mid 61350 \mid 88256 \mid 30037 \mid 75062;$$

la somme des tranches est 400267, nombre que nous écrivons: $4|00267$; et $267 + 4 = 271$ donc le nombre donné est divisible par 271.

5. Le théorème III combiné avec les remarques contenues dans le n° 4 prouve que la recherche des conditions de divisibilité du nombre

$$N = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots$$

par l'entier a est ramenée à la recherche analogue pour le nombre

$$S_{1,m}(N) = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{m-1} a_{m-1} + \sum_{k=1}^{k=n-1} \{ a_{km} + 10a_{km+1} + \cdots + 10^{m-1} a_{(k+1)m-1} \}^{(*)}$$

m étant un nombre tel que $10^m - 1$ soit divisible par a. Or, ce *critère général de divisibilité* de N par a peut se transformer d'une infinité de manières, car on peut substituer à $S_{1,m}(N)$ un nombre quelconque $\equiv S_{1,m}(N) \pmod{a}$; on peut profiter de cette circonstance pour arriver à des *caractères spéciaux* relatifs à des nombres a premiers avec 10. Ceux du type suivant sont très-connus, grâce à leur utilité pratique : *pour que* N *soit divisible par a, il est nécessaire et suffisant que cela arrive pour un multiple déterminé du nombre de ses dizaines augmenté ou diminué d'un multiple aussi déterminé de ses unités.* Pour prouver et préciser cet énoncé, considérons l'expression :

$$S = \rho a_0 + \lambda a_1 + 10\lambda a_2 + \cdots + 10^{m-2}\lambda a_{m-1} + \sum_{k=1}^{k=n-1} 10^{km-1}\lambda \{ a_{km} + 10a_{km+1} + \cdots + 10^{m-1} a_{(k+1)m-1} \},$$

où ρ est un nombre entier positif ou négatif à déterminer, et λ un des nombres 1, 2, 5. En posant $\mu = 10 : \lambda$ les deux relations précédentes

(*) Nous n'excluons pas le cas où le nombre des chiffres de N est premier avec m, car plusieurs des derniers chiffres peuvent être égaux à 0.

donnent

$$\mu S - S_{10^m}(N) = (\mu\rho - 1)a_0$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=n-1} (10^{km} - 1)\{a_{km} + 10a_{km+1} + \cdots + 10^{m-1} a_{(k+1)m-1}\}.$$

Or, $10^{km} - 1$ est divisible par $10^m - 1$, donc

$$\mu S - S_{10^m}(N) \equiv (\mu\rho - 1)a_0 \pmod{a};$$

et comme a est un nombre premier avec 10, tandis que a est un des nombres 10, 5, 2, il existe toujours des couples ρ, σ de nombres tels que

$$\mu\rho - 1 = \sigma a;$$

lorsqu'on a choisi ρ et σ de cette manière, la congruence précédente devient

$$\mu S - S_{10^m}(N) \equiv 0 \pmod{a},$$

ou, μ étant premier avec a,

$$S_{10^m}(N) \equiv S \pmod{a}.$$

Cela prouve que *dans les caractères de divisibilité par le nombre a, premier avec* 10 *il est permis de substituer le nombre* S *au nombre* $S_{10^m}(N)$.

Supposons par exemple $a = 7$. On devra résoudre les congruences

$$10\rho - 1 = 7\sigma, \quad 5\rho - 1 = 7\sigma, \quad 2\rho - 1 = 7\sigma;$$

on obtient les valeurs suivantes (où k est un entier quelconque) :

$$\begin{cases} \rho = 5 + 7k, \\ \lambda = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 3 + 7k, \\ \lambda = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1 + 7k, \\ \lambda = 5, \end{cases}$$

entre lesquelles il faudra choisir les plus petites; si on les veut positives on prendra $\lambda = 1$, $\rho = 5$, mais si (comme il est très avantageux) on admet aussi des valeurs négatives, on prendra $\lambda = \rho = 1, -2$; on arrive à la conclusion suivante : *pour qu'un nombre soit divisible par* 7, *il faut et il suffit que le nombre de ses dizaines augmenté de* 5 *fois le nombre de ses unités ou diminué de* 2 *fois ce nombre soit un multiple de* 7. Ce caractère particulier (comme ses analogues) est utile lorsqu'il s'agit de petits nombres; mais pour les grands nombres, il vaut mieux d'avoir recours au caractère général : je vais le montrer, en terminant, au moyen d'un exemple de Pascal. Soit donné le nombre

287 542 178

et soit proposé de chercher s'il est divisible par 7; d'après les deux caractères particuliers précédents, il faut voir si les nombres suivants sont divisibles par 7 :

287 543 17 + 5 × 8 = 287 542 57, 28 754 217 — 2 × 8 = 287 542 01, et la question est de la sorte très-peu avancée; si au contraire, on applique le caractère général, il suffit d'écrire le nombre donné comme il suit

287 | 542 | 178

et de faire la somme alternée des trois nombres résultants; comme elle est 77, on est sûr que le nombre donné est un multiple de 7.

THÉORÈMES DE MÉTAGÉOMÉTRIE RELATIFS AUX MÉDIANES D'UN TRIANGLE.

par M. C. E. Wastbels, répétiteur à l'Université de Gand.

I.

Dans un triangle euclidien ABC, la médiane AA′ divise en deux parties égales le segment MN déterminé par AB et AC sur une droite quelconque parallèle à BC; on peut se demander comment la droite MN, jouissant de la propriété énoncée, peut s'obtenir en métagéométrie.

Première méthode. Si la droite MN doit couper la médiane AA′ au point E, il suffit de prendre, sur le prolongement de AE, une longueur EE′ = AE et de mener la droite E′M faisant avec AE′ l'angle AE′M = A′AC, cette droite étant d'ailleurs dirigée de telle manière que les deux angles en question soient alternes ou correspondants par rapport à AE′. Si E′M rencontre AB en M, la droite ME sera la droite demandée.

La démonstration de cette construction est facile.

Deuxième méthode. Lemme. Les côtés AB et AC et la médiane AA′ d'un triangle quelconque peuvent toujours être considérés comme étant une section plane faite dans un dièdre PASQ et son plan bissecteur R (fig. 1). En effet, élevons sur BC en A′ une perpendiculaire quelconque A′S′ non située dans le plan du triangle; de A, abaissons sur A′S′ la perpendiculaire AS; je dis que le plan A′AS divise le dièdre BASC en deux parties égales.

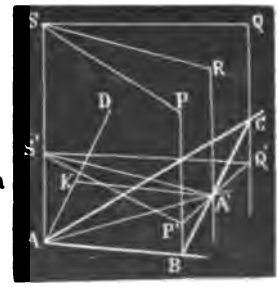


Fig. 1.

Pour le prouver, menons par S′ le plan σ normal à AS et, par A′, le plan α normal à A′S′; soit P′Q′ l'intersection de ces deux plans. Les plans α et BAS étant perpendiculaires à σ, leur intersection BP′ est perpendiculaire à A′P′; de

même, CQ′ est perpendiculaire à A′Q′. Les triangles A′BP′ et A′CQ′ étant égaux, on aura A′P′ = A′Q′, et comme S′A′ est perpendiculaire à P′Q′, on conclut sans peine que les angles A′S′P′ et A′S′Q′ sont égaux. Par suite, le plan A′AS divise le dièdre BASC en deux parties égales; c. q. f. d.

Ce lemme étant établi, considérons maintenant, dans la fig. 1, PASQ comme un dièdre quelconque; faisons-y une section plane quelconque et soient AB, AC, AA′ les intersections du plan sécant avec les faces P et Q du dièdre et son plan bissecteur R.

D'un point quelconque A′ de AA′ abaissons une perpendiculaire A′S′ sur l'arête AS et menons, par A′, le plan normal à A′S′; admettons que ce plan coupe AB et AC en B et C; on aura A′B = A′C.

En effet, soient BP′ et CQ′ les intersections de ce plan avec P et Q, et P′A′Q′ son intersection avec le plan normal à SS′ mené par S′; les droites BP′ et CQ′ sont perpendiculaires au plan S′P′Q′ et, par suite, à la droite P′Q′. Cela étant, on voit sans peine que les triangles A′S′P′ et et A′S′Q′ sont égaux, et l'égalité de ces triangles entraîne celle de A′P′B et A′Q′C; d'où A′B = A′C.

Imaginons maintenant le plan normal à A′S′ mené par S′, c'est-à-dire le plan perpendiculaire à R mené par l'arête AS, et soit AD son intersection avec le plan ABC. Si l'on projette A′S′ en A′K sur le plan ABC, cette projection sera une perpendiculaire commune aux droites BC et AD, puisque la droite A′S′ est perpendiculaire à deux plans ayant pour traces BC et AD. La droite AD étant indépendante de la position du point A′ sur AA′, on voit que la droite BC divisée par un point quelconque A′ de AA′ en deux parties égales peut s'obtenir en abaissant de ce point une perpendiculaire A′K sur la droite fixe AD et élevant en A′ une perpendiculaire sur A′K.

Il est facile de prouver que, réciproquement, toute droite BC répondant à la question est fournie par la construction qui précède; car, en désignant par P′Q′ la projection de BC sur le plan normal à AS mené par A′, on aura P′A′ = A′Q′; les points P′ et Q′ se trouvent respectivement dans les plans P et Q; la droite S′A′ est donc à la fois bissectrice et médiane du triangle S′P′Q′; par suite, ce triangle est isoscèle et S′A′ est perpendiculaire à P′Q′. Il résulte de là que le plan projetant de BC est normal à A′S′; c. q. f. d.

Remarque. — La théorie des divisions harmoniques conduit directement au théorème démontré ci-dessus.

II.

Théorème. *Si deux médianes* BB′, CC′ *d'un triangle sont égales, ce triangle est isoscèle. Le théorème est en défaut en G. R. quand la droite* $B'C' = \frac{4\Delta}{3}$.

Démonstration. Abaissons les perpendiculaires AD, BE et CF sur la droite C′B′ (fig. 2 et 3); ces perpendiculaires (supposées $\leqq \Delta$ en G. R) sont égales entre elles. On voit sans peine que, dans le cas qui nous occupe, la droite AD ne peut tomber en dehors du triangle; car, s'il en était ainsi, on aurait (fig. 2).

$$DF = 2DB', \quad DE = 2DC'; \quad \text{donc} \quad DF < DE;$$

le point F se trouverait donc sur le segment B′C′E; par suite, C′F < EB′.

Comme, par hypothèse, BB′ = CC′, les triangles rectangles BEB′ et CFC′ seraient égaux et B′E = C′F, ce qui est impossible.

En G. R., l'égalité des triangles rectangles considérés suppose que les côtés B′E et C′F soient tous deux $< 2\Delta$ ou $> 2\Delta$; or, la première de

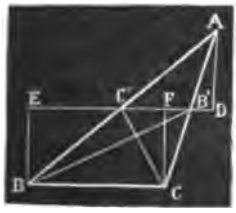


Fig. 2.

Fig. 3.

ces conditions est remplie dans la figure 2, car AB étant $< 2\Delta$, on a AC′ < Δ, DC′ < Δ, DE < 2Δ; d'où, à fortiori, B′E < 2Δ et C′F < 2Δ.

Admettons donc que AD se trouve à l'intérieur du triangle (fig. 3); les points E et F tomberont à l'extérieur de cette figure.

En G.E. et L, on pourra encore conclure que les triangles BEB′ et CFC′ sont égaux; par suite, on aura successivement

B′E = C′F, B′F = C′E; CB′ = BC′, CA = BA; c. q. f. d.

En G.R., les égalités BE = CF et BB′ = CC′ entraînent l'une des deux égalités suivantes

$$B'E = C'F, \quad B'E + C'F = 4\Delta.$$

Dans le premier cas, on conclut, comme précédemment, que CA = BA.

Dans le second, on aura

$$EC'B' = FEC' = (4\Delta - EC'B'F) + EC';$$

d'où $C'B' = 4\Delta - EC'B'F = 4\Delta - 2C'B'$; $C'B' = \frac{4\Delta}{3}$.

Réciproquement, si, dans la figure 3, on suppose $C'B' = \frac{4\Delta}{3}$, on prouve facilement que $BB' = CC'$, quels que soient les côtés AB et AC. Ce cas correspond, en géométrie sphérique, à celui d'un triangle *dans* lequel $C'B' = \frac{2}{3}\pi$ ou 120°.

NOTES MATHÉMATIQUES(*)

4. *Sur une intégrale.* Si l'on veut rester dans le domaine réel, *on a*

$$\int \frac{dx}{x-a} = l(x-a) + lC \quad \text{ou} \quad l(a-x) + lC,$$

suivant que l'on considère des valeurs de x supérieures ou inférieures à a. Cependant, une seule des deux expressions suffit, si l'on admet pour C des valeurs de la forme $c\sqrt{-1}$.

Voici une belle application de cette remarque.

Soit à chercher une courbe telle que le produit de l'ordonnée d'un point quelconque de cette ligne par l'ordonnée à l'origine de la tangente en ce point soit constant. L'équation différentielle de la courbe est

$$y(y - xy') = a^2, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \frac{ydy}{y^2 - a^2};$$

on en tire

$$lx = \tfrac{1}{2} l(y^2 - a^2) + lC, \quad x^2 = C^2(y^2 - a^2).$$

Au premier abord, les courbes cherchées sont des hyperboles. Cependant, d'après la remarque rappelée ci-dessus, les ellipses représentées par

$$x^2 = C^2(a^2 - y^2)$$

satisfont également au problème (**). (Petit-Bois).

(*) La démonstration du théorème de Pythagore donnée p. 17, a été aussi publiée dans *Mathesis*, 1884, p. 54 par M. Cl. Thiry. Voir aussi son *Troisième livre de géométrie* (Gand, Hoste, 1886), p. 31.

(**) La remarque de M. Petit-Bois est connue, mais elle n'est pas assez vulgarisée. C'est pourquoi nous avons cru devoir la publier.

*5. *Sur un certain triangle*, par M. G. Fontené. Quand un triangle ABC a en B et C deux bissectrices extérieures égales sans être isocèle, la relation

$$\sin^2\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

donnée par M. Emmerich, et dont on connaît diverses interprétations géométriques [(2), I, p. 24], peut encore se traduire ainsi, I étant le centre du cercle inscrit :

$$r = a \times \frac{\cos^2 BIC}{\sin BIC}.$$

*6. *Sur la question* 1252, par M. G. Fontené. D'après la question 1252, si l'on élimine s entre les deux relations

$$\frac{\cos a}{\cos\varphi}\cos y\cos s + \frac{\sin a}{\sin\varphi}\sin y\sin s = 1,$$

$$\frac{\cos b}{\cos\varphi}\cos s\cos x + \frac{\sin b}{\sin\varphi}\sin s\sin x = 1,$$

la relation obtenue entre x et y *se décompose;* on a

$$\frac{\cos c}{\cos\varphi}\cos x\cos y + \frac{\sin c}{\sin\varphi}\sin x\sin y = 1,$$

c satisfaisant à l'équation

$$\frac{\cos a\cos b\cos c}{\cos\varphi} + \frac{\sin a\sin b\sin c}{\sin\varphi} = 1,$$

qui donne pour c deux valeurs à $2k\pi$ près. La démonstration *directe* de ce fait offrirait un certain intérêt, même après la solution de la question donnée dans le Journal.

BIBLIOGRAPHIE.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, herausgegeben von G. Hauck in Berlin und A. Gutzmer in Iena. Leipzig, Teubner. Achter Band, Heft 1, 1900 (IV-231 pp. in-8); Heft 2, 1900 (IV-251 pp.). Neunter Band. Heft 1, 1901 (IV-140 pp.); Heft 2, 1900 (VI-123 pp.). Prix du t. VIII : 16 marcs; du t. IX : 9 marcs.

1. L'association des mathématiciens allemands tient chaque année ses assises en même temps que l'association des naturalistes et des médecins allemands et publie ses travaux sous la forme d'annuaires divisés en deux cahiers : le premier cahier contient la chronique de l'association et le résumé des communications

faites dans la réunion annuelle; le second, un ou plusieurs rapports sur l'état actuel de l'une ou l'autre théorie mathématique. C'est à Hambourg que l'association s'est réunie en 1901; l'annuaire correspondant n'a pas encore paru. Les sessions antérieures se sont tenues à Halle (1891), Nuremberg (1892), Munich (1893), Vienne (1894) Lubeck (1895), Francfort-sur-le-Mein (1896), Brunswick (1897), Dusseldorf (1898), Munich (1899), Aix-la-Chapelle (1900). Neuf annuaires ont été publiés; le quatrième renferme le résumé des travaux de deux sessions, celles de Vienne et de Lubeck.

Quelques-uns des rapports qui ont paru dans les seconds cahiers de l'annuaire sont des ouvrages étendus, par exemple, celui de Fr. Meyer sur la *Théorie des Invariants* (t. I), qui a été traduit en français et en italien; celui de Brill et Noether sur la *Théorie des Fonctions algébriques* (t. III); celui de Hilbert sur *Les Corps algébriques* (t. IV); celui de Kötter. sur *La géométrie synthétique*, encore inachevé (t. V); enfin celui de Czuber *Sur le calcul des probabilités* (t. VII).

Voici une analyse sommaire des t. VIII et IX

3. *Premier cahier du t. VIII.* Chronique de l'association. Biographies avec portraits (sauf pour Gasco) : L. G. Gasco (1844-1899); C. I. Gerhardt (1816-1899), par M. Cantor; Lie (1842-1899) par Engel; E. v. Lommel (1837-1899), par L Boltzmann, avec bibliographie; H. Schapira (1840-1898), par C. Köhler, aussi avec bibliographie; K. Schober (1859-1899), par W. Wirtinger, également avec une liste de ses écrits.

Notes et conférences 1. *Boltzmann.* Sur le développement des méthodes de la physique théorique dans les temps modernes. 2. *H. Weber, G. Hauck, F. Klein, Krazer, Study.* Sur les nouveaux programmes d'examen pour les professeurs des gymnases, et questions connexes. 3. *Mehmke, Bauschinger,* etc. Rapport et discussion sur la division décimale des angles et du temps. 4. Notes diverses de Noether, Gordan, Hilbert, Sommerfeld, Sommer, Engel, Zindler, Doehlmann, Brill, Study, Schimpf, Lerch, Horn, von Weber, Hensel.

3 *Second cahier du t. VIII. Schoenflies.* Développement de la théorie des ensembles Cet exposé historique, bibliographique et critique est un vrai traité sur la matière, dit M. J. Tannery (voir *Bulletin de Darboux*, (2), XXIV, 1re partie, pp. 239-245). Il est divisé en trois sections : théorie générale des ensembles infinis, théorie des ensembles de points, application aux fonctions de variables réelles.

4. *Premier cahier du t. IX.* Chronique. Biographie et portraits : K. Bobek (1855-1899); Reinhold Hoppe (1816-1900) par E. Lampe; Robert Henri Hoppe (1857-1899) par F. Lorenz; Ed. Wiltheiss (1855-1900) par Wirtinger; K. Zelbr (1854-1900) par E. Waelsch.

Notes. Klein: Sur les tomes IV et V de l'encyclopédie mathématique. *Mittag Leffler.* Sur la représentation analytique des fonctions monogènes de plusieurs variables indépendantes. *E. Kötter.* Construction d'une quadrique donnée par neuf points. *Minkowski.* Sur les notions de longueur, de surface et de volume. *E. Jurgens.* Calcul numérique des déterminants. Autres notes par *Fricke, Steinitz, Fr. Meyer, Schoute, Wangerin, Stäckel, Wirtinger, von Mangoldt.*

5. *Second cahier du tome IX. K. Heun* : les problèmes cinétiques de la mécanique technologique scientifique. 1. La mécanique technologique comme branche de la mécanique générale. 2. Premiers essais pour fonder une mécanique technologique systématique : Poncelet. 3 et 5. Cinétique générale de la bielle. 4. Théorie des machines à vapeur de Radinger. 6. Stabilité du mouvement et problème des petites oscillations. 7. Cinétique des freins. 8 Choc et frottement. 9. Procédés auxiliaires analytiques et graphiques.

Les rapports contenus dans les seconds cahiers des tomes VIII et IX donnent à ces volumes une valeur permanente pour les professeurs d'analyse et de mécanique appliquée (*). (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1162.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 78).

Un bâton formé de deux branches rectilignes AC = *a*, CB = *b*, *comprenant un angle donné* ACB = γ, *est plongé dans l'eau à partir du point* C. *L'œil d'un observateur étant placé au point* A, *on demande le lieu des positions apparentes de l'extrémité* B *lorsque le bâton affleurant dans l'eau en* C, *tournera autour de* AC *comme axe.*

On connaît l'inclinaison i de AC, *et l'indice de réfraction n du milieu réfringent. Cas particuliers et vérifications.* (H. Brocard.)

Solution par M. Emmerich. Prenons pour l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires la projection O de A sur le niveau, et dirigeons les axes des x et des z suivant les droites OC, AO. Un rayon issu du point B(x, y, z) rencontre le niveau en D et par réfraction l'œil en A. En désignant par α l'angle OAD et par β l'angle EBD que la normale BE au niveau forme avec BD, on a

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \qquad (a)$$

Soient ξ, η les coordonnées du point D dont on cherche le lieu. Les points D et B étant contenus dans un plan passant par l'axe AO, on a

$$\xi : \eta = z : y,$$

(*) Extrait de la *Revue des questions scientifiques*, 1902, (3), I pp. 260-262. La première livraison du second cahier du *Jahresbericht* a paru récemment et contient un rapport intitulé : *Entwicklungen nach oscillirenden Functionen* (Séries de Fourier, etc.) von Dr. H. Burkhardt, Professor in Zurich, 1901 (176 p. in-8). A partir du tome XI, le Jahresbericht sera publié en cahiers mensuels : le premier a paru le 19 décembre 1901 (96 p. in-8).

ou

$$z = \xi\lambda, \quad y = \eta\lambda.$$

Les triangles AOD, BED donnent

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2} = a \sin i \operatorname{tg}\alpha; \quad (b) \qquad (\lambda-1)\sqrt{\xi^2+\eta^2} = z \operatorname{tg}\beta. \quad (c)$$

Éliminons les angles α, β entre (a), (b) et (c). Nous trouvons

$$z = (\lambda - 1)R; \tag{1}$$

$$R^2 = (n^2-1)(\xi^2+\eta^2) + a^2n^2\sin^2 i. \tag{2}$$

Pour éliminer λ et z, remarquons que le point B se trouve sur la sphère (C, b) et dans le plan mené perpendiculairement à AC par le point $(a - b\cos\gamma)\cos i$, 0, $-b\cos\gamma\sin i$. On a donc

$$(x - a\cos i)^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$

$$x\cos i + z\sin i = a\cos^2 i - b\cos\gamma;$$

ou bien

$$(\xi\lambda - a\cos i)^2 + \eta^2\lambda^2 + z^2 = b^2,$$

$$\xi\lambda\cos i + z\sin i = a\cos^2 i - b\cos\gamma.$$

En substituant la valeur (1) de z on obtient

$$(\xi\lambda - a\cos i)^2 + \eta^2\lambda^2 + R^2(\lambda-1)^2 = b^2; \tag{3}$$

$$\lambda(\xi\cos i + R\sin i) = R\sin i + a\cos^2 i - b\cos\gamma. \tag{4}$$

Si l'on porte alors dans l'équation (3) la valeur de λ tirée de (4), on trouve une équation de la forme $pR^2 + qR + s = 0$, où p, q, r sont des fonctions de ξ, η du second degré; celle-ci jointe à l'équation (2) et débarrassée du radical conduit à une équation du 8ième degré entre ξ et η.

Cas spéciaux. 1° $i = 90°$. Le bon sens dit que le lieu de D sera un cercle. En effet, si nous posons $\xi^2+\eta^2 = \rho^2$, les équations (3) et (4) donnent par l'élimination de λ :

$$\rho(R - b\cos\gamma) = Rb\sin\gamma,$$

ce qui combiné avec l'équation

$$R^2 = (n^2-1)\rho^2 + a^2n^2$$

donne l'équation du 4ème degré

$$f(\rho) \equiv \{\rho^2(n^2-1) + a^2n^2\}\{(\rho - b\sin\gamma)^2(n^2-1) - b^2\cos^2\gamma\} + a^2b^2n^2\cos^2\gamma = 0.$$

Comme

$$f(0) = a^2b^2n^2\sin^2\gamma(n^2-1), \quad f(b\sin\gamma) = -b^4\sin^2\gamma\cos^2\gamma(n^2-1),$$

on trouve une solution $\rho = const.$ répondant aux conditions $0 < \rho < b\sin\gamma$.

Une vérification s'offre on supposant que le second milieu soit l'air, c'est-à-dire $n = 1$; on trouve $\rho(a - b\cos\gamma) = ab\sin\gamma$. Or, l'aire $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ du triangle ABC est divisée par la perpendiculaire $CD = \rho$ sur CA en $\frac{1}{2}\rho a$ et $\frac{1}{2}\rho b\sin(\gamma - 90^\circ) = -\frac{1}{2}\rho b\cos\gamma$.

2° Si $a\cos i = b\cos(\gamma - i)$, la courbe doit passer par l'origine. Ce fait est d'accord avec nos résultats. Car, dans l'équation $pR^2 + qR + s = 0$, q et s ne contiennent pas de terme constant, p contient le terme constant $(a\cos^2 i - b\cos\gamma)^2 + \sin^2 i\,(a^2\cos^2 i - b^2)$. Or, si $a\cos i = b\cos(\gamma - i)$, on a

$$(a\cos^2 i - b\cos\gamma)^2 = b^2\{\cos i\cos(\gamma - i) - \cos\gamma\}^2 =$$
$$b^2\sin^2 i\sin^2(\gamma - i) = \sin^2 i\,(b^2 - a^2\cos^2 i)\,;$$ donc etc.

×Question 1303.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 40).

Soient représentées par $[x]$, $[y]$, $[z]$ *les projections sur une direction* Δ *des distances d'un point* M (x, y, z) *aux trois côtés d'un triangle* ABC. *Si* M *est le point* $\sqrt{a\cos A}$, $\sqrt{b\cos B}$, $\sqrt{c\cos C}$, *ou l'un de ses associés, la somme* $[x]^2 + [y]^2 + [z]^2$ *est constante quelle que soit la direction* Δ.

(E. Lemoine.)

Solution par M. Emmerich. En comptant convenablement l'angle φ des directions BC et Δ on a

$$S \equiv [x]^2 + [y]^2 + [z]^2 = x^2\sin^2\varphi + y^2\sin^2(C + \varphi) + z^2\sin^2(B - \varphi);$$
$$2S = x^2 + y^2 + z^2 - [x^2\cos 2\varphi + y^2\cos(2C + 2\varphi) + z^2\cos(2B - 2\varphi)]$$

La somme entre crochets revient à

$$(x^2 + y^2\cos 2C + z^2\cos 2B)\cos 2\varphi + (z^2\sin 2B - y^2\sin 2C)\sin 2\varphi.$$

Pour qu'elle soit indépendante de φ, on doit avoir

$$x^2 + y^2\cos 2C + z^2\cos 2B = 0, \quad -y^2\sin 2C + z^2\sin 2B = 0;$$

d'où l'on tire

$$x^2 : y^2 : z^2 = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C = a\cos A : b\cos B : c\cos C.$$

Les coordonnées normales absolues du point cherché sont $\lambda\sqrt{a\cos A}$, $\lambda\sqrt{b\cos B}$, $\lambda\sqrt{c\cos C}$, où

$$\lambda = \frac{2\sqrt{R\sin A\sin B\sin C}}{\sin A\sqrt{\sin 2A} + \sin B\sqrt{\sin 2B} + \sin C\sqrt{\sin 2C}},$$

et la somme constante est

$$S = \frac{8R^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\Sigma^2 \sin A \sqrt{\sin 2A}}.$$

Si $A = 90^\circ$, ce point et ses associés se confondent avec les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle droit; de là, le théorème facile à vérifier : La somme des carrés des projections des côtés d'un carré sur une direction quelconque de son plan est constante.

MM. Boutin, Soons, Pirr et François (La Haye) ont *vérifié* la proposition de M Lemoine. Nous résumons ci-après la solution de M. Déprez, en adoptant les notations de M. Emmerich.

Généralisation par M. Déprez. A_1, B_1, C_1 étant des constantes données, considérons la somme

$$S = A_1 [x]^2 + B_1 [y]^2 + C_1 [z]^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(A_1 x^2 + \tfrac{1}{2} B_1 y^2 + \tfrac{1}{2} C_1 z^2) - \tfrac{1}{2} S',$$

S' désignant l'expression

$$(A_1 x^2 + B_1 y^2 \cos 2C + C_1 z^2 \cos 2B) \cos 2\varphi$$
$$+ (C_1 z^2 \sin 2B - B_1 y^2 \sin 2C) \sin 2\varphi.$$

Pour que la somme S soit indépendante de φ, les deux dernières parenthèses doivent être nulles, ce qui donne

$$x : y : z = \sqrt{\frac{\sin 2A}{A_1}} : \sqrt{\frac{\sin 2B}{B_1}} : \sqrt{\frac{\sin 2C}{C_1}}.$$

Des cas particuliers remarquables correspondent aux hypothèses :

$$A_1 : B_1 : C_1 = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$$

ou

$$= \operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C \quad \text{ou} \quad = \cot A : \cot B : \cot C.$$

***Question 1309.**

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 64.)

Construire un triangle ABC, *connaissant les côtés indéfinis* AB, AC *et le centre* O_9 *du cercle des neuf points.*

Solution par MM. Emmerich, Droz Farny et Gob. Menons O_9P, O_9Q perpendiculaires sur AB, AC, et soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés du triangle cherché. O_9P étant la médiatrice de A_1B_1, le point A_1

se trouve sur la droite symétrique de la direction AC par rapport à O_2P. De même A_1 appartient à la symétrique de AB par rapport à O_2Q. Les parallèles par A_1 aux directions AB, AC donnent B_1 et C_1.

Remarque. Si $A = 60°$, O_2 doit être situé sur la bissectrice de l'angle A ; car du quadrilatère inscriptible $AB_1O_2C_1$ on conclut que $O_2AB_1 = O_2CB_1 = 30°$.

Les droites P'P'', Q'Q'', symétriques de AC et de AB par rapport à O_2P, O_2Q respectivement se confondent alors et l'on peut prendre pour A_1 un point quelconque de $P'P'' \equiv Q''Q'$.

Autres solutions, moins simples, par MM. Barisien et François (La Haye).

Solution par M. Déprez. Si A_1, B_1, C_1 sont les milieux des côtés du triangle ABC, le triangle $O_2B_1C_1$ est *d'espèce connue;* car il est isoscèle et l'angle en $O_2 = 2A$. On pourra construire le lieu du sommet B_1 d'un tel triangle dont le sommet O_2 reste fixe et dont le sommet C_1 parcourt la droite AB ; ce lieu est une droite, qui coupera AC au milieu du côté AC du triangle cherché, etc.

Remarque. Si, avec les côtés indéfinis AB, AC, on donne un centre isodynamique U, on projette U et B_1 et C_1 sur AC, AB, on construit le triangle équilatéral $B_1C_1A_1$; le côté BC sera perpendiculaire à la droite UA_1 en A_1.

Question 1317.

(Voir *Mathesis*, (3) I, p. 119 et 235.)

On donne un point fixe A, *un cercle fixe* C *de rayon a, un cercle mobile* C' *de rayon b roulant sur le premier. Soit* DE *le diamètre de* C' *passant par le centre* C. *On mène* AD, AE, *qui rencontrent le cercle* C' *en* M, M'. *Trouver les lieux des points* M, M'. *Cas où le point* A *est rejeté à l'infini.*

(H. Brocard.)

Solution par M. Jeřábek, *directeur de l'école réale supérieure de Brunn et par* M. Déprez. Si A est à distance finie, les points M. M' décrivent des podaires de conique.

En effet, soit E le point de contact des cercles C. C'. La droite ME rencontrant la circonférence C en F. menons par E et F des parallèles à AMD, qui rencontrent le diamètre AC en *e* et *f*; ces droites seront

perpendiculaires à MEF. Les points e et f sont fixes ; car la perpendiculaire au milieu I de EF passe par C, de sorte que l'on a

$$Ae : eC = ME : EI = b : \frac{1}{2}a.$$

Il résulte de là que la droite MEF enveloppe une conique de foyers e, f, d'axe focal $2a$ et de second axe $2b$.

Le point M′ décrit la podaire de A par rapport à une seconde conique. En effet, si l'on mène par D une parallèle Dd à AEM′, qui rencontre AC en d, le point d est fixe, car $dA : AC = DE : EC$. Le point D décrivant une circonférence (C, $a + 2b$), la droite DM′ enveloppe une conique. L'angle DM′E étant droit, le lieu de M′ est la podaire de A par rapport à cette seconde conique.

Si les droites DM, EM′ sont perpendiculaires à un diamètre fixe CX du cercle C, on voit facilement que les points M, M′ divisent dans un rapport constant les coordonnées des points D, E relatives à CX ; mais les points D, E se meuvent sur des circonférences, donc etc.

Solutions analytiques par MM. Soons et Pirr.

Question 1333.

(Voir *Mathesis* (3), t. I, p. 152.)

Étant donnés un cercle O *et une droite* Δ, *on décrit un cercle tangent à* Δ *et ayant son centre en un point quelconque* M *de la circonférence* O. *Le lieu des centres de similitude de ces deux cercles se compose de deux coniques.* (E. N. Barisien.)

Solution par M. Rius y Casas. Prenons l'origine en O, et l'axe Ox perpendiculaire à Δ ; et soient (α, β) les coordonnées du point M ; $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, l'équation de la circonférence O, et $x' = a$, celle de la droite Δ.

Les centres de similitude dont il s'agit sont aux intersections de la ligne des centres des deux circonférences, $\frac{y}{\beta} = \frac{x}{\alpha}$, et des droites qui joignent le point (a, β) de contact de Δ avec la deuxième circonférence, aux intersections $(\mp r, 0)$ de la première avec Ox, savoir, $\frac{y}{\beta} = \frac{x \pm r}{a \pm r}$. Il

suffira donc d'éliminer α, β entre l'équation de la circonférence O, et ces deux dernières, savoir,

$$\beta = y\frac{a \pm r}{x \pm r}, \quad \alpha = x\frac{a \pm r}{x \pm r},$$

pour avoir le lieu demandé

$$(x^2 + y^2)(a \pm r)^2 = r^2(x \pm r)^2,$$

qui se compose bien de deux coniques.

Solution analogue par MM. Emmerich, Rose, Andrien et Lez.

Solution par MM. E. Pire et Van Cauwenberghe. Appelons d la distance du point O à la droite Δ, r le rayon du cercle fixe et r' le rayon variable du cercle M. Les centres de similitude des deux cercles O et H se trouvent à l'intersection de la ligne OH avec les droites qui joignent les extrémités de deux rayons parallèles; on a donc, par la comparaison de deux triangles semblables,

$$OS = \frac{r^2}{r \pm r'}$$

le signe + correspond à un centre de similitude inverse, le signe — à un centre de similitude directe, et quand r' est $> r$ on devra affecter OS du signe —, si S désigne un centre de similitude directe.

Prenons le point O pour pôle et la perpendiculaire OX à Δ pour axe polaire, posons $OS = \rho$ et $XOS = \omega$, et nous obtenons immédiatement

$$r' = d - r\cos\omega$$

et, pour équation du lieu,

$$\rho = \frac{r^2}{r \pm (d - r\cos\omega)}.$$

On a donc les deux équations

$$\rho = \frac{\dfrac{r^2}{r+d}}{1 - \dfrac{r}{r+d}\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\dfrac{r^2}{d-r}}{1 - \dfrac{r}{d-r}\cos\omega}.$$

Elles représentent des coniques qui ont pour foyer le point O et l'axe polaire pour axe focal.

La première équation représente toujours une ellipse; la seconde représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que d est supérieur, inférieur ou égal à $2r$.

Solution par M. J. Déprez. Soient A le point de contact de la tan-

gente à (O), parallèle à Δ ; B le point de contact de Δ avec (M) ; S le centre de similitude externe des cercles (O), (M) ; C, D les points où la perpendiculaire abaissée de S sur Δ, coupe la tangente en A à (O) et Δ, r le rayon du cercle (O), a la distance de O à Δ.

OA, MB étant deux rayons parallèles des cercles (O), (M), la droite AB passe par S. On a donc

$$\frac{AS}{AB}=\frac{OS}{OM},\quad \frac{AS}{AB}=\frac{CS}{CD},$$

d'où

$$\frac{OS}{OM}=\frac{CS}{CD}\quad\text{et}\quad \frac{OS}{CS}=\frac{r}{a-r},$$

en supposant Δ extérieure à (O).

Donc S décrit une conique ayant O pour foyer, la tangente à (O) en A pour directrice, l'excentricité de la conique est $\frac{r}{a-r}$.

Si S_1 est le centre de similitude interne de (O), (M) ; A_1 le point diamétralement opposé à A sur (O) ; C_1 la projection de S_1 sur la tangente à (O) au point A_1 on a $OS_1 : S_1C_1 = r : a+r$. Par conséquent, S_1 décrit une conique ayant O pour foyer, la tangente en A à (O) pour directrice, l'excentricité de la conique est $\frac{r}{a+r}$.

Remarques. I. Les points N, P où OM coupe le cercle (r) décrivent des limaçons de Pascal.

Soient E, E_1 les projections de A, A_1 sur OM ; on prouve facilement que $NE = a-r$, $E_1P = a+r$ (N est situé entre O et M).

II. La question peut être étendue à la sphère.

×Question 1895.

(Voir *Mathesis*, (3), I. p. 152.)

Soient E, F *les points d'intersection des côtés opposés* AB *et* CD, AD *et* BC *d'un quadrilatère* ABCD *inscrit à un cercle de centre* O *et de rayon* R. *Démontrer la relation*

$$OE.OF\cos EOF = R^2. \qquad (1)$$

Solution par M. Emmerich. La polaire de E passant par F et étant perpendiculaire à OE donne par son intersection avec OE le réciproque

E′ de E par rapport au cercle. Or $OE.OE' = R^2$, $OE' = OF\cos EOF$; donc $OE.OF\cos EOF = R^2$.

Autres solutions par MM. Cl. Thiry, François, Lez, Drox-Farny et Plakhovo.

M. Thiry déduit la relation (1) de l'égalité connue (Voir par exemple, *Applications remarquables du théorème de Stewart*, par Cl. Thiry, p. 52) :

$$\overline{EF}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OF}^2 - 2R^2. \qquad (2)$$

Inversement, M. Barisien conclut la relation (2) ou l'égalité (1).

Question 1336.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 216.)

Soit S *le sommet d'un cône de révolution passant par une ellipse donnée* E. *Soient* A, B, C, D *quatre sommets consécutifs quelconques d'un polygone inscrit dans* E *et dont les côtés sont vus, de* S, *sous des angles égaux.*

Démontrer que l'on a

$$\frac{\lambda}{SA} + \frac{1}{SC} = \frac{1}{SB} + \frac{\lambda}{SD}$$

λ *étant un paramètre invariable, pour un polygone donné, et vérifier la proposition, en prenant le point* S *au foyer de* E. (G. de Longchamps.)

Solution par M. J. Déprez. Soient A_1, B_1, C_1, D_1 les points où SA, SB, SC, SD percent le cercle de base du cône, I le point de rencontre de AD, BC.

Les cordes A_1D_1, B_1C_1 sont parallèles, car les angles A_1SB_1, C_1SD_1 sont égaux; donc l'intersection SI des plans ASD, BSC est parallèle à A_1D_1 et à B_1C_1 et la droite SI est la bissectrice extérieure des angles ASD, BSC. On a

$$\frac{1}{SC} - \frac{1}{SB} = \frac{2\sin\frac{1}{2}BSC}{SI}, \quad \frac{1}{SD} - \frac{1}{SA} = \frac{2\sin\frac{1}{2}ASD}{SI}.$$

D'où

$$\left[\frac{1}{SC} - \frac{1}{SB}\right] : \left[\frac{1}{SD} - \frac{1}{SA}\right] = \frac{\sin\frac{1}{2}BSC}{\sin\frac{1}{2}ASD} = \lambda, \qquad (1)$$

ou

$$\frac{\lambda}{SA} + \frac{1}{SC} = \frac{1}{SB} + \frac{\lambda}{SD}.$$

S étant le foyer de gauche de (E), n le nombre de côtés du polygone on a

$$\frac{1}{SA}=\frac{1-e\cos\omega}{p},\quad \frac{1}{SB}=\frac{1-e\cos\left[\omega+\frac{2\pi}{n}\right]}{p},$$

$$\frac{1}{SC}=\frac{1-e\cos\left[\omega+\frac{4\pi}{n}\right]}{p},\quad \frac{1}{SD}=\frac{1-e\cos\left[\omega+\frac{6\pi}{n}\right]}{p}$$

puis

$$\frac{1}{SC}-\frac{1}{SB}=\frac{2e\sin\frac{\pi}{n}\sin\left[\omega+\frac{3\pi}{n}\right]}{p}$$

$$\frac{1}{SD}-\frac{1}{SA}=\frac{2e\sin\frac{3\pi}{n}\sin\left[\omega+\frac{3\pi}{n}\right]}{p}.$$

Donc enfin

$$\left[\frac{1}{SC}-\frac{1}{SB}\right]:\left[\frac{1}{SD}-\frac{1}{SA}\right]=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{3\pi}{n}}=\frac{\sin BSC}{\sin ASD}=\lambda.$$

Cette relation est identique à la relation (1).

Solution par M. Emmerich. En désignant par A', B', C', D' les points de rencontre des arêtes SA, SB, SC, SD avec la base circulaire du cône, et adoptant des notations analogues à celles de ma généralisation de la question 1333 (*Mathesis*, (3), II, p. 26), on peut écrire

$$\frac{a'}{a}\cdot\frac{M'C'}{A'C'}+\frac{c'}{c}\cdot\frac{A'M'}{A'C'}=\frac{b'}{b}\cdot\frac{M'D'}{A'D'}+\frac{d'}{d}\cdot\frac{B'M'}{B'D'};$$

or, $a'=b'=c'=d'$, $A'C'=B'D'$, $M'C'=M'B'$; donc la relation précédente peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right)\frac{M'C'}{A'M'}=\frac{b'}{b}-\frac{c'}{c},$$

ce qui est la formule proposée si l'on pose

$$\lambda=\frac{M'C'}{A'M'}=\frac{B'C'}{A'D'}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}},$$

α désignant ASB.

M. Emmerich a également résolu la seconde partie de la question en se servant de l'équation polaire de l'ellipse.

Autre solution par MM. Van Cauwenberghe et Droz-Farny.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1038. (Voir (3) I, p. 64). Construire un triangle ABC, connaissant la bissectrice AD de l'angle BAC, l'angle ADB, et la base BC.

Soit AD' la bissectrice extérieure; on pourra construire le triangle ADD'. Si M est le milieu de BD, la division harmonique (BCDD') donne $MB^2 = MD.MD'$. Donc, si l'on mène en un point quelconque N de la circonférence DAD' une tangente NN' égale à $\frac{1}{2}$ BC, la distance du milieu M' de DD' (centre de la circonférence DAD') au point N' sera égale à M'M. Le problème s'achève facilement.

(SOONS.)

1039. Soient x', x'' les racines de l'équation $x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$, où λ désigne une quantité connue.

1° Former l'équation du second degré en y, et à coefficients rationnels en λ et μ, dont les racines sont les quantités

$$x' + \frac{\mu}{x''}, \qquad x'' + \frac{\mu}{x'},$$

où μ désigne une quantité connue.

2° Former la relation entre λ et μ qui exprime qu'une racine de l'équation en x est égale à une racine de l'équation en y; calculer dans ce cas les racines des deux équations, et former la relation indépendante de λ et de μ à laquelle satisfont les racines inégales des deux équations.

3° Déterminer les valeurs de λ et de μ pour lesquelles une racine, et une seule, de l'équation en y, est comprise entre les racines de l'équation en y. (*École navale*, 1901).

1040. Vérifier l'identité

$$(a^2+b^2+c^2)(a'a''+b'b''+c'c'') - (aa'+bb'+cc')(aa''+bb''+cc'') = (ab'-a'b)(ab''-a''b) + (bc'-b'c)(bc''-b''c) + (ca'-c'a)(ca''-c''a).$$

La multiplication des systèmes rectangulaires

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix} \right\|$$

conduit immédiatement à cette identité et montre comment on peut la généraliser.

1041. Si $a + 2b + 3c = 7m$,

on a $a^2 + b^2 + c^2 = (m-a)^2 + (2m-b)^2 + (3m-c)^2$.

Si $2a + 3b + 3c = 11m$,

on a $a^2 + b^2 + c^2 = (2m-a)^2 + (3m-b)^2 + (3m-c)^2$.

Si $a + b + c + d = 2m$,

on a

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2.$$

Si $$a+b+c+d+e=5m,$$

on a $$\Sigma a^2=\Sigma(2m-a)^2.$$ (EULER.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1857. Une droite AB, de longueur constante, se meut entre deux droites fixes Ox, Oy. Le lieu des sommets des ellipses décrites par les différents points de la droite AB est une sextique, et le lieu des foyers de ces courbes est une hyperbole. (DE LA GOURNERIE).

***1858.** Deux cercles A, B se coupent au point C. Un diamètre quelconque du premier coupe le second aux points D, E; les droites CD, CE rencontrent le premier cercle aux points D', E'. Démontrer que la droite D'E' fait un angle constant avec la droite DE et passe par un point fixe.

***1859.** Trouver les valeurs de k et de l les plus rapprochées telles que l'on ait

$$1-kx\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+x}}\leqslant 1-lx,$$

1° Quand x varie de 0 à $\frac{1}{2}$; 2° quand x varie de 0 à $-\frac{1}{2}$.

1860. Un point A décrit une courbe C passant par l'origine de deux axes rectangulaires; on voit facilement que la droite qui joint les projections M et N du point A sur les axes contient le point B dont les coordonnées sont l'abcisse et l'ordonnée moyennes de la courbe C comptée depuis l'origine jusqu'en A. Déterminer 1° l'équation de la courbe C pour laquelle la droite AB est perpendiculaire à MN pour toutes les positions de A sur cette courbe; 2° l'équation de la courbe C pour laquelle le point B décrit la parabole représentée par $y^2=2px$.

(L. COLLETTE).

Rectifications.

I. M. Emmerich nous signale les rectifications suivantes :

La solution de la question 1179 [(2) IX, p. 101) porte erronément le n° 1177. Les solutions des questions 1072 et 1123 n'ont pas encore été publiées. La question 1057 a été résolue (2), VIII, p. 279, et la question 1087, (2), IX, p. 259. La question 1304 porte par erreur la mention NR [(3) I, p. 285).

II. P 22, l. 12, lire HBC; l. 9 en remontant, lire : On a

$$LB\cdot L_1B_1=LC\cdot L_1C_1=LD\cdot L_1E_1=LE\cdot L_1D_1=\tfrac{1}{2}\overline{LA}^2;$$

P. 25, l. 19, lire $y=-0{,}445^x$. P. 26, l. 4, 7, 8, lire BQ au lieu de DQ, DP au lieu de OP; ligne 8 en remontant, lire : 2A'C'M : A'C'S. P. 27, ligne 4, lire : AA'C'.

SUR LA THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

1. *Préliminaires.* Lorsque l'on démontre d'une manière purement arithmétique le théorème fondamental de l'analyse algébrique, de manière à le réduire à une identité entre nombres entiers, une partie de la théorie des équations se déduit presque aussi facilement de cette identité que des théorèmes moins précis ou moins généraux qu'elle remplace. Mais il n'en est pas de même pour une autre partie de l'analyse algébrique; en particulier, l'ancienne théorie des racines égales doit être modifiée complètement.

Dans cette note, nous nous proposons d'indiquer comment cette modification doit être faite. Nous y établissons le principe fondamental de cette théorie, sans supposer le premier membre d'une équation algébrique décomposé en facteurs du premier degré.

Nous représentons le premier membre d'une équation algébrique à coefficients entiers

$$az^n + bz^{n-1} + \cdots + kz + l = 0,$$

par Fz; la dérivée de Fz, par $F'z$.

Nous supposons connues du lecteur la théorie du plus grand commun diviseur des polynômes analogues à Fz et les règles de dérivation d'un produit et d'une puissance entière positive.

2. Théorème I. *Si* $Fz = az^2 + bz + c$ *et* $F'z = 2az + b$ *ont un diviseur commun en* z, Fz *est un carré parfait à un facteur numérique près et réciproquement.* En effet, on a

$$4a\,(az^2 + bz + c) = (2az + b)^2 + (ac - b^2).$$

Le diviseur commun en z de $az^2 + bz + c$ et de $2az + b$, doit diviser le reste; par suite, celui-ci est nul, et $az^2 + bz + c$ multiplié par le facteur numérique $4a$ est le carré de $2az + b$.

Réciproquement, si l'on a

$$k\,(az^2 + bz + c) = (lz + m)^2$$

la dérivée de $az^2 + bz + c$, multipliée par k, est $2l\,(lz + m)$ et $lz + m$ est évidemment un diviseur de $(lz + m)^2$ ou de $k\,(az^2 + bz + c)$.

3. Théorème II. *Si un polynôme entier* Fz *et sa dérivée* $F'z$ *ont un diviseur commun en* z, Fz *contient des facteurs premiers à une puissance supérieure à la première.*

*QUELQUES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES DE FIBONACCI,

par M. J. Wastels, professeur à l'Athénée de Gand.

I. La série des nombres de Fibonacci est la suivante :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots\ldots ;$$

chaque terme, à partir du 3e, vaut la somme des deux précédents.

Ed. Lucas (NCM) montre, dans un premier article, qu'on peut déduire ces nombres du triangle arithmétique de Pascal; dans une série d'autres articles, par la considération de certaines fonctions des racines d'une équation du 2d degré, il établit un grand nombre de propriétés de séries récurrentes et, comme cas particulier, des nombres de Fibonacci; il montre, entre autres, les relations des termes de ces séries avec les fractions continues et arrive, par ce moyen, à quelques égalités.

Je me propose d'établir deux propriétés des nombres de Fibonacci *par une méthode plus directe* : ces deux propriétés (II et IV) sont contenues dans deux formules trouvées par Ed. Lucas; mais les réciproques, que je démontre également, n'ont pas été données par Ed. Lucas.

II. *Si x et y sont deux termes consécutifs de la série des nombres de Fibonacci, on a une des relations suivantes* ($y \geqq x$) :

$$y^2 - xy - x^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$y^2 - xy - x^2 - 1 = 0. \qquad (2)$$

Démonstration : Prouvons d'abord que x, y et z étant trois termes consécutifs, si x et y vérifient l'une des deux relations, y et z vérifient l'autre. Remarquons, pour cela, que $z = x + y$. Donc,

$$z^2 - yz - y^2 = (x+y)^2 - y(x+y) - y^2 = x^2 + xy - y^2 = \pm 1,$$

suivant que x et y vérifient la 1re relation ou la 2e. Dans le premier cas, y et z vérifient la relation (2); dans le deuxième cas, la relation (1).

Or, les deux premiers nombres de Fibonacci vérifient la 2e relation ; donc, le 2e et le 3e vérifient la 1re, le 3e et le 4e la 2e, etc.

III. *Réciproquement, deux nombres entiers et positifs, x et y, qui vérifient une des relations* (1) *et* (2) *sont deux termes consécutifs de la série des nombres de Fibonacci.*

Démonstration. 1e Si $x = 0$, on a $y = 1$; [l'égalité (1) est impossible].

2e Si $x = 1$, on a : $y = 1$ ou 2; (on doit avoir $y \geqq x$).

Dans ces deux cas, le théorème est démontré.

3° Si $x > 1$, on trouve, en résolvant les équations (1) et (2) par rapport à y, que

$$y > x \quad \text{et} \quad y < 2x;$$

de sorte que

$$\frac{y}{2} < x < y.$$

Posons

$$y - x = z$$

Alors,

$$0 < z < \frac{y}{2} < x,$$

et

$$(x+z)^2 - x(x+z) - x^2 \pm 1 = 0$$

ou

$$x^2 - xz - z^2 \mp 1 = 0.$$

Les nombres entiers z et x satisfont donc encore à l'une des relations (1) et (2), et le plus petit d'entre eux est moindre que le plus petit des nombres x et y considérés d'abord.

Si $z = 1$, le théorème est démontré pour z et x et dès lors, il le sera pour x et $x + z$ ou y.

Si $z > 1$, on verra, comme précédemment, qu'il existe deux nombres entiers $z_1 = x - z$ et z qui vérifient l'une des relations (1) et (2), et dont le plus petit, z_1, est moindre que z et plus grand que zéro.

Supposons encore $z_1 > 1$. De z_1 et z, on passera à $z_2 = z - z_1$ et z_1, de là, s'il y a lieu, à $z_3 = z_1 - z_2$ et z_2, etc.

Il arrivera un moment où le plus petit nombre d'un système sera 1, sans quoi on trouverait une infinité de nombres entiers tous différents, moindres que x et plus grands que 1.

Soit $z_n = 1$; alors, le théorème est vrai pour z_n et z_{n-1}; il l'est donc aussi pour z_{n-1} et $z_{n-2} + z_{n-1}$ ou z_{n-2}, puis pour z_{n-2} et $z_{n-3} + z_{n-2}$ ou z_{n-3}, pour z et x, finalement pour x et y.

IV. *Si x est un nombre de Fibonacci, $5x^2 + 4$ ou $5x^2 - 4$ est un carré.*

Démonstration. Si y est le nombre qui suit x, on a (II) :

$$y^2 - xy - x^2 \pm 1 = 0$$

d'où

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5x^2 \mp 4};$$

$5x^2 \mp 4$ doit donc être un carré.

V. *Réciproquement, tout nombre entier x pour lequel $5x^2+4$ ou $5x^2-4$ est un carré appartient à la série de Fibonacci.*

Démonstration. Soit d'abord $5x^2+4$ un carré; posons :

$$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5x^2+4}.$$

Alors, y est rationnel et il est facile de voir que, de plus, y est entier.

De l'égalité précédente, on tire :

$$y^2-xy-x^2-1=0.$$

Donc, (III) x est un nombre de Fibonacci.

Raisonnement analogue, si $5x^2-4$ est un carré.

NOTES MATHÉMATIQUES.

7. *Exemples de tangentes hyperboliques.* I. Soit un quadrangle inscriptible ABCD; si l'on pose

$$BC=a,\quad CA=b,\quad AB=c,$$
$$DA=a',\quad DB=-b',\quad DC=c',$$

on a

$$abc+ab'c'+bc'a'+ca'b'=0.$$

Si l'on divise, par exemple, par le produit $a'b'c'$, qui est relatif au sommet D, on a

$$\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}+\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}=0;$$

on peut donc regarder $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$ comme les tangentes hyperboliques de trois arguments dans la somme est nulle. On aurait trois autres énoncés en se réglant sur A, B, C.

II. Si l'on désigne par I le centre du cercle inscrit à un triangle ABC, les six quantités

$$p=\frac{BI-CI}{a},\quad q=\frac{CI-AI}{b},\quad r=\frac{AI-BI}{c},$$
$$p'=\frac{BI+CI}{a},\quad q'=\frac{CI+AI}{b},\quad r'=\frac{AI+BI}{c},$$

sont les tangentes hyperboliques des six segments $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, $\partial\alpha$, $\partial\beta$, $\partial\gamma$ relatifs à quatre points pris convenablement sur un axe. On peut, en effet, le point ∂ étant choisi, définir trois points α, β, γ par les condi-

tions relatives aux segments $\partial\alpha$, $\partial\beta$, $\partial\gamma$, et la condition relative au segment $\beta\gamma$ par exemple équivaut à la relation

$$p = \frac{r' - q'}{1 - q'r'},$$

ou

$$p + q' + (-r') + pq'(-r') = 0.$$

J'ai donné cette formule dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires* (février 1901, question 894). On a encore

$$p + q + r + pqr = 0,$$

ce qui constitue une vérification.

On sait que les numérateurs des rapports ci-dessus sont les segments déterminés sur les côtés du triangle ABC par les points de contact des cercles tangents aux trois côtés des divers triangles IBC, ICA, IAB, en associant chaque fois deux cercles qui ont leurs centres sur une même bissectrice en I.

Pour le cercle ex-inscrit dans l'angle A, il faut changer a en $-a$ dans les rapports considérés. (G. Fontené.)

8. *Sur le théorème de Böklen* (*Mathesis* (2). III, p. 17). Cette proposition est un cas particulier de la suivante : *Lorsqu'une ligne cycloïdale roule sur une droite, le centre de la circonférence directrice décrit une conique.* Celle-ci est, respectivement une parabole ou une hyperbole équilatère lorsque la ligne considérée est une *développante de cercle* ou une *pseudocycloïde.*

Ce théorème est démontré dans notre *Geometria intrinseca* (p. 68, ou bien p. 85 de l'édition allemande). (E. Cesàro).

9. *Note sur la question* 1312 (*Mathesis*, (3), I, p. 234). Il s'agit de trouver le lieu des secondes extrémités des normales menées en A aux coniques qui passent par quatre points donnés A, B, C, D.

On peut résoudre le problème par la géométrie de la façon suivante.

Le faisceau des normales de sommet A est projectif au faisceau des tangentes en A et, par conséquent, projectif au faisceau des coniques. Par suite, le lieu cherché est une cubique passant par A, B, C, D. On voit de plus que le point A est un point double. La cubique passe également par les points de rencontre des perpendiculaires en A à AB, AD, AC avec les droites CD, BC, BD. Ces points correspondent en effet aux coniques dégénérées du faisceau. (J. Rose.)

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE.(*)

par M. J. Dépaez, professeur à l'Athénée de Bruxelles.

Sur les côtés BC, CA, AB du triangle acutangle ABC comme diamètres on décrit trois circonférences α, β, γ. Désignons par ρ, ρ' les rayons des deux cercles qui touchent, le premier intérieurement, le second extérieurement, les trois cercles α, β, γ; par ρ_1 le rayon du cercle qui touche α extérieurement, β et γ intérieurement; par ρ_1' le rayon du cercle qui touche α intérieurement, β et γ extérieurement, etc. Enfin représentons par $D, D_1', D_1, D_1', D_2, D_2', D_3, D_3'$ les centres de ces cercles.

Soient r, r_1, r_2, r_3 les rayons des cercles tritangents, p le demi périmètre du triangle ABC, et p_1, p_2, p_3 les quantités $p-a$, $p-b$, $p-c$.

1. Calculons d'abord les rayons ρ, ρ'(**).

Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés du triangle ABC; $2\lambda, 2\lambda', 2\lambda''$ les angles B_1DC_1, C_1DA_1, A_1DB_1. Le triangle B_1DC_1, dont les côtés sont égaux à

$$\frac{1}{2}a, \quad \frac{1}{2}b-\rho, \quad \frac{1}{2}c-\rho, \quad \text{donne } \sin^2\lambda = \frac{p_2 \cdot p_3}{(2\rho-b)(2\rho-c)}.$$

Si l'on observe que

$$2\rho - b = 2\rho - p + p - b = x + p_2, \qquad 2\rho - c = x + p_3,$$

x désignant $2\rho - p$, on a

$$\sin^2\lambda = \frac{p_2 p_3}{(x+p_2)(x+p_3)},$$

et des valeurs analogues pour $\sin^2\lambda'$ et $\sin^2\lambda''$.

Mais si D est intérieur au triangle $A_1B_1C_1$, on a :

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = \pi,$$

d'où

$$\sin\lambda = \sin\lambda'\sqrt{1-\sin^2\lambda''} + \sin\lambda''\sqrt{1-\sin^2\lambda'},$$

et sous forme rationnelle,

$$\Sigma \sin^4\lambda - 2\Sigma \sin^2\lambda' \sin^2\lambda'' + 4\sin^2\lambda \sin^2\lambda' \sin^2\lambda'' = 0.$$

(*) Voir *Mathesis*, (3), I, p. 117.

(**) Pour la recherche du rayon ρ, nous reproduisons les calculs qui nous ont été transmis par M. Neuberg. La solution de M. Neuberg est beaucoup plus simple que la nôtre.

Cette égalité subsiste encore lorsque D est extérieur au triangle $A_1B_1C_1$.

Nous pouvons maintenant éliminer les angles λ, λ', λ''; il vient

$$\Sigma\frac{p_2^2p_3^2}{(x+p_2)^2(x+p_3)^2}-\frac{2p_1p_2p_3}{(x+p_1)(x+p_2)(x+p_3)}\Sigma\frac{p_1}{x+p_1}+\frac{4p_1^2p_2^2p_3^2}{(x+p_1)^2(x+p_2)^2x+p_3)^2}=0.$$

Si l'on chasse les dénominateurs et qu'on divise l'équation par $p_1^2p_2^2p_3^2$ on obtient

$$\Sigma\left(\frac{x+p_1}{p_1}\right)^2-2\Sigma\left(\frac{x+p_2}{p_2}\right)\left(\frac{x+p_3}{p_3}\right)+4=0.$$

Divisons tous les termes par x^2, il viendra

$$\Sigma\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{p_1}\right)^2-2\Sigma\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{p_2}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{p_3}\right)+\frac{4}{x^2}=0,$$

et, en ordonnant par rapport à $\frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\Sigma\frac{1}{p_1}+\Sigma\frac{1}{p_1^2}-2\Sigma\frac{1}{p_2p_3}=0,$$

d'où enfin,

$$\left(\frac{1}{x}-\Sigma\frac{1}{p_1}\right)^2=4\Sigma\frac{1}{p_2p_3}=\frac{4p}{p_1p_2p_3}=\frac{4}{r^2},$$

et

$$\frac{1}{x}=\Sigma\frac{1}{p_1}\pm\frac{2}{r}.$$

Si l'on calcule le rayon du cercle (D', ρ') et si x représente $2\rho'-p$, on a encore

$$\frac{1}{x}=\Sigma\frac{1}{p_1}\pm\frac{2}{r},$$

d'où

$$\frac{1}{p-2\rho}=\frac{2}{r}-\Sigma\frac{1}{p_1},$$

$$\frac{1}{p-2\rho'}=-\frac{2}{r}-\Sigma\frac{1}{p_1},$$

et

$$\rho=\frac{p(p-2R-r)}{2p-4R-r},\quad \rho'=\frac{p(p+2R+r)}{2p+4R+r}.$$

2. Calculons les rayons ρ_1, ρ_1' des cercles du deuxième groupe.

Dans les formules trouvées, il suffira de changer respectivement a en $-a$, ou b, c en $-b, -c$; cela revient à remplacer p, p_1, p_2, p_3, r, par $p_1, p, -p_3, -p_2, r_1$, ou par $-p_1, -p, p_3, p_2, -r_1$.

On en conclut

$$\frac{1}{p_1-2\rho_1}=\frac{2}{r_1}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3},$$

$$\frac{1}{p_1+2\rho_1'}=-\frac{2}{r_1}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3},$$

et $$\rho_1=\frac{p_1(p_1+2R-r_1)}{2p_1+4R-r_1}, \quad \rho_1'=\frac{p_1(p_1-2R+r_1)}{-2p_1+4R-r_1}.$$

3. Les dernières formules publiées par W. Rutherford (*Mathematician*, mars 1846) doivent s'écrire :

$$\frac{1}{\rho}=\frac{2}{p}+\frac{r}{p(p-d-r)}, \quad \frac{1}{\rho'}=\frac{2}{p}-\frac{r}{p(p+d+r)},$$

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{2}{p_1}+\frac{r_1}{p_1(p_1+d-r_1)}, \quad \frac{1}{\rho_1'}=-\frac{2}{p_1}+\frac{r_1}{p_1(p_1-d+r_1)},$$

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}=\frac{2r}{p^2-(d+r)^2}, \quad \frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_1'}=\frac{2r_1}{p_1^2-(d-r_1)^2},$$

$2d$ étant égal à $4R$. Enfin on a

$$-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}=\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho_1'}+\frac{1}{\rho_2'}+\frac{1}{\rho_3'}.$$

4. Représentons le rayon du cercle inscrit dans le triangle orthique de ABC par r_4. On trouve les relations :

$$-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}=\frac{2}{r_4}$$

$$\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho_1'}+\frac{1}{\rho_2'}+\frac{1}{\rho_3'}=\frac{2}{r_4}.$$

5. Soient A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3 les points où les bissectrices intérieures des angles A, B, C coupent respectivement les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 et désignons les droites $A_1B_2C_3$, $A_2B_3C_1$, $A_3B_1C_2$, $A_2B_1C_3$ par $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

La droite Δ est l'axe radical des cercles (D), (D').

La droite Δ_1 est l'axe radical des cercles (D_1), (D_1').

. . . . . .

L'orthocentre de ABC est un centre de similitude des cercles : (D), (D′); (D_1), (D_1'); (D_2), (D_2'); (D_3), (D_3').

Les droites DD′, D_1D_1', D_2D_2', D_3D_3' se croisent à l'orthocentre de ABC et sont respectivement perpendiculaires aux droites Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

6. Désignons par ε_a l'ellipse ayant pour foyers les milieux B_1, C_1 des côtés CA, AB du triangle ABC, pour sommets de l'axe focal les points où les cercles ex-inscrits au triangle $A_1B_1C_1$ dans les angles B_1, C_1 touchent le côté B_1C_1.

L'ellipse ε_a passe par A, A_1 et par le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

On a aussi l'ellipse ε_b et l'ellipse ε_c.

Désignons encore par Γ_a l'hyperbole qui a pour foyers les points B_1, C_1, pour sommets les points où le cercle inscrit dans $A_1B_1C_1$ et le cercle ex-inscrit dans l'angle A_1 au même triangle, touchent le côté B_1C_1.

L'hyperbole Γ_a passe par A, A_1 et par le pied de la hauteur issue de A.

On a de même l'hyperbole Γ_b, et l'hyperbole Γ_c.

Cela étant,

les centres D, D′ sont sur Γ_a, Γ_b, Γ_c.
» » D_1, D_1' » » Γ_a, ε_b, ε_c.
» » D_2, D_2' » » ε_a, Γ_b, ε_c.
» » D_3, D_3' » » ε_a, ε_b, Γ_c.

7. Considérons un triangle sphérique ABC; des sommets A, B, C comme centres, avec BC, CA, AB pour rayons, décrivons trois petits cercles α, β, γ.

Soient ρ, ρ′ les rayons sphériques des deux petits cercles qui touchent le premier intérieurement, le second extérieurement les trois cercles α, β, γ;

. . . . . .

On trouve les relations suivantes :

$$\operatorname{cotg}(p - \rho) = 2\operatorname{cotg} r - \Sigma \operatorname{cotg} p_1.$$
$$\operatorname{cotg}(p - \rho') = -2\operatorname{cotg} r - \Sigma \operatorname{cotg} p_1.$$
$$\operatorname{cotg}(p_1 - \rho_1) = 2\operatorname{cotg} r_1 - \operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} p_2 + \operatorname{cotg} p_3.$$
$$\operatorname{cotg}(p_1 - \rho_1') = -2\operatorname{cotg} r_1 - \operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} p_2 + \operatorname{cotg} p_3.$$

. . . . . .

BIBLIOGRAPHIE.

Teoria delle Funzioni analitiche di GIULIO VIVANTI, Prof. ordinario nella R. Università di Messina U. Hoepli, Milano, 1901 (In 18, cartonné de VIII-431 p.). Prix : 3 francs

Ce petit volume est l'un des meilleurs de l'excellente collection Hoepli. L'auteur y expose avec une clarté française et une érudition allemande, au moins dans la troisième partie, à la fois la partie classique de la théorie des fonctions et des aperçus sur la partie en voie de formation de cette doctrine. La première partie contient la théorie des ensembles et des nombres transfinis (pp. 1-61). La seconde partie est consacrée à la partie la plus achevée de la théorie des fonctions exposée au moyen de la théorie des séries, comme chez Weierstrass, sans recourir au calcul intégral. L'auteur pousse cette étude jusqu'au théorème de Mittag-Leffler sur les fonctions ayant une infinité de points singuliers quelconques (pp. 62-268). La troisième est intitulée : *Compléments de la théorie des fonctions analytiques*. On y trouve de précieuses indications sur diverses recherches récentes relatives aux fonctions entières dues à Poincaré, Hadamard, Borel, Picard ; sur la représentation d'une fonction analytique ; sur les fonctions lacunaires ; sur le concept de prolongement analytique ; sur les relations entre les singularités de deux fonctions analytiques ; enfin sur la distribution des points singuliers sur le cercle de convergence d'une série entière (pp. 269-400). Le manuel est complété par une liste de 213 ouvrages ou mémoires anciens ou récents sur la théorie des fonctions (pp. 401-427) et par un index alphabétique (pp. 429-431).

La place de ce bon petit livre est marquée dans la bibliothèque de tous les professeurs d'analyse supérieure et aussi dans celle de leurs élèves. (P. M.)

Theoretische Arithmetik von Dr. O. STOLZ, o. Professor a. d. Universität Innsbrück und Dr. J. A. GMEINER, Privatdocent a. d. Universität Wien I. Abtheilung. Allgemeines. Die Lehre von der rationalen Zahlen. Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte I-IV des I. Theiles der Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik von O. Stolz. Leipzig, Teubner, 1901 (In-8°, IV-98 pp., 6 fig. dans le texte). Prix : 2 marcs 40.

Nouvelle édition, fortement retravaillée de la première section d'un livre classique en son genre. Il contient une exposition des principes de l'arithmétique, d'abord par la méthode *réelle*, puis d'après la méthode *formelle*. Pour une analyse et une critique plus détaillée de ce livre, que devraient méditer tous ceux qui veulent écrire un traité d'arithmétique, nous renvoyons à un article de M. J. Tannery, dans le *Bulletin de Darboux*, 1901, 1re partie, pp. 35-37 et à un autre de G. Vivanti dans le *Bulletin de Loria*, 1901, pp. 42-44.

Vorlesungen über numerisches Rechnen, von Dr. J. Lüroth, Professor an der Universität Freiburg i. Br. Leipzig, B G. Teubner, 1900 (VI-194, p. in-8°, avec 14 fig. dans le texte). Prix : 8 marcs.

Livre encore plus indispensable que le précédent aux professeurs d'arithmétique. Que l'on en juge par le sommaire des dix chapitres dont il se compose.

1. Remarques générales. Conseils divers. Choix du papier du calculateur. Employer des tables bien faites et que l'on connaît bien. 2. Opérations directes : addition, soustraction; preuves de l'addition. Multiplication; preuves. Tables de produits, de carrés. Multiples. 3. Les machines à calculer de Leibniz, de Selling, de Steiger-Egli. 4. Division. Étude approfondie de la division ordonnée de Fourier. Emploi des machines à calculer. 5. Calculs avec des nombres approchés. Calcul de e. 6. Erreurs à craindre quand on emploie des tables à peu de décimales et, en particulier, quand on utilise la méthode des parties proportionnelles. Tables de logarithmes d'addition et de soustraction. 7. Calcul avec les grandes tables. Interpolation quadratique. 8. Méthodes pour calculer les logarithmes à plus de sept décimales (L'auteur ne connaît malheureusement pas la méthode si ingénieuse de Namur, publiée par l'Académie de Belgique en 1877). 9. Extraction des racines; méthodes de Fourier, de Darboux pour la racine carrée, etc. Il manque ici la vieille méthode grecque : $\sqrt{N} = \sqrt{a.b}$ est compris entre $A = \frac{1}{2}(a+b)$ et $B = N : A$, puis entre $\alpha = \frac{1}{2}(A+B)$ et $\beta = N : \alpha$, etc. C'est une méthode extrêmement rapide, dans bien des cas et presque équivalente à l'emploi des fractions continues. 10. Equations trinomes et cubiques.

Tous les professeurs trouveront quelque chose à apprendre dans les leçons de M. Lüroth. La réciproque est vraie aussi : tous ceux qui ont pratiqué le calcul numérique pourraient ajouter çà et là un paragraphe à l'excellent livre du savant professeur de Fribourg. (P. M.).

Cours de mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale des Arts et Manufactures, par P. Appell, Membre de l'Institut, Paris, Gauthier-Villars, 1902 (Volume in-8 de 272 pages, avec 143 figures). Prix : fr. 7,50.

Le cours que nous annonçons est le développement du Programme d'admission à l'École centrale des Arts et Manufactures de Paris, par M. Appell, professeur à la Sorbonne et à l'École Centrale, dont on connaît le grand *Traité de Mécanique* en trois Volumes. L'auteur a pensé qu'il pourrait faire œuvre utile en mettant sa science et son expérience de l'enseignement de la Mécanique au service des candidats à l'École. Il s'est astreint à traiter uniquement les questions du programme le plus simplement possible. Chaque question est traitée en elle-même par une voie géométrique ou mécanique directe, toutes les fois que cela est possible : les expressions analytiques ne viennent qu'après les faits géométriques ou mécaniques. De cette façon les élèves sont habitués à raisonner sur les objets eux-mêmes et ne peuvent pas prendre l'habitude de s'en rapporter à des formules.

Les questions de Cinématique sont traitées en vue des applications; on a

développé la représentation graphique des principaux éléments du mouvement d'un point et, en particulier, la représentation des mouvements vibratoires par des vecteurs tournants, constamment utilisée dans les applications à l'électricité.

Les théorèmes de la théorie des moments sont établis par la Géométrie et basés sur la notion du *moment linéaire* introduite par Cauchy.

Les principes de la Mécanique sont exposés brièvement suivant les indications du programme; l'auteur s'est, pour les détails, inspiré des idées de M. Blondlot, l'éminent professeur de l'Université de Nancy.

Dans la statique et la dynamique du point, on a introduit, dès le début, la notion de frottement pour rester plus près de la réalité. On a développé ensuite des notions indispensables à l'étude de la physique générale, comme celles du champ de forces uniformes, du champ de forces centrales proportionnelles à la distance, et l'on a étudié le mouvement d'un point matériel dans chacun de ces champs.

Pour la statique des corps solides, on s'est appliqué à faire comprendre entre quelles limites sont valables les hypothèses faites en Mécanique rationnelle sur les propriétés des solides; on a, conformément au programme, fait reposer tous les théorèmes sur la notion du moment résultant et de la somme géométrique des forces et sur ce fait que ces deux vecteurs restent inaltérés par les opérations élémentaires que l'on peut faire subir aux forces. On arrive ainsi, d'une manière simple, aux conditions de l'équilibre sous forme géométrique, puis sous forme analytique; on en déduit ensuite les conditions d'équivalence de deux systèmes de forces appliqués à un solide. Une fois ces bases établies, l'étude des couples, des forces dans un plan, des forces parallèles se trouve rattachée à un même point de vue général.

L'étude des machines simples est faite en détail, parce que c'est uniquement par des applications à la réalité physique que l'on peut amener ces élèves à comprendre la Mécanique On a insisté sur ce point qu'on ne peut pas à la fois gagner en force et en chemin parcouru, que dans le cas fictif de l'absence de frottement on perd en force ce qu'on gagne en chemin parcouru, et qu'en réalité, à cause du frottement, on perd plus en force qu'on ne gagne en chemin parcouru. On prépare ainsi les notions de travail et d'énergie qui ne sont pas au programme.

En résumé, l'auteur s'est placé surtout, comme il convient de le faire pour de futurs ingénieurs, au point de vue des études ultérieures des candidats en Mécanique et en Physique générale, de façon à établir une continuité, trop souvent oubliée, entre les études préparatoires et les cours de l'École.

SOMMAIRE : *Notions préliminaires sur les grandeurs géométriques. — Cinématique du point.* Mouvement rectiligne. Mouvement curviligne. Mouvement rapporté à des axes de coordonnées orthogonaux ou obliques. Diagramme d'un mouvement. — *Mécanique.* Point matériel libre. Point matériel non libre. Théorie des moments. Statique des corps solides libres. Équilibre des corps non libres. Machines simples.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

*Question 1363.

(Voir *Mathesis* (3), I, p. 40).

Etant donnés dans un même plan deux triangles OAB, OCD, ***de même sommet, faire tourner l'un d'eux autour de*** O ***de manière que les quatre points*** A, B, C, D ***deviennent concycliques.***

(*Educational Times*).

Solution par M. EMMERICH. Supposons les deux triangles dans la position demandée. Les perpendiculaires élevées aux milieux E, F, des bases AB, CD se rencontrent en un point G tel que GA = GB = GC = GD. Pour résoudre la question, il nous suffira de connaître l'une des quantités GA = GC = x, GO = y.

Soient P, Q les centres des cercles circonscrits aux triangles OAB, OCD; R, R' les rayons PO, QO; d, d' les distances EP, FQ; t, t' les distances PG, QG; enfin h, h' les hauteurs des deux triangles, issues de O.

En observant la règle des signes pour les distances EP, PG, on déduit des triangles AGP, OGP :

$$x^2 = R^2 + t^2 + 2td, \quad y^2 = R^2 + t^2 - 2t(h - d). \tag{1}$$

De même,

$$x^2 = R'^2 + t'^2 + 2t'd', \quad y^2 = R'^2 + t'^2 - 2t'(h' - d'). \tag{2}$$

De ces égalités, on tire

$$x^2 - y^2 = 2th = 2t'h',$$

ce qui conduit à poser $t = h'u$, $t' = hu$, u étant une nouvelle inconnue. Les premières des égalités (1), (2) prennent alors la forme.

$$x^2 = R^2 + h'^2u^2 + 2h'ud = R'^2 + h^2u^2 + 2hud'.$$

On a ainsi l'équation en u

$$(h^2 - h'^2)u^2 + 2(hd' - h'd)u + R'^2 - R^2 = 0; \tag{5}$$

par conséquent,

$$u = \frac{h'd - hd' \pm \sqrt{\rho}}{h^2 - h'^2},$$

où l'on a posé

$$\rho = (hd' - h'd)^2 + (h^2 - h'^2)(R^2 - R'^2).$$

Cas remarquables. Nous excluons le cas $h = 0$ ou $h' = 0$ qui ramène les triangles à des droites.

1° Si $h = h'$, $d = d'$, $R = R'$ les triangles OAB, OCD sont égaux. En éliminant x^2 et y^2 entre les équations (1) et (2), on trouve

$$t^2 - t'^2 + 2d(t - t') = 0, \quad t^2 - t'^2 - 2(h - d)(t - t') = 0,$$

d'où $h(t - t') = 0$. L'hypothèse $t - t' = 0$ rend le système (1), (2) indéterminé, de manière que G est un point quelconque de la médiatrice EP. Effectivement, si les triangles OAB, OCD sont directement égaux, on peut les superposer, et il existe une infinité de circonférences passant par A, B, C, D; si les triangles sont inversement égaux, les points A, B, C, D, dans toute position relative des deux triangles, sont les sommets d'un trapèze isoscèle.

2° Si $h = h'$, $d = d'$, $R \gtrless R'$, l'équation (5) indique la solution $t = t' = \infty$, $x = \infty$. Dans ce cas, on place les triangles OAB, OCD de manière que leurs bases soient sur une même droite, et cette droite tient lieu de circonférence passant par A, B, C, D.

Si $h = h'$, $d \gtrless d'$, $R = R'$, on a les deux solutions $t = t' = 0$, $t = t' = \infty$. Il faut donc placer les deux triangles de manière que les centres de leurs cercles circonscrits coïncident ou que leurs bases viennent sur une même droite.

Si $h \gtrless h'$, $d = d'$, $R = R'$, les deux triangles ont des bases égales et même angle au sommet. Le problème admet deux solutions : 1° $u = 0$; 2° $u = 2d : (h + h')$, $t = 2dh' : (h + h')$.

3° Soit $h' = \lambda h$, $d' = \lambda d$, $R' = \lambda R$; on trouve $t = \pm \lambda R$, $t' = \pm R$.

Si les triangles donnés sont *directement* semblables, on portera sur la médiatrice FQ les longueurs $QG_1 = QG_2 = R$, et on fera tourner le triangle OCD autour de O de manière que G_1 ou G_2 se place sur la médiatrice de AB.

Si les triangles donnés sont inversement semblables, il suffit de faire coïncider l'angle COD avec l'angle BOA ou avec l'angle opposé au sommet.

Question 1324.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 152.)

Etant donnés dans un plan deux points fixes O *et* O', *faisons correspondre à un point variable* P, *les deux points* P_1, P_2 *où la droite* OP *est*

coupée par le cercle ayant le centre P *et* PO′ *pour rayon : démontrer que lorsque* P *décrit une droite* g, *le lieu du point correspondant est en général une cubique de sixième classe passant par* O, *normale en* O′ *à* OO′ *et touchant aux points circulaires les droites isotropes issues de* O. *Construire l'asymptote réelle de la cubique; les deux autres antitangentiels de* O ; *les points où la cubique est coupée par* g *et les tangentes en ces points. Examiner les cas particuliers de* g *passant par* O, *ou par* O′ *et ceux de* g *médiatrice de* OO′ *ou située à l'infini.* (V. Retali).

Solution par M. J. F. Rose. On prend comme axes deux droites rectangulaires OO′ et O′X passant par O′ et on désigne par d la distance OO′.

L'équation du cercle P est $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=x_1^2+y_1^2$; (1)

celle de g, est $y=ax+b$; (2)

celle de OP, est $y-y_1=\frac{d-y_1}{-x_1}(x-x_1)$; (3)

et, de plus, on a la condition $y_1=ax_1+b$. (4)

Eliminant x_1, y_1 entre (1), (3), (4) on a l'équation du lieu :

$$(y^2+x^2)(ax+d-y)-2x^2(d-b)-2by(d-y)-2adxy=0. \quad (5)$$

C'est une cubique passant par le point O $(0, d)$ et par le point O′ $(0, 0)$. L'axe des x $(y=0)$ la rencontre en deux points coïncidents en O, c'est-à-dire qu'elle est normale à OO′. En rendant l'équation (5) homogène, on montre que les droites isotropes $y-d=\pm ix$ passant par O touchent la cubique aux points circulaires.

Cas particuliers. 1) Quand g passe par O, la droite g elle-même est le lieu cherché. Cela se voit du reste par l'examen de l'équation résultant de cette hypothèse.

2) Quand g passe par O′, alors $b=0$, et l'équation du lieu est

$$(y^2+x^2)(ax+d-y)-2dx^2-2adxy=0.$$

3) Lorsque g est médiatrice de OO′, son équation est $y=\frac{d}{2}$; par suite l'équation du lieu est

$$(y^2+x^2)(d-y)-dx^2-dy(d-y)=0,$$

ou

$$-y[y^2+x^2-2d+d^2]=0.$$

Le lieu se compose de la droite OO′ et d'un cercle de centre O′.

4) Quand g est la droite à l'infini, son équation est $z=0$. En posant $a=b=0$, on constate que en vertu de $z=0$, l'équation du lieu

devient identiquement $0 = 0$. C'est-à-dire que la droite à l'infini est elle-même le lieu cherché.

Solution géométrique par M. C. Servais. La ponctuelle des points P sur g est projective au faisceau (PO') des cercles (PO', P); ainsi, ce faisceau de cercles et le faisceau de rayons (OP) sont projectifs. Le lieu des points P_1, P_2 est donc une cubique passant par O et par les points O', O'_1, I, I' communs aux cercles (PO', P). Au rayon OO' correspond un cercle tangent à la cubique au point O'; par suite OO' est la normale à la courbe au point O'. De même, les droites isotropes OI et OI' sont tangentes en I et I' à la cubique. La droite g coupe la cubique en trois points : l'un S est à l'infini, les deux autres J et J' sont les points limites du faisceau de cercles. Ces points limites étant des cercles de rayon nul, les tangentes en J et J' sont OJ et OJ'. Les tangentiels des points J, J', S étant en ligne droite, S et O ont même tangentiel; la construction de l'asymptote réelle revient donc à celle du tangentiel O_1 du point O. Au cercle O O' O_1' du faisceau correspond un rayon tangent à la cubique au point O. Cette tangente est donc un diamètre de ce cercle et le point O_1 est la seconde extrémité de ce diamètre.

Question 1398.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 176.)

Étant donnés dans un plan deux points fixes O, O', *faisons correspondre à un point variable* P_1, *l'intersection* P *du rayon* OP_1 *avec la médiatrice du segment* $O'P_1$: *démontrer que si* P_1 *décrit une droite h, le lieu de* P *est, en général, une cubique unicursale ayant le point double en* O_1 *passant par les deux anti-points de* O, O' *et ayant un foyer simple en* O'. *Construire les tangentes au point double et les intersections de la cubique avec h. Cas particulier de h passant par* O'. (V. Retali.)

Solution par M. J. Rose. En choisissant comme axes OY, OX la droite OO' et sa normale en O, et désignant par (x_1, y_1) les coordonnées du point variable P_1, les droites h, OP_1 et la médiatrice de $O'P_1$ ont respectivement pour équations :

$$y = ax + b, \tag{1}$$

$$y = \frac{y_1}{x_1}x, \tag{2}$$

$$y - \frac{y_1 + d}{2} = \frac{x_1}{d - y_1}\left(x - \frac{x_1}{2}\right). \qquad (d = OO') \tag{3}$$

Les coordonnées (x_1, y_1) sont déterminées par l'équation (2) et la condition

$$y_1 = ax_1 + b. \tag{4}$$

L'élimination de x_1, y_1 entre ces trois équations donne l'équation du lieu de P, c'est-à-dire :

$$2y\,[d(y - ax) - by]\,(y - ax) + b^2y^2 - d^2(y - ax)^2 - 2bx^2(y - ax) + b^2x^2 = 0. \tag{5}$$

Cette équation représente une cubique unicursale. Par dérivation, on vérifie que O ($x = 0$, $y = 0$) est un point double de la courbe.

La droite isotrope $x + (y - d)\sqrt{-1} = 0$ passant par O′ étant tangente à la courbe, il en résulte que O′ est un foyer.

Dans le cas particulier de k passant par O ($b = d$), l'équation (5) devient

$$x\,[-2ay^2 + 2(a^2 - 1)\,xy + 2ax^2 + 2aby - b(a^2 - 1)\,x] = 0.$$

Le lieu se compose de la droite OO′ et d'une hyperbole équilatère. Cette dernière passe par les points O et O′; elle a pour asymptotes une parallèle et une perpendiculaire à la droite k.

Note. Soit Q le point de rencontre de OP_1 avec la perpendiculaire élevée en O′ sur $O'P_1$. La transformation *involutive* (P_1, Q) a été étudiée par M. de Longchamps (JME, 1882, pp. 49, 77, 97, 121, 145). Elle est un cas particulier de la transformation de Newton qui donne la génération organique des coniques au moyen de deux angles constants qui tournent autour de leurs sommets de manière que deux côtés se coupent sur une droite fixe : il suffit de supposer l'un des angles mobiles réduit à zéro et l'autre égal à un angle droit.

Si l'on projette les points P_1 et Q en p_1 et q sur OO′, les triangles semblables P_1p_1O', $O'qQ$ donnent l'égalité

$$P_1p_1 \cdot Qq = O'p_1 \cdot O'q,$$

qui conduit à la relation suivante entre les rayons vecteurs $OP_1 = r_1$, $OQ = \rho$ et l'angle vecteur $O'OP_1 = \theta$:

$$\rho r_1 - d(\rho + r_1)\cos\theta + d^2 = 0. \tag{1}$$

Soit $r = OP$; comme $r = \frac{1}{2}(\rho + r_1)$, la transformation de M. Retali est caractérisée par la formule

$$(2r - r_1)\,r_1 - 2rd\cos\omega + d^2 = 0.$$

A tout point P_1 correspond un seul point P ; mais à un point donn correspondent deux points P_1 qui sont les extrémités du diamètre de la circonférence de centre P et de rayon PO' (Comparer quest 1324). (*J. I*

Solution géométrique par M. C. Servais. La médiatrice m envelo une parabole ayant pour foyer O' et pour directrice h ; le faisceau second ordre décrit par m est projectif au faisceau de rayons (OP Ces deux faisceaux déterminent sur m deux ponctuelles projective dont les points doubles D, D_1 appartiennent au lieu. Le correspondai P' du point P dans ces ponctuelles, est le point de contact de la droit m avec la parabole. En général, P et P' sont distincts et P n'est pas l'u des points D, D_1 ; le lieu est donc une courbe du troisième ordre. Le points P et P' coïncident, si m est une tangente isotrope, ou si elle est la médiatrice m, correspondant à la projection de O sur h, choisie comme position particulière du point P_1. La parabole est donc tritangente à la cubique. La corde de contact h de la cubique et de la parabole rencontre une troisième fois la cubique à l'infini. Le tangentiel de ce point se confond avec celui du point de contact de la médiatrice m_1 ; on peut donc le construire. Sur les tangentes menées de O à la parabole, le point O seul appartient au lieu, O est donc un point double de la cubique.

Question 1331.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 214).

Si par le sommet A *d'une chaînette verticale* (C) *de paramètre a on fait passer une chaînette verticale* (C') *de paramètre* $\frac{1}{2}a$ *qui coupe* (C) *en* B, *on a entre les arcs s et s' respectivement interceptés sur* (C) *et sur* (C'), *la relation*

$$s'^2 = s^2 + h^2,$$

h désignant la différence de niveau des points A *et* B. (G. Gérard).

Solution par M. Emmerich. Soient x_0, y_0 les coordonnées du sommet de (C') et posons pour simplifier l'écriture

$$e^{\frac{x}{a}} = t, \quad e^{-\frac{x}{a}} = u, \quad e^{\frac{x_0}{a}} = p, \quad e^{-\frac{x_0}{a}} = q.$$

L'équation de (C) étant $y = \frac{1}{2}a(t+u)$, on a $s = \frac{1}{2}a(t-u)$.

L'équation de (C') sera

$$y - y_0 = \frac{1}{4}a(q^2t^2 + p^2u^2)\ldots; \qquad (1)$$

comme (C') doit passer par A, on a

$$a - y_0 = \frac{1}{4} a (q^2 + p^2);$$

donc, en éliminant y_0,

$$h = \frac{1}{4} a (q^2 t^2 + p^2 u^2 - q^2 - p^2) \ldots \qquad (2)$$

De l'équation (1) on tire pour l'arc s' :

$$s' = \frac{1}{4} a (q^2 t^2 - p^2 u^2 - q^2 + p^2) \ldots \qquad (3)$$

Les équations (2) et (3) donnent alors

$$s' + h = \frac{1}{2} a q^2 (t^2 - 1), \quad s' - h = \frac{1}{2} a p^2 (1 - u^2);$$

donc, en multipliant,

$$s'^2 - h^2 = \frac{1}{4} a^2 (t^2 + u^2 - 2) = \frac{1}{4} a^2 (t - u)^2 = s^2.$$

Autre solution par M. Verheugen, qui considère l'équation de la chaînette sous la forme $y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}$.

Question 1342.

(Voir *Mathesis*, (3) I, p. 240).

Soient M *un point de la circonférence circonscrite au triangle* ABC, A', B', C' *les pieds des hauteurs. On porte sur* AA', BB', CC' *les longueurs* MA, MB, MC *en* AA_1, BB_1, CC_1 *dans le sens* AA', BB', CC' *ou dans le sens opposé suivant que* MA, MB, MC *coupent* BC, CA, AB *sur les côtés du triangle ou sur leurs prolongements.*

Démontrer que les quatre points M, A_1, B_1, C_1 *sont en ligne droite.*

Trouver l'enveloppe de cette droite. (E. Lemoine).

Solution par MM. J. Déprez et Droz-Farny. 1° Supposons le point M sur l'arc AB. Menons MA_1, MB_1; les triangles MAA_1, MBB_1 étant isocèles, on a :

$$\text{angle } A_1MA = \tfrac{1}{2}MAH, \quad \text{angle } B_1MB = \tfrac{1}{2}MBH;$$

dans le quadrilatère AMBH,

$$MAH + MBH = 4^{dr} - AMB - AHB = 2 \cdot C;$$

donc, $$A_1MA + AMB + BMB_1 = C + AMB = 2^{dr},$$

et les points A_1, M, B_1 sont collinéaires.

De même on prouverait que A_1, M, C_1 sont en ligne droite.

2° Soient D le point où la hauteur AA′ rencontre la circonférence ABC, M_1 le point de rencontre de A_1M avec la même circonférence. Les angles MA_1A, AMA_1 étant égaux, on a :

$$\text{arc DM} - \text{arc AM}_1 = \text{arc AM}_1 \quad \text{ou} \quad \text{arc DM} = 2 . \text{arc AM}_1 .$$

Les points M, M_1 se meuvent sur la circonférence ABC, en sens contraire et avec des vitesses dont le rapport est 2, donc MM_1 enveloppe une hypocycloïde à 3 rebroussements, c.-à-d. l'hypocycloïde de Steiner.

Question 1348.

(Voir *Mathesis* (3), t. I, p. 280.)

D'un point donné P *on mène des tangentes à tous les cercles qui touchent deux droites fixes. Trouver le lieu des points de contact. Cas particulier où* P *est situé sur l'une des droites données.* (Soons.)

Solution par M. Emmerich. Prenons les bissectrices des angles des deux droites pour axes coordonnés et cherchons la partie du lieu relative aux cercles dont le centre se meut sur l'axe des x. Soit α l'angle que celui-ci forme avec les droites données et appelons p, q les coordonnées du point P. Si l'on désigne l'abscisse du centre du cercle variable par a, son rayon sera $a \sin \alpha$. Si x, y sont les coordonnées de l'un des points de contact, on a

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \alpha, \tag{1}$$

$$(x-a)^2 + y^2 + (x-p)^2 + (y-q)^2 = (p-a)^2 + q^2, \tag{2}$$

en posant $x - p = \xi$, $y - q = \eta$, l'équation (2) donne $a = \dfrac{x\xi + y\eta}{\xi}$.

L'équation cherchée sera donc

$$y^2 (\xi^2 + \eta^2) = (x\xi + y\eta)^2 \sin^2 \alpha. \tag{3}$$

Si le point P est sur la droite $y = x \operatorname{tg} \alpha$, l'équation (3) peut s'écrire successivement :

$$y^2 (p^2 + q^2)(\xi^2 + \eta^2) = q^2 (x\xi + y\eta)^2;$$

$$y^2 (q\xi - p\eta)^2 + y^2 (p\xi + q\eta)^2 - q^2 (x\xi + y\eta)^2 = 0;$$

$$y^2 (qx - py)^2 - \xi (qx - py) \{(qx + py)\xi + 2qy\eta\} = 0.$$

Le lieu se compose alors de la droite $qx - py = -p(y - x \operatorname{tg} \alpha) = 0$ et de la cubique

$$(qx + py)\{(x-p)^2 + (y-q)^2\} - q^2 (qx - py) = 0. \tag{4}$$

L'équation (4) admet l'interprétation géométrique suivante :

Soit APQ un triangle. Du point D où le cercle inscrit I touche le côté PQ on abaisse les perpendiculaires DE, DF sur AP, AQ respectivement; de même, on mène perpendiculairement sur la bissectrice de l'angle A la droite PG. Cela posé, on a

$$DE : DF = \overline{PD}^2 : \overline{PG}^2.$$

On peut confirmer ce résultat en éliminant les angles P, Q entre les équations

$$DE : PD = \sin P, \quad DQ : DF = 1 : \sin Q,$$
$$PD : PG = \cos\tfrac{1}{2}P : \cos\tfrac{1}{2}Q, \quad DQ : PG = \sin\tfrac{1}{2}P : \sin\tfrac{1}{2}Q.$$

On fera intervenir les triangles PDE, QDF, PDI et PGI, QDI et PGI, ces derniers étant semblables.

M. Barisien, qui a résolu la même question, fait les remarques suivantes :

1° L'hypothèse $\alpha = 0$ correspond à des cercles qui touchent une droite donnée en un point donné; le lieu cherché se compose de cette droite et d'une strophoïde oblique. 2° La cubique (i) a de l'analogie avec la strophoïde oblique; elle a un point double et rencontre son asymptote au point d'intersection des deux droites données.

M. Rogel a résolu la question en prenant pour axes coordonnés les droites données.

---

*QUESTIONS D'EXAMEN.

1042. Vérifier les identités

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c+2d)^2=(a+b+d)^2+(a+c+d)^2$$
$$+(b+c+d)^2+d^2=(a+d)^2+(b+d)^2+(c+d)^2$$
$$+(a+b+c+d)^2. \qquad \text{(Goldbach.)}$$

1043. On considère un triangle variable ABC, inscrit dans un cercle fixe D, le sommet A étant fixe et le produit AB. AC constant. Lieux des centres des cercles inscrit et exinscrits à ce triangle. (*J. de Vuibert.*)

Soient I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles tritangents. La droite AH_a rencontre la circonférence en un point M qui est le milieu de la distance H_a, et l'on a $AI.AI_a = AB.AC = \text{const.}$ Ces propriétés définissent le lieu des points I, I_a sans passer par le triangle ABC. Soient A' le point de la circonférence O diamétralement opposé à A, et I', I'_a les points du lieu situés sur la droite AA'. A cause de $AI.AI_a = AI'.AI'_a$ les points I, I_a, I', I'_a sont sur une même circonférence Δ; mais l'angle AMA' étant droit et M le milieu de H_a, le centre de Δ est en A'. Donc Δ est fixe,...

Le lieu des points I_b, I_c est également une circonférence de centre A'.

1044. On projette sur deux plans rectangulaires un point A a' et un point B en b et b'; si l'on pose $\overline{Aa} = \alpha$, $\overline{Aa'} = \alpha'$, I $\overline{Bb'} = \beta'$ et que d désigne la distance des deux plans parallèles Bbb', la distance $\overline{AB} = \delta$ a pour expression

$$\delta^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\alpha' - \beta')^2 + d^2.$$

Démontrer cette formule au moyen de la construction usu détermine en géométrie descriptive la vraie distance de deux p et B connus seulement par leurs projections (a, a') et (b, b').

(E. N. Ba

1045. Soient a le bénéfice pour cent, calculé sur le prix d'ach le bénéfice pour cent calculé sur le prix de vente. On a

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{a} = \frac{1}{100},$$

c'est-à-dire *la différence entre l'inverse du bénéfice pour cent, calc le prix de vente, et l'inverse du bénéfice pour cent, calculé sur d'achat, est égal à* $\frac{1}{100}$. (E.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1361. Etant données deux sphères égales. il existe en nombr (indépendamment de la rotation possible autour de la ligne des c des tétraèdres dont les arêtes sont tangentes aux deux sphères.

(G. For

1362. Trouver une courbe telle que la normale en un point contrant les axes rectangulaires OX, OY en N et N', le rayon r OM soit une moyenne harmonique entre MN et MN'. (Bo

1363. Étant donnés dans un plan deux droites a, b et trois A, B, C, mener par C une droite coupant a et b en deux points tels que les quatre points A, B, A', B' soient sur une même cir rence.

Examiner le cas particulier où les points A, B, C sont en droite. (Deguelbr

1364. Si *tang* α, *tang* β, *tang* γ, *tang* δ sont les racines de l'équ

$$A_0x^4 + 4A_1x^3 + 6A_2x^2 + 4A_3x + A_4 = 0,$$

trouver l'équation qui a pour racines

$$\tan(\alpha + \beta)\tan(\gamma + \delta), \quad \tan(\alpha + \gamma)\tan(\beta + \delta),$$
$$\tan(\alpha + \delta)\tan(\beta + \gamma).$$

SUR LE THÉORÈME DE ROLLE,

par M. A. DEMOULIN, professeur à l'Université de Gand.

I.

On donne habituellement le nom de théorème de Rolle à la proposition suivante :

Soit Fx une fonction continue de x_0 à X inclusivement et s'annulant pour $x = x_0$ et pour $x = X$. Si la dérivée $F'x$ est unique en chaque point de l'intervalle x_0X, elle s'annulera pour une valeur de x appartenant à cet intervalle.

La démonstration de ce théorème, due à Ossian Bonnet, s'appuie sur le théorème de Weierstrass(*). Si, à la condition imposée à la dérivée d'être unique en chaque point de l'intervalle x_0X, on ajoute celle d'être continue dans cet intervalle, on obtient un théorème plus restreint que le précédent, mais dont la démonstration ne nécessite que l'emploi du théorème de Cauchy concernant les fonctions continues :

Si une fonction Fx, continue de x_0 à X inclusivement, prend des valeurs de signes contraires pour $x = x_0$ et pour $x = X$, elle s'annule pour une ou plusieurs valeurs de x comprises entre x_0 et X(**).

(*) Voir, par exemple, P. MANSION, *Résumé du cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand*, p. 80.

(**) La démonstration habituelle du théorème de Cauchy (Voir P. MANSION, *Résumé*, p. 20), légèrement modifiée, conduit à la propriété suivante, qui va nous être utile dans un instant.

Supposons, pour fixer les idées, $x_0 < X$, $Fx_0 > 0$ et $FX < 0$. *L'équation* $Fx = 0$ *admet, entre* x_0 *et* X, *au moins une racine* ξ *telle que, dans un intervalle arbitrairement petit* $(\xi, \xi + \alpha)$, *situé à droite de* ξ, *il existe une infinité de valeurs de* x *pour lesquelles la fonction* Fx *est négative.*

Divisons, en effet, l'intervalle x_0X en p parties égales et soit, à partir de x_0, X_1 l'abscisse du premier point de division pour lequel la fonction est négative. Appelons x_1 l'abscisse du point de division précédent. On aura $Fx_1 \geqq 0$, $FX_1 < 0$. Divisons l'intervalle x_1X_1 en p parties égales et soit, à partir de x_1, X_2 l'abscisse du premier point de subdivision pour lequel la fonction est négative. Appelons x_2 l'abscisse du point de subdivision précédent. On aura $Fx_2 \geqq 0$, $FX_2 < 0$. En continuant de même, on formera deux suites $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ et $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ qui auront même limite ξ. On sait que $F\xi = 0$, et il ressort clairement de cette démonstration que dans tout intervalle $(\xi, \xi + \alpha)$, situé à droite de ξ, il existe une infinité de nombres X_k, ce qui justifie l'énoncé.

Je donne ci-après la démonstration du théorème de Roll entendu.

Si la fonction Fx est constamment nulle de x_0 à X, sa déri constamment nulle dans cet intervalle et le théorème est démont

Sinon, il y a au moins entre x_0 et X un nombre a pour lequel l tion est différente de zéro. Je supposerai, *pour fixer les idées*, I Si la fonction Fx était constamment négative de x_0 à X, on raiso sur la fonction $-Fx$.

Soit Γ la courbe définie, en coordonnées cartésiennes, par l'éq $y = Fx$(*). Coupons-la par une parallèle d à l'axe des x assuj l'unique condition d'être comprise entre l'axe des x et le point A (La fonction Fx étant continue de x_0 à a inclusivement, la droite contrera la courbe Γ en un ou plusieurs points dont les abscisses comprises entre x_0 et a. Parmi ces points, il y en a au moins u l'abscisse, que j'appellerai b, est la limite d'une suite *décroiss* nombres $X_1, X_2, \ldots$ pour lesquels la fonction est plus grande q Concluons de là que la dérivée $F'b$ n'est pas négative. Elle es positive ou nulle. Si elle est nulle, le théorème est démontré *l'hypothèse* $F'b > 0$.

De même, la fonction Fx étant continue de a à X inclusiveme droite d coupera la courbe Γ en un ou plusieurs points dont les ab seront comprises entre a et X. Parmi ces points, il y en a au mo dont l'abscisse, que j'appellerai c, est la limite d'une suite *décro* de nombres pour lesquels la fonction est plus petite que Fc. Par la divisée $F'c$ n'est pas positive. Elle est donc négative ou nu elle est nulle, le théorème est démontré. *Reste l'hypothèse* $F'c$

Dans le cas le plus défavorable, on a donc $F'b > 0$, $F'c <$ dérivée $F'x$ étant continue de b à c inclusivement s'annulera pou valeur intermédiaire. C. Q. F. D

II.

Dans la démonstration précédente, nous n'avons pas fait usa l'hypothèse que la dérivée est unique dans l'intervalle x_0X. To raisonnements subsistent, en effet, lorsqu'on suppose seulement dérivée *à droite* existe et est continue dans l'intervalle considér

(*) Le langage est géométrique, mais la démonstration est purement anal

établit ainsi un théorème différent du théorème de Rolle et d'Ossian Bonnet et qui, jusqu'à preuve du contraire, s'appliquera à des fonctions auxquelles on ne saurait appliquer ce dernier.

Dans l'ouvrage cité plus haut, M. Mansion donne (p. 79), du même théorème, une démonstration fondée également sur le théorème de Cauchy. M. Mansion s'appuie, en outre, sur le théorème suivant, qu'il ne démontre pas, le considérant comme suffisamment intuitif :

Si une fonction Fx, *continue de* x_0 *à* X *inclusivement, est croissante ou décroissante à droite de chaque valeur de* x *comprise dans cet intervalle, la fonction est croissante ou décroissante dans cet intervalle.*

On peut établir ce théorème comme il suit. Je rappellerai d'abord qu'une fonction Fx est dite croissante ou décroissante dans un intervalle, si, x', x'' étant deux nombres quelconques appartenant à cet intervalle, $Fx' - Fx''$ et $x' - x''$ sont de même signe ou de signes contraires. Une fonction Fx sera dite croissante ou décroissante *à droite* d'une valeur de x, s'il existe un nombre positif α suffisamment petit tel qu'on ait

$$F(x + \Delta x) > Fx \quad \text{ou} \quad F(x + \Delta x) < Fx.$$

pour toutes les valeurs positives de Δx inférieures à α(*).

Supposons, pour fixer les idées, que la fonction Fx soit croissante à droite de chaque valeur de x appartenant à l'intervalle x_0X. La fonction sera croissante dans cet intervalle. S'il n'en est pas ainsi, il y aura au moins deux nombres x' et $x'' < x'$ appartenant à cet intervalle et tels qu'on ait $Fx' \leqq Fx''$. Supposons d'abord $Fx' < Fx''$. k étant un nombre compris entre Fx' et Fx'', posons $fx = Fx - k$. On a $fx' < 0$, $fx'' > 0$; par suite, en vertu du théorème de Cauchy, la fonction fx s'annulera pour une ou plusieurs valeurs de x comprises entre x'' et x', et parmi ces valeurs, il y en a au moins une ξ qui est la limite d'une suite décroissante de nombres X_1, X_2, X_3,... pour lesquels la fonction est négative. La fonction fx étant croissante à droite de ξ, il

---

(*) Une fonction Fx sera dite croissante ou décroissante *à gauche* d'une valeur de x s'il existe un nombre positif α suffisamment petit tel qu'on ait

$$F(x + \Delta x) < Fx \quad \text{ou} \quad F(x + \Delta x) > Fx$$

pour toutes les valeurs négatives de Δx inférieures à α en valeur absolue.

Une fonction croissante (décroissante) à droite et à gauche d'une valeur de x sera dite croissante (décroissante) *autour* de cette valeur.

est possible de trouver un nombre α tel que pour toute vale comprise dans l'intervalle $(\xi, \xi+\alpha)$ la fonction fx soit positive. est incompatible avec l'existence des nombres X_n attendu que, que soit α, on peut toujours assigner à k une valeur telle q $X_{k+2}, \ldots$ soient compris dans l'intervalle $(\xi, \xi+\alpha)$. Notre h doit donc être rejetée.

Il reste à examiner le cas où l'on aurait $Fx' = Fx''$. Cette hy se ramène à la précédente. En effet, la fonction Fx étant croi droite de x', on pourra choisir, d'une infinité de manières, un compris entre x' et x'' pour lequel la fonction a une valeur sup à Fx', c'est-à-dire à Fx''.

Le théorème est donc démontré(*).

III.

Existe-t-il des fonctions auxquelles on peut appliquer le théor Rolle démontré dans cette Note et non le théorème de Rolle et d' Bonnet? La réponse, négative, est fournie par le théorème suivan

Si la dérivée à droite *d'une fonction* Fx *continue dans le voisinage valeur* x_0 *de* x *est elle-même continue dans le voisinage de cette val dérivée* à gauche *de la fonction pour* $x = x_0$ *existe et est égale à la à droite.*

Soit $F'_d(x)$ la dérivée à droite de Fx. Appliquons à cette de fonction le théorème de Lagrange dans l'intervalle $(x_0, x_0+$ théorème qui peut être démontré dans l'hypothèse de l'existence dérivée à droite (Voir P. Mansion, *Résumé*, p. 82.). Nous aurons

$$F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0) = \Delta x_0 F'_d(x_0 + \theta \Delta x_0).$$

Cherchons la dérivée à gauche pour $x = x_0$:

$$F'_g(x_0) = \lim \frac{F(x_0 + \Delta x_0) - Fx_0}{\Delta x_0} = \lim F'_d(x_0 + \theta \Delta x_0).$$

Or, la dérivée à droite étant continue pour $x = x_0$,

$$\lim F'_d(x_0 + \theta \Delta x_0) = F'_d(x_0).$$

Par suite,

$$F'_g(x_0) = F'_d(x_0). \qquad \text{C. Q. F}$$

(*) Ce théorème est à rapprocher du suivant, démontré par M. E. Ce dans ses excellents *Elementi di Calcolo infinitesimale* (p. 44) :

Toute fonction croissante (ou décroissante, ou constante) autour de toutes les va de la variable qui appartiennent à un intervalle donné est croissante (ou décroiss ou constante) dans le même intervalle.

*SUR LA SIMILITUDE DES CERCLES;

par M. J. Neuberg.

Le présent article est surtout destiné aux jeunes lecteurs de *Mathesis*; il précise et complète des notions connues.

Je désignerai par *cercle* (O, R) le cercle de centre O et de rayon R, par cercle (AB) le cercle décrit sur la droite AB comme diamètre.

1. Deux cercles (A, α), (B, β) peuvent être considérés d'une infinité de manières comme deux figures semblables. En effet, soient AM, BN deux rayons quelconques. Si on les fait tourner avec la même vitesse angulaire dans le même sens, leurs extrémités se correspondront constamment dans deux *figures directement semblables*; si ces rayons tournent avec la même vitesse dans des sens opposés, les points M, N seront toujours des éléments homologues de deux *figures symétriquement semblables* (*).

2. Supposons d'abord les rayons AM, BN constamment parallèles et de même sens. La droite MN passe alors par un point fixe F' qui divise la ligne des centres soustractivement dans le rapport $\alpha : \beta$. F' est le *centre de similitude externe* ou *d'homothétie directe* des deux cercles.

Lorsque les rayons AM, BN sont constamment parallèles et de sens contraires, la droite MN passe par un point fixe F qui divise AB additivement dans le rapport $\alpha : \beta$. F est le *centre de similitude interne* ou *d'homothétie inverse* des deux cercles.

3. Supposons maintenant aux rayons mobiles AM, BN des directions symétriques par rapport à AB, de manière qu'ils se coupent constamment sur la médiatrice de AB.

Si les rayons AM, BN sont situés du même côté de AB, les points M, N sont des points homologues de deux figures *symétriquement semblables* ayant pour point double F et pour droites doubles AB et la

---

(*) Cette expression est préférable à celle de *figures inversement* semblables, qui désigne quelquefois deux figures semblables dont les droites homologues sont parallèles et de sens contraires.

On pourrait distinguer les deux espèces de similitude en se servant des termes de *figures homotropes*, *figures allotropes*; le mot *semblables* serait sous-entendu comme il l'est déjà dans l'expression de *figures homothétiques*. Pour celles-ci, Steiner disait *figures perspectivement semblables*.

perpendiculaire en F. Ces droites partagent le segment MN h
quement dans le rapport $\alpha : \beta$.

Si les rayons AM, BN sont situés de part et d'autre de
points M, N sont encore des points correspondants de deux
symétriquement semblables. F′ est maintenant le point dou
droites doubles sont AB et la perpendiculaire en F′.

4. Considérons ensuite deux rayons quelconques AM, BN qui t
avec la même vitesse dans le même sens, de sorte que leu
d'intersection L décrit une circonférence passant par A et B.

Les points A et B, M et N se correspondront dans deux
directement semblables dont le point double π est à l'intersecti
circonférences LAB, LMN, L′AM, L′BN, L′ désignant l'inter
des droites AB, MN. Les triangles πAM, πBN sont consta
semblables entre eux, et le triangle πMN, semblable à πA
d'espèce constante.

Comme on a $\pi A : \pi B = \alpha : \beta$, le point π est situé sur la *circon*
(FF′), qui a reçu le nom de *circonférence de similitude*. Les trois c
(A, α), (B, β), (FF′) ont le même axe radical. Car si les deux premi
coupent en deux points réels H, H′, les distances HA et HB, H′A
sont respectivement égales à α et β; de plus, si l'on prend l'un
points pour le point double π, la droite MN passe par l'autre d
points. Le cas où les cercles A et B se coupent en des points imagi
peut se traiter par le principe de continuité ou par un calcul assez si

La circonférence (FF′) est le lieu des points d'où l'on voit les
cercles A et B sous des angles égaux.

5. Soient I, J deux points qui divisent respectivement AB, MN
un rapport donné. Les triangles πAB, πMN étant semblables, il e
de même des triangles πAI, πMJ. Par suite, lorsque M décrit la ci
férence (A, α), le point J décrit une circonférence de centre I.

On peut prendre pour I et J les projections de π sur AB et MN. A
puisque J décrit une circonférence, la droite MN enveloppe une co
ayant pour foyer π, pour cercle principal le cercle (I, IJ). Le poi
contact U de MN avec son enveloppe se trouve sur la droite joignan
symétriques de π par rapport à I et J. (*)

(*) J'ai déjà traité l'enveloppe de la droite MN dans la NCM, VI, pp. 463 e
par d'autres considérations dont je reproduirai une partie au § 7. Voir
Mathesis, (1), IX, p. 198.

Les tangentes en M et N faisant entre elles un angle constant, leur point d'intersection décrit un limaçon de Pascal. (*)

6. Si deux rayons AM, BN tournent avec la même vitesse dans des sens opposés, ils se correspondent dans deux figures symétriquement semblables dont le point double π' est encore situé sur la circonférence (FF'). Les droites doubles divisent les droites AB, MN joignant des couples de points homologues, harmoniquement dans le rapport de similitude $\alpha : \beta$; elles passent donc par les points F, F' et sont parallèles aux bissectrices intérieure et extérieure de l'angle ALB formé par les droites homologues AM, BN.

Les rayons homologues AM, BN se coupent sur une hyperbole équilatère dont AB est un diamètre et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle ALB.

7. Désignons de nouveau par I, J deux points qui divisent respectivement AB, MN dans un rapport donné $m : n$.

Si l'on mène les droites IM', IN' équipollentes à AM, BN, il est facile de voir que la droite M'N' est divisée en J dans le rapport $m : n$. La bissectrice IX de l'angle M'IN' ayant une direction fixe, on démontre sans peine que le point J décrit une ellipse de centre I et dont un axe est dirigé suivant IX.

Soient U le point où MN touche son enveloppe, V le point de concours des tangentes en M et N. Menons un second couple de rayons homologues AM', BN' et appelons U' le point d'intersection des droites MN et M'N', V' celui des droites MM', NN'. Le triangle V'MN coupé par la transversale M'N' donne

$$\frac{U'M}{U'N} \cdot \frac{M'V'}{M'M} \cdot \frac{N'N}{N'V'} = 1.$$

Le rapport M'M : N'N est constamment égal au rapport $\alpha : \beta$. En faisant tendre M'N' vers MN, on trouve, à la limite,

$$\frac{UM}{UN} = \frac{\alpha . NV}{\beta . MV} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\sin VMN}{\sin VNM} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\cos AMN}{\cos BNM}.$$

Or, $2\alpha \cos AMN$, $2\beta \cos BNM$ sont les longueurs des cordes que les cercles A, B interceptent sur MN, donc U partage MN soustractivement dans le rapport de ces cordes.

(*) Voir *Mathesis*, (1) I, p. 43.

Nous ne nous arrêtons pas à déterminer la nature de l'env
MN ni celle du lieu du point où se coupent les tangentes en M

8. Considérons maintenant un système de trois cercles (A, α
(C, γ) et appelons F, F′ les centres d'homothétie des cercles A et
ceux des cercles B et C, enfin E, E′ ceux des cercles A et C.

Les droites AD, BE, CF concourent en un même point dont
données barycentriques, dans le triangle ABC, sont $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$; l
D′, E′, F′, sont sur une même droite qui a pour coordonnées
les six centres d'homothétie sont les sommets d'un qua
complet.

Les trois cercles (DD′), (EE′), (FF′) se coupent aux deux
points S, S′ (réels ou imaginaires). En effet, les distances d'u
d'intersection des cercles (DD′), (EE′) aux trois centres A, B,
entre elles comme $\alpha : \beta : \gamma$, ce point appartient également au cercl
Ces cercles coupent orthogonalement le cercle ABC; car leu
mètres DD′, EE′ FF′ sont divisés harmoniquement par le cercle
Il résulte de là que la droite SS′ passe par le centre O du cercle
que

$$OS \cdot OS' = R^2.$$

Je rappelle ici, sans démonstration, le beau théorème dû à
Les triangles podaires des deux points S, S′ ***par rapport au triang***
sont symétriquement semblables.

9. Trois circonférences (A, α), (B, β), (C, γ) peuvent être consi
d'une infinité de manières comme un système de trois figures di
ment semblables : On choisit arbitrairement trois premiers rayon
BN, CP et on les fait tourner avec la même vitesse dans le même
leurs extrémités formeront toujours un triple de points homologu
trois figures semblables.

Ces trois figures, combinées deux à deux, admettent trois
doubles μ, υ, π, qui sont situés respectivement sur les circonfé
(DD′), (EE′), (FF′). Si l'on fait coïncider ces trois points avec S (o
trois rayons homologues sont dirigés suivant AS, BS, CS; les
gles SNP, SPM, SMN étant constamment semblables aux tri
SBC, SCA, SAB, le triangle MNP est toujours semblable à ABC.

10. Peut-on choisir les directions AM, BN, CP de manière
triangle MNP ait une surface constante? Ce problème, dont je m

déjà occupé dans mon mémoire *Sur les projections et contre projections d'un triangle*, p. 62, peut-être abordé directement.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) (x_3, y_3) les coordonnées des points A, B, C rapportés à deux axes rectangulaires OX, OY. Menons les droites OM_1, ON_1, OP_1 équipollentes aux rayons homologues AM, BN, CP et appelons (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3) les coordonnées des points M_1, N_1, P_1. Les coordonnées des points M, N, P étant $(x_1 + x'_1, y_1 + y'_1)$, etc., le double de la surface MNP sera

$$| x_1 + x'_1 \quad y_1 + y'_1 \quad 1 |;$$

pour simplifier l'écriture, représentons un déterminant par sa première ligne mise entre deux barres verticales. On peut encore écrire

$$\begin{aligned} 2\mathrm{MNP} &= | x_1 \; y_1 \; 1 | + | x'_1 \; y'_1 \; 1 | + | x_1 \; y'_1 \; 1 | + | x'_1 \; y_1 \; 1 | \\ &= 2\mathrm{ABC} + 2\mathrm{M_1N_1P_1} + | x_1 \; y'_1 \; 1 | + | x'_1 \; y_1 \; 1 |. \end{aligned}$$

L'aire $M_1N_1P_1$ ne change pas avec le triple de rayons homologues AM, BN, CP; par conséquent, la condition cherchée est

$$| x_1 \; y'_1 \; 1 | + | x'_1 \; y_1 \; 1 | = 0.$$

Cette égalité exprime que les triangles ABC, $M_1N_1P_1$ sont orthologiques (*Mathesis*, (3) I, 157). D'après cela, lorsque le triangle $M_1N_1P_1$ tourne autour de O (sans changer de forme), les perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur N_1P_1, P_1M_1, M_1N_1 doivent toujours concourir en un même point K. Mais les angles entre ces perpendiculaires restant constants, le point K se déplace sur trois circonférences passant respectivement par B et C, C et A, A et B, donc K est un point mobile sur la circonférence ABC. Il résulte de là que les triangles ABC, $M_1N_1P_1$ sont symétriquement semblables; les points S (ou S') et O en sont des points homologues, puisque

$$\mathrm{SA} : \mathrm{SB} : \mathrm{SC} = \alpha : \beta : \gamma = \mathrm{OM_1} : \mathrm{ON_1} : \mathrm{OP_1}.$$

Les circonférences symétriques des circonférences SBC, SCA, SAB par rapport aux cordes BC, CA, AB se coupent en un même point Σ, appelé *point jumeau* de S par rapport au triangle ABC et tel que les faisceaux S (ABC), Σ (ABC) sont symétriquement égaux. On en conclut que trois rayons homologues des cercles A, B, C doivent être dirigés suivant les droites $A\Sigma$, $B\Sigma$, $C\Sigma$, pour que le triangle MNP conserve une aire constante.

BIBLIOGRAPHIE.

Grundlinien der politischen Arithmetik, von Dr Moritz Kitt, der Handelsakademie in Olmütz. Leipzig, Teubner, 1901. Cartonné. P

Ce petit livre de 78 pages de texte suivi de 37 pages de tables expose avec un peu plus de détails que ne le font les traités d'alg taire, les applications des progressions et des logarithmes aux opérs cières à long terme. On y trouve aussi les deux opérations d'assur vie les plus connues : Rentes viagères sur une tête et assurance payable au décès.

Sommaire : *Première partie.* I. Valeur définitive d'un capital pl composé et problèmes qui s'en déduisent. II. Valeur actuelle d'u problème inverse. III. Annuité nécessaire au service d'un emprunt d'annuités. Tableaux d'amortissement d'un emprunt divisé en oblig boursables au pair ou au-dessus du pair. Cours ou prix d'une obli certain taux. Tableau d'amortissement d'un emprunt dans le système anticipés (Anticipative Zinsen). Dans le tableau de la page 44, les résidus doivent être calculés à $4\frac{1}{2}$ °/₀ et non à 5 °/₀. IV. Quelques p calcul des probabilités et tables de mortalité (6 pages). V. Rente viagè tête, immédiate ou différée. VI. Survivances ou assurances d'un capit au décès d'une personne désignée.

Deuxième partie. Elle se compose de quatre tables : La première re logarithmes à 9 décimales de $1+\frac{p}{100}$ et de $1-\frac{p}{100}$ pour les taux d variant par $\frac{1}{4}$; la deuxième renferme les valeurs à 8 décimales de $v^n=\left(1\right.$ pour les mêmes taux et pour $n=1, 2, 3, \ldots 50$. La troisième renferm tables de mortalité, de Florencourt, de Brune-Fischer, des compagnies et des rentiers allemands. Enfin la quatrième donne les valeurs des D et S (D_x et N_x, d'après les notations anglaises), relatifs aux tables de précédentes.

En résumé, les Grundlinien de M. Kitt renferment sous un petit v partie essentielle de l'arithmétique dite politique. (E

Tratado de Trigonometria plana por Carlos Wargny, Profesor del el liceo de Valparaiso y en la escuela naval. — Valparaiso, Imprenta Gil (In-8° de 274 pages et 95 figures).

L'ouvrage est divisé en cinq livres dont les deux premiers ont pour lignes trigonométriques et leurs relations, le troisième la construction d le quatrième la résolution des triangles, le dernier la résolution des autre géométriques, des problèmes de topographie et quelques questions supérieure. De nombreux exercices sont proposés à la fin de chaque chapit

Ce livre nous paraît convenir comme manuel pour les classes.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×10. *Sur les triangles orthologiques.* Si l'on considère deux triangles ABC, A'B'C' et que l'on désigne par A (B'C')... le triangle dont les côtés sont (CA, AB, B'C'),... il est évident que la conjuguée isogonale AY d'une droite AX est la même dans le triangle A (B'C') que dans le triangle ABC. Dès lors, si trois droites issues des sommets A, B, C dans A (B'C'), B (C'A'), C (A'B) sont concourantes, leurs conjuguées isogonales par rapport à ces mêmes triangles le sont également.

Ceci posé, deux triangles sont *orthologiques* si les *hauteurs* de A, B, C dans A (B'C'), B (C'A'), C (A'B') sont concourantes, et alors, les hauteurs de A', B', C' dans A' (BC), B' (CA), C' (AB) le sont également. Par suite, la même propriété a lieu pour les *syhauteurs* (*) et elle est également réciproque. En d'autres termes, *deux triangles orthologiques sont toujours synorthologiques*, et réciproquement ; ils ont quatre centres, deux d'orthologie et deux de synorthologie.

La remarque très simple qui conduit à l'indication de cette propriété a beaucoup d'autres applications. (L. Ripert).

11. *Sur la question d'examen*, n° 1037 (*Mathesis*, (3) II, p. 31). Un correspondant nous a demandé de traiter cette question par la règle de l'Hôpital : x et y étant liés par la relation $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, il s'agit de trouver la limite du rapport $\frac{\sin (x-\alpha)}{\sin (y-\beta)}$ pour $x = \alpha$, $y = \beta$.

Considérons y comme fonction de x en vertu de la relation donnée

$$\sin x \sin \beta - \sin \alpha \sin y = 0 ;$$

nous aurons

$$\cos x \sin \beta - \sin \alpha \cos y \frac{dy}{dx} = 0.$$

(*) J'appelle avec M. Barisien (IM., 1901, p. 84) *syhauteurs* d'un triangle les droites qui joignent ses sommets au centre du cercle circonscrit (L. R.). — Ne devrait-on pas dire *synhauteurs*, si l'on veut souder un mot français avec une préposition grecque (P. M.)?

La limite cherchée est égale à la limite du rapport des déri deux termes de la fraction proposée, ou égale à

$$\lim \frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(y-\beta)\frac{dy}{dx}} = \lim \frac{dx}{dy} = \lim \frac{\sin\alpha\cos y}{\cos x \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

*118. *Sur le problème de Malfatti, par* M. E. N. Barisien. La s habituelle du problème de Malfatti (*étant donné un triangle décrire trois cercles* O, O′, O″, *inscrits respectivement dans les* A, B, C, *et tels que chacun d'eux touche les deux autres*) suppo trois cercles O, O′, O″ à l'intérieur du triangle ABC.

On peut traiter la question dans toute sa généralité, c'est-à placer les centres O, O′, O″ aussi bien sur les bissectrices extérie que sur les bissectrices intérieures du triangle ABC. On voit qu problème pour lequel on ne mentionne ordinairement qu'une seule s tion, en comporte un plus grand nombre; la discussion complète différents cas a été faite par M. Derousseau dans les *Mémoires de Société Royale des sciences de Liége*, (2) XVIII.

Voici un aperçu de vingt solutions dans le cas où le triangle ABC équilatéral, cas qui semble avoir été résolu, pour la première fois, p *Jacques Bernoulli*.

Soient x, y, z les rayons des trois cercles O, O′, O″ et a le côté d triangle équilatéral.

1re *solution*. $\quad x = y = z = \frac{a}{4}(\sqrt{3}-1).$

2e *solution*. $\quad x = y = z = \frac{a}{4}(3\sqrt{3}+1).$

3e, 4e et 5e *solutions*.

$$x = \frac{a}{12}(3\sqrt{3}+5), \quad y = z = \frac{a}{4}(\sqrt{3}-1).$$

(On a deux autres solutions en permutant les lettres x, y, z).

6e, 7e *et* 8e *solutions*.

$$x = \frac{a}{12}(3\sqrt{3}-5), \quad y = z = \frac{a}{4}(\sqrt{3}+1).$$

9e, 10e *et* 11e *solutions*.

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{12}(3\sqrt{3}+5), \quad y = z = \frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

12e, 13e *et* 14e *solutions.*

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{12}(3\sqrt{3}-5), \quad y = z = \frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

15e, 16e *et* 17e *solutions.*

$$x = y = z = \frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

18e, 19e *et* 20e *solutions.*

$$x = y = z = \frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

Les *huit* premières solutions sont telles *que les centres* O, O′, O″ *sont situés sur les bissectrices intérieures des angles* A, B, C; les *douze* autres solutions correspondent aux cas *où deux centres* O, O′, O″ *sont situés sur les bissectrices extérieures de deux angles du triangle* ABC, *alors que le troisième centre est situé sur la bissectrice intérieure du troisième angle.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1168.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 216 et p. 239).

Soient F, F′ *les foyers d'une conique,* MA *et* MB *deux tangentes à la courbe,* A *le point de contact de l'une d'elles et* B *le point où la seconde rencontre la tangente parallèle à* MA; *démontrer que les cercles circonscrits aux triangles* MAF *et* MBF′ *se coupent au point de rencontre des droites* AF′ *et* BF. (M. Stuyvaert.)

Solution par M. R. Buysens. Appelons A′ le point diamétralement opposé à A, I le point de rencontre de AF′ et BF, I′ celui de AF et BF′ et rappelons cette propriété des coniques :

L'angle sous lequel on voit du foyer le segment d'une tangente mobile intercepté par deux tangentes fixes est constant.

En vertu de ce théorème et si FX est parallèle à AM et de même sens, on a :

$$\text{angle MFB} = \text{XFA}' = \text{MAF}'.$$

Les angles MFB et MAF′ étant égaux et de même sens, les quatre points M, A, F, I sont concycliques; il en est évidemment de même des quatre points M, A, F′, I′.

Considérons maintenant le quadrilatère complet formé par les quatre droites AF, AF', BF, BF'; on sait que les quatre cercles AFI, AF'I', BFI', BF'I se coupent au même point M; ce qui achève de démontrer le théorème.

Solution analytique par M. Merlin. — La question 1188 a été *retirée*, parce que l'auteur en avait donné une solution dans une note mathématique, *Mathesis*, (2), VIII, 195. Nous publions la solution de M. Buysens parce qu'elle diffère de celle de M. Stuyvaert.

Question 1229.

(Voir *Mathesis*, (2) IX, p. 176.)

Soient, sur une circonférence donnée, A *et* B *deux points fixes et* M *un point variable, et soit* O *un point donné hors du plan* ABM. *Démontrer que les sommets des cônes passant par les cercles circonscrits aux triangles* OAM, OBM *se trouvent sur deux droites* (Énoncé rendu plus précis). (C. Juel).

Solution par M. Gustave Gérard (Liége). Appelons Σ la sphère passant par la circonférence ABM et le point O. Par les deux cercles OAM, OBM situés sur cette sphère, on peut toujours faire passer deux cônes, dont les sommets S, S' sont situés sur la droite conjuguée avec la ligne d'intersection OM de leurs plans, donc sur la droite L suivant laquelle se coupent les plans tangents menés à la sphère Σ en O et en M. Le plan LA coupant la circonférence OMB aux points P, Q, la droite AP est, par exemple, une génératrice du cône S, et la droite AQ une génératrice du cône S'.

Pour faire voir que le lieu de S est une droite, observons d'abord que ce lieu est situé dans le plan tangent à Σ en O; il suffit donc de montrer que la droite APS engendre un plan ou que le lieu de P sur la sphère Σ est un petit cercle passant par A. Pour cela, effectuons une transformation par rayons vecteurs réciproques en prenant O pour pôle. La sphère Σ se transforme en un plan σ perpendiculaire au rayon mené au pôle; si a, b, m sont les transformés des points A, B, M, le point m décrit sur le plan σ une circonférence passant par a et b; les circonférences AOM, BOM se changent en des droites am, bm. Le plan LA découpe dans la sphère Σ un petit cercle APQ dont le pôle appartient à la droite OM; et ce cercle se transforme en un cercle apq dont le centre, d'après

un théorème de Chasles, se trouve sur le rayon vecteur OM du pôle du cercle APQ, c'est-à-dire en m. Finalement, on obtient le point p à la rencontre de la droite bm et du cercle décrit de m comme centre avec ma pour rayon. Il reste à chercher quel est le lieu tracé par p dans le plan σ; or, si l'on appelle α l'un des angles sous-tendus par la corde ab dans le cercle amb, l'angle apb est, visiblement, égal à $\frac{1}{2}\alpha$. Le lieu de p est donc un cercle passant par a et b; si nous revenons à la figure primitive, le lieu de P sera un petit cercle tracé sur la sphère Σ et passant par A et B. On en conclut que le lieu de S est une droite. Le lieu de S' est une autre droite qui rencontre la première au point où la droite AB rencontre le plan tangent mené en O.

Le petit cercle AQB se transforme par inversion en un segment capable de l'angle $90° + \frac{1}{2}\alpha$ décrit sur la corde ab.

Remarques. I. Les centres des cercles apb, aqb se trouvent sur le cercle amb, aux extrémités du diamètre perpendiculaire à ab; par suite, les pôles des petits cercles APB, AQB sont situés sur deux génératrices du cône (O, AMB). En outre, l'angle droit des cercles apb, aqb se conserve quand on revient à la figure primitive.

II. La droite SS' enveloppe la conique, suivant laquelle le plan tangent en O à Σ rencontre le cône circonscrit à cette sphère le long de la circonférence donnée AMB.

---

*Question 1330.

(Voir *Mathesis*, (3) I, p. 176).

Deux cercles de centres O, O' *se coupent en deux points* A, B. *On mène les diamètres* AOD, AO'D' *et la bissectrice de l'angle* OAO', *qui coupe les deux circonférences respectivement en* C, C'. *On mène aussi en* A *les tangentes aux cercles* O, O'; *soient* E', E *les points où elles rencontrent l'autre cercle. Cela posé :*

1° *La corde commune* AB *est moyenne proportionnelle entre les cordes* BE, BE';

2° *La tangente commune aux deux cercles* FF' *est moyenne proportionnelle entre les cordes* DC, D'C'. (Seydewitz.)

Solution par MM. Emmerich et Déprez. Les angles droits DAE', D'AE

font voir que angle BEA = BDA = BAE', BAE = BD'A = BE'A. Les triangles BEA, BAE' sont donc semblables, ce qui donne

$$BE : BA = BA : BE'.$$

On a $$\overline{FF'}^2 = \overline{OO'}^2 - (AO - AO')^2,$$

donc $$\overline{4FF'}^2 = \overline{DD'}^2 - (AD - AD')^2.$$

Or, on tire de triangles rectangles :

$$\overline{DD'}^2 = (DC + D'C')^2 + (AC - AC')^2,$$

$$(AD - AD')^2 = (DC - D'C')^2 + (AC - AC')^2.$$

Ainsi, on a

$$\overline{4FF'}^2 = 4DC.D'C'.$$

C. Q. F. D.

Question 1337.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 216).

Soit un triangle ABC. *Soit* M *un point quelconque de la circonférence circonscrite qui se projette en* A', B', C', *sur* BC, CA, AB. *Sur les hauteurs partant de* A, B, C *on prend des longueurs* AA_1, BB_1, CC_1 *respectivement équipollentes à* MA', MB', MC'. *Démontrer que les points* A_1, B_1, C_1 *sont sur la droite de Simson du point* M_1 *diamétralement opposé à* M. *Lorsque le point* M *est quelconque, les triangles* $A_1B_1C_1$, A'B'C' *sont équivalents.* (E. Lemoine.)

Solution par MM. Emmerich, Déprez et Droz Farny. On sait que les droites de Simson Δ, Δ_1 de deux points M, M_1 diamétralement opposés se coupent sous un angle droit, et que les pieds A' et A'_1; B' et B'_1; C' et C'_1, sont symétriques par rapport au milieu du côté correspondant du triangle.

Pour démontrer que A_1 est sur la droite Δ_1, menons par M la parallèle MN à B'C et par A' la parallèle A'N à Δ_1. On forme ainsi le triangle MA'N et le rectangle MB'CN inscrits au même cercle MB'CA'N. De $MN = B'C = AB'_1$, $MA' = AA_1$, angle $A'MN = A_1AB'_1$ on conclut alors que $A_1B'_1$ est parallèle à A'N, c'est-à-dire que A_1 est sur la droite Δ_1.

En appelant x, y, z les coordonnées normales absolues d'un point quelconque M, on a, pour l'aire de son triangle podaire A'B'C', $\pm \frac{1}{2} \Sigma yz \sin A$,

suivant que le point M est situé à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle circonscrit. L'aire du triangle $A_1B_1C_1$ a pour expression

$$\pm \tfrac{1}{2} \Sigma (y - 2R\cos B)(z - 2R\cos C)\sin A =$$
$$\pm \tfrac{1}{2} [\Sigma yz \sin A - 2R\Sigma x (\sin B\cos C + \cos B \sin C)$$
$$+ 4R^2 \Sigma \sin A \cos B \cos C].$$

Or

$$2R\Sigma x(\sin B\cos C + \cos B\sin C) = 2R\Sigma x \sin A =$$
$$4R^2 \sin A \sin B \sin C = 4R^2\Sigma \sin A\cos B\cos C$$

donc $$A'B'C' = A_1B_1C_1.$$

Remarques (dues à M. Déprez). — I. La seconde partie de la question 1337 admet la généralisation suivante :

Par un même point M *du plan d'un triangle* ABC, *on mène trois droites quelconques* MA', MB', MC', *rencontrant respectivement les côtés* BC, CA, AB *aux points* A', B', C', *et par les sommets du triangle* ABC *on mène les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *respectivement équipollentes aux droites* MA', MB', MC'. *Les triangles* A'B'C', $A_1B_1C_1$ *seront équivalents.*

En effet, si $A_2B_1C_2$ est le triangle formé par les droites AA_1, BB_1, CC_1 suffisamment prolongées, on a, en observant les règles des signes des aires et des longueurs :

$$2A_1B_1C_1 = 2\Sigma A_1B_2C_1 + 2A_2B_2C_2$$
$$= \Sigma (AB_2 - AA_1)(CB_2 - CC_1)\sin B_2 + 2A_2B_2C_2$$
$$= \Sigma AB_2 . CB_2 \sin B_2 + \Sigma AA_1 . CC_1 \sin B_2$$
$$= \Sigma AA_1 (CB_2 \sin B_2 + BC_2 \sin C_2) + 2A_2B_2C_2.$$

Or

$$\Sigma AB_2 . CB_1 \sin B_2 = 2ABC - 2A_2B_2C_2,$$
$$\Sigma AA_1 . CC_1 \sin B_2 = 2A'B'C',$$
$$\Sigma AA_1 (CB_2 \sin B_2 + BC_2 \sin C_2) = 2ABC.$$

Par conséquent $A_1B_1C_1 = A'B'C'$.

II. Si l'on mène les droites AA'_1, BB'_1, CC'_1 équipollentes à A'M, B'M, C'M, l'aire du triangle $A'_1B'_1C'_1$ est égale à A'B'C' + 2ABC. La démonstration est analogue à la précédente.

III. La première partie de la question 1337 se généralise facilement d'abord au moyen d'une projection cylindrique et ensuite par le principe de continuité, comme il suit :

Considérons une conique U circonscrite au triangle ABC et ayant pour centre le point O; soient M, M_1 deux points de U diamétralement

opposés et H l'anticomplémentaire de O. On mène par M et M_1 des parallèles aux droites AH, BH, CH; ces lignes rencontrent les côtés correspondants du triangle ABC aux points A', A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1. Sur AH, BH, CH on prend les longueurs AA_1, BB_1, CC_1 équipollentes à MA', MB', MC'. Les six points A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1 seront collinéaires.

Note. La proposition contenue dans la première remarque de M. Déprez est très curieuse. En voici une démonstration analytique.

Prenons le point M pour origine de deux axes rectangulaires et désignons par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), les coordonnées des points A, B, C. Les coordonnées des points A', B', C' étant représentées par

$$(\rho_1 \cos\alpha_1, \rho_1 \sin\alpha_1), \quad (\rho_2 \cos\alpha_2, \rho_2 \sin\alpha_2), \quad (\rho_3 \cos\alpha_3, \rho_3 \sin\alpha_3),$$

celles de A_1, B_1, C_1 seront

$$(x_1 + \rho_1 \cos\alpha_1, y_1 + \rho_1 \sin\alpha_1), (x_2 + \rho_2 \cos\alpha_2, y_2 + \rho_2 \sin\alpha_2)\ldots$$

Alors

$$2A_1B_1C_1 = \begin{vmatrix} x_1 + \rho_1 \cos\alpha_1 & y_1 + \rho_1 \sin\alpha_1 & 1 \\ x_2 + \rho_2 \cos\alpha_2 & y_2 + \rho_2 \sin\alpha_2 & 1 \\ x_3 + \rho_3 \cos\alpha_3 & y_3 + \rho_3 \sin\alpha_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant peut-être décomposé en quatre déterminants :

$$\begin{vmatrix} \rho_1 \cos\alpha_1 & \rho_1 \sin\alpha_1 & 1 \\ \rho_2 \cos\alpha_2 & \rho_2 \sin\alpha_2 & 1 \\ \rho_3 \cos\alpha_3 & \rho_3 \sin\alpha_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \rho_1 \cos\alpha_1 & \rho_1 \sin\alpha_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \rho_2 \cos\alpha_2 & \rho_2 \sin\alpha_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \rho_3 \cos\alpha_3 & \rho_3 \sin\alpha_3 & 1 \end{vmatrix};$$

le premier de ces déterminants = 2A'B'C' et les trois autres sont nuls parce que les triples de points A'BC, AB'C, ABC' sont collinéaires.

Existe-t-il une démonstration plus simple de ce théorème?

Il existe un point qui a les mêmes coordonnées barycentriques par rapport à chacun des triangles ABC, $A_1B_1C_1$; ces coordonnées sont celles de M par rapport à A'B'C'.

La proposition ne me paraît pas susceptible de s'étendre au tétraèdre.

(J. N.).

Question 1343.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 264.)

Le lieu des centres des coniques qui passent par deux points donnés P_1, P_2 ***et touchent deux droites données*** d_1, d_2, ***se compose généralement de deux coniques. Cas particuliers.***

Solution par M. Emmerich. Nous prenons pour axes des coordonnées positives les côtés de l'angle des droites d_1, d_2 qui renferme le point P_1; le point P_2 est supposé situé dans le même angle ou dans l'angle opposé par le sommet, autrement il n'y aurait pas de conique réelle satisfaisant aux conditions de la question.

L'équation de la conique variable est de la forme

$$(lx + my + 1)^2 - 2k^2xy = 0. \tag{1}$$

Les équations du centre sont

$$l(lx + my + 1) = k^2y, \tag{2}$$
$$m(lx + my + 1) = k^2x, \tag{3}$$

et l'on a les égalités de condition

$$lx_1 + my_1 + 1 = k\sqrt{2x_1y_1}, \tag{4}$$
$$lx_2 + my_2 + 1 = k\sqrt{2x_2y_2}, \tag{5}$$

(x_1, y_1) et (x_2, y_2) étant les coordonnées des points P_1 et P_2. On obtient l'équation du lieu du centre en éliminant l, m, k entre les égalités (2), (3), (4) et (5).

Des équations (2) et (3) on déduit

$$\frac{l}{y} = \frac{m}{x} = \frac{k^2}{lx + my + 1}. \tag{6}$$

En prenant pour inconnue auxiliaire la valeur p des rapports (6), on peut écrire $\quad l = py, \quad m = px \quad$ et $\quad k^2 = 2p^2xy + p. \tag{7}$

Les radicaux $\sqrt{2x_1y_1}$, $\sqrt{2x_2y_2}$ portent implicitement le double signe $\pm$; mais puisque k peut représenter un nombre positif ou négatif, il suffit de prendre le premier radical avec le signe $+$ et le second avec le double signe; le signe $+$ répond au cas où les points P_1, P_2 sont situés du même côté de la corde de contact de l'angle d_1d_2, le signe — au cas où cette corde passe entre P_1 et P_2. Désignons les deux radicaux avec

leurs signes par r_1 et r_2 et remplaçons l par py, m par px; les équations (4) et (5) prendront la forme

$$kr_1 - p(xy_1 + yx_1) = 1, \tag{8}$$

$$kr_2 - p(xy_2 + yx_2) = 1. \tag{9}$$

Supposons d'abord les points P_1, P_2 sur une même droite passant par l'origine; nous aurons $x_2 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda y_1$, λ étant une quantité positive ou négative suivant que P_1 et P_2 sont du même côté de O ou non. L'équation (9) devient

$$\pm k\lambda r_1 - p\lambda(xy_1 + yx_1) = 1. \tag{9'}$$

Pour le premier terme de (9'), on ne peut adopter que le signe —, circonstance qui s'explique par ce fait que le segment P_1P_2 est divisé harmoniquement par le point O et sa polaire. L'élimination de k et p entre (7), (8) et (9') se fait facilement, et l'on obtient pour le lieu demandé une seule conique.

Si les points P_1, P_2 ne sont pas en ligne droite avec O, résolvons (8) et (9) par rapport à k et p; en posant

$$\alpha \equiv x(y_1 - y_2) + y(x_1 - x_2),$$

$$\beta \equiv x(y_1r_2 - y_2r_1) + y(x_1r_2 - x_2r_1),$$

on trouve

$$p = \frac{r_1 - r_2}{\beta}, \quad k = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ces valeurs étant portées dans l'équation (7) on obtient pour le lieu demandé

$$\alpha^2 - 2(r_1 - r_2)^2 xy - (r_1 - r_2)\beta = 0. \tag{10}$$

Eu égard au double signe de r_2, cette équation représente deux coniques C_1, C_2. Le binome caractéristique ayant pour expression

$$2(r_1 - r_2)^2 (\sqrt{x_1y_2} \mp \sqrt{y_1x_2})^2,$$

ces courbes sont simultanément des hyperboles ou des ellipses suivant que les points P_1, P_2 sont situés ou non dans le même angle des droites d_1, d_2. Elles ont pour centre commun le point $\left(\frac{x_1 + x_2}{4}, \frac{y_1 + y_2}{4}\right)$, qui est au milieu de la droite joignant O au milieu du segment P_1P_2.

$\alpha = 0$ est l'équation de la médiane du triangle formé par les droites d_1, d_2, P_1P_2; $\beta = 0$ représente la droite conjuguée harmonique par

rapport à d_1 et d_2 de la droite joignant O au point qui divise P_1P_2 dans le rapport $r_1 : -r_2$.

Si $r_1 = r_2$, les points P_1, P_2 sont situés sur une même hyperbole ayant pour asymptotes les droites d_1, d_2 et le lieu considéré est la droite $\alpha = 0$ à compter doublement, et une conique C_2.

Solution par M. J. Rose. On choisit pour triangle de référence le triangle formé par les deux droites et par la droite joignant les deux points donnés. L'équation du faisceau des droites projetant du sommet (0, 0, 1) les deux points donnés est $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ (1).

Par suite les coniques considérées ont pour équation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 \pm 2\sqrt{bc}\,yz \pm 2\sqrt{ac}\,xz + cz^2 = 0.$$

La droite de l'infini ayant pour équation $c_1x + c_2y + c_3z = 0$, on a

$$ax + hy \pm \sqrt{ac}\,z = \rho c_1$$
$$hx + by \pm \sqrt{bc}\,z = \rho c_2$$
$$\pm\sqrt{ac}\,x \pm \sqrt{bc}\,y + cz = \rho c_3.$$

En éliminant ρ et c entre ces équations, on aura les équations du lieu. On doit prendre les radicaux avec des signes de même espèce ou d'espèces contraires.

On obtient ainsi en supprimant $z = 0$ qui ne convient pas, les équations suivantes

$$(c_1\sqrt{b} \mp c_2\sqrt{a})(x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b})[c_2(ax + hy) - (hx + by)]$$
$$+ c_2(ax + hy) - c_1(hx + by)]^2 - c_3(c_1\sqrt{b} \mp c_2\sqrt{a})[\sqrt{b}(ax + hy)$$
$$\mp\sqrt{a}(hx + by)]\,z = 0.$$

Ces équations représentent deux coniques.

Cas particuliers. 1° Les deux points donnés sont sur les deux droites données. Alors les coniques sont tangentes en ces points aux deux droites. Le faisceau (1) se réduisant à $hxy = 0$, a et b sont nuls. Le lieu se réduit aux deux droites coïncidentes $(c_2y - c_1x)^2 = 0$ passant par (0, 0, 1). 2° L'un des points est sur l'une des droites. Dans ce cas les coniques sont tangentes à la droite considérée en ce point; a ou b est nul. Le lieu se compose encore de deux coniques.

On pourrait encore examiner les cas où les points donnés sont conjugués par rapport à d_1 et d_2, ou confondus sur une droite donnée, etc.

×Question 1849.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 280.)

Si l'on donne les équations (*où x, y, z sont inégaux*),

$$a\cos(y+z)+b\cos(y-z)+c=0, \tag{1}$$
$$a\cos(z+x)+b\cos(z-x)+c=0, \tag{2}$$
$$a\cos(x+y)+b\cos(x-y)+c=0, \tag{3}$$

on a nécessairement

$$a^2+2bc-b^2=0. \qquad \text{(Cayley).}$$

L'équation (1) se ramène à

$$(a+b)\cos y\cos z-(a-b)\sin y\sin z+c=0.$$

Si on la représente par

$$A\cos y+B\sin y+C=0,$$

et qu'on remplace $\sin y$ par $\sqrt{1-\cos^2 y}$ ou $\cos y$ par $\sqrt{1-\sin^2 y}$, on trouve

$$(A^2+B^2)\cos^2 y+2AC\cos y+C^2-B^2=0, \tag{4}$$
$$(A^2+B^2)\sin^2 y+2BC\sin y+C^2-A^2=0. \tag{5}$$

Comme l'équation (2) ne diffère de (1) que par le changement de y en x, les deux racines de (4) sont $\cos y$, $\cos x$ et celles de (5) sont $\sin y$, $\sin x$; par conséquent

$$\cos y\cos x=\frac{C^2-B^2}{A^2+B^2}, \qquad \sin y\sin x=\frac{C^2-A^2}{A^2+B^2}. \tag{6}$$

L'équation (3) étant mise sous la forme

$$(a+b)\cos x\cos y-(a-b)\sin x\sin y+c=0, \tag{7}$$

on déduit, de (6) et (7),

$$(a+b)(C^2-B^2)-(a-b)(C^2-A^2)+c(A^2+B^2)=0,$$

ou

$$2bc^2+A^2(c+a-b)+B^2(c-a-b)=0.$$

Or,

$$A^2=(a+b)^2\frac{1+\cos 2z}{2}, \quad B^2=(a-b)^2\frac{1-\cos 2z}{2};$$

l'équation (8) revient donc à

$$4bc^2+(a+b)^2(c+a-b)+(a-b)^2(c-a-b)$$
$$+\cos 2z\,[(a+b)^2(c+a-b)+(a-b)^2(a+b-c)]=0,$$

ou à

$$(a^2+2bc-b^2)(a\cos 2z+b+c)=0. \tag{9}$$

L'égalité $a\cos 2z + b + c = 0$ correspond à l'hypothèse $x = y = z$ dans les équations (1) et (2); en excluant ce cas, on a l'équation de condition

$$a^2 + 2bc - b^2 = 0. \qquad \text{(J. N.)}$$

Autre solution par M. Emmerich. — En combinant les équations proposées par soustraction, M. Babisien en déduit

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(y+z)} = \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(z+x)} = \frac{\operatorname{tg} z}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+y)} = \frac{b-a}{b+a}.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

1046. Un angle constant tourne autour d'un point fixe A d'un cercle O; ses côtés coupent le cercle en B et C. Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC, et A'', B'', C'' les pieds des trois hauteurs.

1° Les droites A'B', A'C' tournent autour de deux points fixes, et la droite B'C' enveloppe un cercle. 2° Les hauteurs passent chacune par un point fixe. 3° La droite B''C'' reste parallèle à une direction fixe, et les droites A''B'', A''C'' enveloppent chacune un cercle. 4° Le cercle des neuf points enveloppe deux cercles fixes. 5° Les droites de Simson du triangle ABC relatives aux milieux des deux arcs BC passent chacune par un point fixe. (*J. de Vuibert.*)

1° Les points B', C' se meuvent sur la circonférence de diamètre AO; B'C' est une corde de longueur constante.... Les prolongements de A'B', A'C' rencontrent la circonférence O en des points fixes D, E; car les angles AB'D, AC'E sont égaux à BAC. 2° Les angles ABH, ACH étant constants, les droites BH, CH rencontrent la circonférence O en des points fixes F, G. 3° La droite B'' C'' est parallèle à la tangente menée en A au cercle O. — Comme $AH = 2OA'$, H décrit une circonférence. Soit F' le milieu de la droite AF; comme $HB'' = B''F$, $F'B'' = \frac{1}{2}AH = OA'$, et B'' décrit une circonférence. Mais l'angle compris entre B''F' et le prolongement de A''B'', égal à AHB'', est constant; par conséquent A''B'' est tangent à un cercle de centre F'...

4° Comme H décrit une circonférence, le centre O du cercle des neuf points de ABC parcourt également une circonférence; d'ailleurs ce cercle a un rayon constant....

5. Le rayon OA' passe par le milieu M de l'arc BC; M étant sur la bissectrice de l'angle BAC, la droite de Simson de ce point est la perpendiculaire abaissée de A' sur AM. Soit N le point où cette ligne rencontre le rayon OA; le triangle OA'N est isocèle, car la bissectrice de l'angle BAC est aussi bissectrice de l'angle HAO. Il en résulte $ON = OA'$.

1047. Deux paraboles de grandeur fixe ont un sommet commun et pivotent autour de ce point en conservant leurs axes perpendiculaires. Montrer que le lieu du centre du cercle passant par leurs points d'intersection (dont deux sont imaginaires) est un cercle. (E. N. Barisien.)

Soient $y^2 = 2px$. $x^2 = 2p'y$ les équations de ces courbes dans leur position initiale; en faisant la somme on obtient l'équation d'un cercle passant les points d'intersection de ces courbes :

$$(y - p')^2 + (x - p)^2 = p^2 + p'^2, \text{ etc.}$$

La proposition est d'ailleurs évidente.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1365. M étant le centre et m un axe de symétrie d'une conique quelconque circonscrite au triangle donné ABC, étudier la transformation (M, m).

×**1366.** On pense un nombre moindre que 1000; on le divise par 42, par 48, par 56 et par 63, et on multiplie les restes respectivement par 96, par 21, par 90 et par 800; enfin on fait la somme des quatre produits. Connaissant cette somme, donner une règle générale pour trouver le nombre pensé. (E. Gelin.)

×**1367.** Si A, B, C sont les trois angles d'un triangle, démontrer l'identité

$$\Sigma \cos A \sin (B - C) \cos^2 (\varphi - A) = \cos 2\varphi \sin (B - C) \sin (C - A) \sin (A - B).$$

(A. C.)

1368. Si deux triangles ABC, A'B'C' sont tels que les parallèles à B'C', C'A', A'B' menées respectivement par A, B, C concourent en un même point D, on sait que les parallèles à BC, CA, AB menées respectivement par A', B', C' concourent en un même point (*Mathesis* (1), III, p. 86).

Si ces triangles sont homologiques, démontrer que l'axe d'homologie passe au milieu de la distance DD'. (Fuhrmann).

Nous extrayons cette proposition du mémoire *Kollineare und orthologische Dreiecke*, qui vient de paraître dans le programme de l'Oberrealschule auf der Burg à Königsberg (Prusse).

Les triangles ABC, A'B'C' peuvent être dits *métaparallèles*; D et D' en sont les deux *métapôles*. (J. N.).

LA GÉOMÉTROGRAPHIE DANS L'ESPACE OU STÉRÉOMÉTROGRAPHIE;

par M. É. Lemoine(*).

J'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, à la séance du 16 juillet 1888, une courte Note dont le développement est devenu la Géométrographie plane. Celle-ci a des applications qui ont mis rapidement en évidence son utilité pratique, mais elle a un côté tout spéculatif qui reste entier si l'on crée un ensemble de semblables considérations se rapportant à l'espace à trois dimensions, où nul instrument analogue à la règle ou au compas ne peut effectuer de constructions. En effet, en dehors des applications, voici le rôle de la Géométrographie. Les géomètres, depuis les Grecs nos maîtres, partent de données qui sont les êtres géométriques et en déduisent des résultats par un *chaînon* de raisonnements dont les *mailles* se composent, en Géométrie canonique plane, de droites et de circonférences; en Géométrie de l'espace, ils y ajoutent les plans et les sphères. Un raisonnement est simple quand il y a peu de chaînons, quelles qu'en soient les mailles; mais si l'on applique la Géométrographie spéculative des droites et des cercles à la construction d'épures où ils sont tracés par la règle et le compas, on cherche à réduire au minimum le nombre qu'il en faut tracer, de sorte que, si la Géométrie ne s'occupe que des chaînons, la Géométrographie ne s'occupe que des mailles. L'étude systématique de la simplicité des constructions est donc une chose nouvelle et toute différente de la simplicité didactique de la Géométrie; et ce problème pratique conduit à celui-ci, qui est du domaine de la spéculation pure et dont on ne s'est jamais préoccupé : *arriver des données au résultat en employant le moins possible de droites et de circonférences comme intermédiaires*. La Géométrographie canonique dans l'espace aura donc pour but de faire passer le géomètre des données aux résultats en employant le moins possible de droites, de circonférences, de plans et de sphères. Il ne reste plus qu'à imaginer un symbolisme logique pour distinguer et pour compter les opérations effectuées.

Je conserve les opérations de la Géométrographie plane.

(*) Note présentée par M. Haton de la Goupillière, dans la séance du 3 décembre 1900, à l'Académie des Sciences de Paris. — Sur la Géométrographie, voir *Mathesis*, 1888 (1), VIII, 217-222; 241-244.

Faire passer *un* bord de la règle par *un* point placé, c'est op. : (R_1) ; donc, *spéculativement*, faire passer le bord de la règle par deux points, c'est op. : ($2R_1$).

Tracer la droite, c'est op. : (R_2).

Mettre une pointe du compas en un point placé, c'est op. : (C_1), donc, *spéculativement*, prendre la distance de deux points avec le compas, c'est op. : ($2C_1$).

Mettre une pointe du compas en un point *indéterminé* d'une ligne tracée, c'est op. : (C_2).

Tracer la circonférence, c'est op. : (C_3).

J'imagine maintenant un instrument idéal, le *planque*, qui tracerait les plans dans l'espace comme la règle trace les droites, et un autre instrument idéal, le *sphérêtre*, qui tracerait les sphères dans l'espace comme le compas les cercles dans le plan. Je suppose que les instruments se maintiennent dans l'espace où on les place, et que les plans ou les sphères qu'ils ont tracés restent tracés.

Faire passer le planque par un point, c'est : (P_1) ; par deux points ou par une droite, c'est : ($2P_1$) ; par trois points ou par une droite et un point ou par deux droites qui se coupent ou par une courbe plane placée, c'est : ($3P_1$) ; tracer le plan, c'est : (P_2).

Mettre une pointe du sphérêtre en un point *déterminé*, c'est : (S_1) ; en un point *indéterminé* d'une ligne ou d'une surface tracée, c'est : (S_2) ; tracer la sphère, c'est : (S_3).

Nous donnerons un très simple exemple de la méthode en analysant deux constructions de ce problème. *Par un point* A *mener un plan perpendiculaire à une droite* BC :

J'appelle *coefficient de simplicité* ou *simplicité* le nombre total des opérations effectuées, représenté par la somme des coefficients des symboles ; *coefficient de préparation* ou *préparation* la somme des coefficients des opérations de préparation C_1, C_2, R_1, P_1, S_1, S_2.

De même que A (ρ) ou A (MN) désigne un cercle de centre A et de rayon ρ ou MN, A (ρ^2) ou A (MN^2) représentera une sphère de centre A et de rayon ρ ou MN.

a. Je fais passer le planque par BC et je trace le plan quelconque BCM qu'il marque ($2P_1 + P_2$) ; en laissant le planque appuyé sur BC, je le fais passer par A et je trace le plan ABC ($P_1 + P_2$) ; je trace dans le plan ABC, un cercle A (ρ) qui coupe BC en B et C ($C_1 + C_3$) ; je trace les

sphères B (ρ^2), C (ρ^2) ($2S_1 + 2S_5$), qui se coupent en α sur BCA, en μ sur BCM. Je fais passer un plan par A, α, μ ($3P_1 + P_2$); c'est le plan cherché.

Op. : ($C_1 + C_3 + 6P_4 + 3P_2 + 2S_1 + 2S_5$); simplicité : 15; préparation : 9; 1 cercle, 3 plans, 2 sphères.

b. De deux points B et C quelconques de BC comme centre, je trace les deux sphères B (BA^2), C (CA^2) ($2S_1 + 2S_2 + 2S_5$); elles se coupent suivant une circonférence qui appartient au plan cherché. J'appuie le planque sur elle et je trace le plan ($3P_1 + P_2$).

« Op. : ($3P_1 + P_2 + 2S_1 + 2S_2 + 2S_3$); simplicité : 11; préparation : 6; 1 plan, 2 sphères. »

Il ne serait pas plus difficile de créer la Géométrographie des espaces à *n* dimensions, mais je ne suis pas assez familier avec les études pour établir le symbolisme y relatif.

Je profite de l'occasion pour dire que la pratique de la Géométrographie plane m'a amené à réduire à un seul des deux symboles que j'ai indiqués pour l'usage de l'équerre dans ma Note citée de 1888, et je renvoie pour plus de détails sur la Géométrographie de l'espace à un Mémoire qui paraîtra aux *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (Congrès de Paris, 1900)(*).

SUR L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE $ax + by = c$;

par M. Salkin, capitaine d'infanterie.

Soit à chercher le nombre *z* des solutions entières *non négatives* de l'équation

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

où *a*, *b*, *c* représentent des nombres entiers positifs, *a* et *b* étant premiers entre eux.

Dans l'*Algèbre* de Falisse et Graindorge, 2e partie, 5e édition, n° 187, on ne considère pas les cas où *c* est divisible par *a* ou par *b*, de sorte que la solution de ces auteurs présente une imperfection; le défaut principal consiste à exclure l'hypothèse d'une valeur nulle possible pour *x*, sans exclure la même hypothèse pour *y*. Nous croyons donc utile de reprendre ici *toute* la question.

(*) Voir aussi l'excellent petit livre de M. E. Lemoine : *Géométrographie ou art des Constructions géométriques* (Paris, Naud, 1902), annoncé p. 115.

Si A, B sont des solutions particulières de l'équation (1), les solutions générales sont

$$x = A + bt, \quad y = B - at.$$

Les solutions non négatives correspondent aux valeurs de t qui vérifient les deux relations

$$t \geqq -\frac{A}{b}, \quad t \leqq \frac{B}{a}. \tag{2}$$

Soient M et N les plus grands nombres entiers contenus dans $-\frac{A}{b}$ et $\frac{B}{a}$, et posons

$$-\frac{A}{b} = M + d, \quad \frac{B}{a} = N + d'; \tag{3}$$

d et d' sont des nombres *positifs* plus petits que 1 ou nuls.

Des égalités (3) on déduit

$$\frac{B}{a} + \frac{A}{b} = N - M + d' - d$$

ou

$$N - M = \frac{c}{ab} + d - d'.$$

Appelons q le quotient et r le reste de la division de c par ab; nous aurons

$$N - M = q + \frac{r}{ab} + d - d'.$$

La partie fractionnaire $\frac{r}{ab} + d - d'$ est moindre que 2 et plus grande que — 1 et doit se réduire à un nombre entier; on ne peut donc avoir que $N - M = q$ ou $q + 1$. Si d est égal ou inférieur à d', on a donc $N - M = q$; si d est supérieur à d', $N - M = q + 1$.

Supposons d'abord $d > 0$, $d' > 0$; les valeurs admissibles de t seront

$$M + 1, \quad M + 2, \ldots, \quad N \text{ ou } M + (N - M). \tag{4}$$

Il en résulte $z = N - M$. Ce qui est démontré plus haut pour $N - M$ s'applique dans ce cas à z : z est égal à q si d est égal ou inférieur à d', à $q + 1$, si d est supérieur à d'.

Si c est divisible par a et non divisible par b, l'équation (1) admet la solution $y = 0$, $x = \frac{c}{a}$, et l'on a $d' = 0$; les valeurs de t sont encore les nombres (4). Par conséquent

$$z = q + \frac{r}{ab} + d.$$

La partie fractionnaire $\frac{r}{ab} + d$ est nécessairement égale à 1; donc $z = q + 1$.

Par analogie, lorsque c est divisible par b et non-divisible par a, on a encore $z = q + 1$. Pour traiter ce cas directement, observons qu'une solution de l'équation (1) est $x = 0$, $y = \frac{c}{b}$; donc $d = 0$. Les valeurs de t sont maintenant

$$M, M + 1, M + 2, \ldots, N; \tag{5}$$

donc

$$z = (N - M) + 1 = \frac{c}{ab} - d' + 1 = q + 1 + \frac{r}{ab} - d'.$$

La partie fractionnaire $\frac{r}{ab} - d'$ doit se réduire à zéro.

Enfin, lorsque c est à la fois divisible par a et par b, on a $d = 0$, $d' = 0$, $r = 0$; les valeurs de t sont les nombres (5), donc

$$z = (N - M) + 1 = q + 1.$$

Exemple : $2x + 3y = 12$. On peut supposer $x = 0$, $y = 4$; $x = 3$, $y = 2$; $x = 6$, $y = 0$. Or $12 : (2 \times 3) = 2$; il y a $(2 + 1)$ systèmes de solutions(*).

DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

par M. Soons (Tirlemont).

E. Catalan, dans les *Mélanges mathématiques* (1re édition, p. 40) et dans la *Revue de l'Instruction publique en Belgique* (t. XVII, 1870, p. 137), a énoncé quelques théorèmes d'arithmétique dont la démonstration n'a jamais été publiée. Nous établissons ci-après plusieurs de ces propositions.

1. *Si a est un nombre entier et n un nombre premier impair, le seul diviseur commun des nombres $a - 1$ et $N = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ est 1 ou n.*

Prenons a comme base d'un système de numération, et désignons

---

(*) Voir sur la même question un article de Catalan, *Mathesis*, 1890 (1), X, pp. 220-222, 241-243.

par b le dernier chiffre du système ou $a - 1$. Nous aurons

$$N = \frac{(bb \dots b)_n}{b} = (11 \dots 1)_n,$$

l'indice indiquant le nombre des chiffres d'un nombre.

Une unité d'un ordre quelconque étant un multiple de b augmenté de 1, l'égalité précédente donne

$$N = M.\, b + n.$$

Si b et n sont premiers entre eux, $M.b + n$ et b le sont aussi; si b et N ont un diviseur commun, ce ne peut être que n. Donc les seuls diviseurs communs possibles sont 1 et n.

2. *Le seul diviseur commun des nombres* $a + 1$ *et* $N \equiv \frac{a^n + 1}{a + 1}$ *est* 1 *ou* n, n *étant supposé premier impair.*

Si l'on pose $a - 1 = b$, $a + 1 = \beta$, on a

$$N = \frac{a^n + 1}{a + 1} = \frac{(100 \dots 01)_{n+1}}{11} = (b0b0 \dots b1)_{n-1};$$

b suivi d'un nombre impair de zéros $= M.\, \beta - b$ ou $M.\, \beta + 2$; donc

$$N = \frac{n - 1}{2}(M.\, \beta + 2) + 1 = M.\, \beta + n.$$

Le raisonnement s'achève comme ci-dessus.

3. n *étant un nombre impair, si* $n = a - 1$, $N \equiv a^n - 1$ *est divisible par* n^2, *et non divisible par* n^3.

En effet, b désignant $a - 1$ ou n, on a

$$\begin{aligned} N &= (bb \dots b)_n = b.\,(111 \dots 1)_n \\ &= b.\,[1 + (b + 1) + (bb + 1) + \dots + (bb \dots b + 1)] \\ &= b[n + b + bb + \dots + (bb \dots b)_{n-1}] \\ &= b^2[1 + (M.\, b + 1) + (M.\, b + 2) + \dots (M.\, b + n - 1)] \\ &= b^2\left[M.\, b + \frac{n(n-1)}{2} + 1\right] = b^2\left[M.\, b + \frac{n^2 - n + 2}{2}\right]. \end{aligned} \qquad (1)$$

Si n est impair et > 2, on peut écrire

$$N = b^2[M.\, b + M.\, b + 1];$$

donc M est divisible par b^2, et non divisible par b^3.

Si $n = 2$, on voit que $N = M.\, b^3$.

Si n est pair et > 2, l'expression (1) montre que N n'est pas divisible par b^3, mais on ne peut plus affirmer que b^2 est le plus grand diviseur composé des facteurs premiers de b.

4. *Si* $n = a + 1$, $N \equiv a^n + 1$ *est divisible par* n^2 *et non par* n^3.

On pourrait suivre pour le 3e une méthode purement arithmétique, mais un peu plus compliquée ; c'est pourquoi nous indiquons ici un autre procédé, qui est d'ailleurs applicable à la question précédente. On a, n étant supposé impair et C_n^p désignant le nombre des combinaisons de n lettres p à p,

$$N = (n-1)^n + 1 = n^n - C_n^1 n^{n-1} + C_n^2 n^{n-2} - \ldots - C_n^1 n$$
$$= n^2 [n^{n-2} - C_n^1 n^{n-3} + C_n^2 n^{n-4} - \ldots + C_n^2 - 1].$$

Comme C_n^2 est divisible par n, la quantité entre crochets est un $M.\, n - 1$.

5. *L'équation* $(x+1)^x - x^y = 1$ *est impossible en nombres entiers, excepté pour* $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Pour traiter la question *directement*, développons $(x+1)^x$ par la formule de Newton ; l'équation prendra la forme

$$x^x + C_x^1 x^{x-1} + C_x^2 x^{x-2} + \cdots + C_x^1 x = x^y.$$

Le premier membre est divisible par x^2 ; donc si l'on suppose $x > 1$, l'égalité se réduit à

$$x^{x-2} + C_x^1 x^{x-3} + \cdots + C_x^2 + 1 = x^{y-2}. \qquad (2)$$

Si x est impair, elle a la forme $Mx + 1 = x^{y-2}$, ce qui indique une impossibilité. Si $x = 2$, l'équation proposée devient $3^2 - 1 = 2^y$; elle admet la solution $y = 3$. Enfin, soit $x = 2^p z$. z étant impair ; le premier membre de (2) sera $M.\, z + 1$, et le second $M.\, z$, à moins qu'on n'ait $y = 2$, hypothèse qu'on écarte encore immédiatement en observant que le premier membre est > 1.

6. *L'équation* $m^p - q^n = 1$, *dans laquelle* p *et* q *sont premiers, est impossible, excepté lorsque* $m = 3$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 3$.

En effet, de $m^p - 1 = q^n$, on déduit que $m - 1$ doit diviser q, donc lui être égal. L'équation proposée a donc la forme

$$(q+1)^p - 1 = q^n,$$

ou

$$q^p + C_p^1 q^{p-1} + \cdots + \frac{p(p-1)}{2} q^2 + pq = q^n. \qquad (3)$$

L'hypothèse $n = 1$ étant écartée parce quelle entraînerait $p = 1$, on conclut de l'égalité (3), que pq est divisible par q^2, d'où $p = q$. L'équation devient

$$(q+1)^q - q^n = 1 ;$$

elle a été examinée ci-dessus.

NOTE. L'équation $x^m = y^n + 1$, où l'un des nombres x, y est supposé premier, a été traitée par Gerono (NAM, 1870, (2), IX, 469, 1871, (2), X, 204-206). L'impossibilité de l'équation $x^m = y^2 + 1$ a été établie par LEBÈGUE, NAM, 1850, (1), IX, p. 178-181, 469-471.

L'impossibilité de l'équation $x^m = y^n + 1$ sauf pour $x = 1$, $y = 0$ et $x = 3$, $m = 2$, $y = 2$, $n = 3$ n'a jamais été prouvée jusqu'à présent. — Parmi les cas particuliers, énoncés par Catalan, en voici encore un assez facile à établir: $x^m - 2^n = 1$ *est impossible en nombres entiers, sauf pour* $x = 3$, $m = 2$, $n = 3$. En effet, x est impair évidemment; posons $x = 2p + 1$. On aura

$$\frac{2^n}{x-1} = \frac{x^m - 1}{x - 1} = (2p+1)^{m-1} + (2p+1)^{m-2} + \cdots + 1$$
$$= \text{multiple de } 2p + m.$$

Le premier membre étant divisible par 2, m est divisible par 2. Soit $m = 2r$. Alors on a

$$2^n = x^{2r} - 1 = (x^r - 1)(x^r + 1); \quad x^r - 1 = 2^k, \; x^r + 1 = 2^{n-k}.$$

Par suite,

$$2 = (x^r + 1) - (x^r - 1) = 2^{n-k} - 2^k = 2^k(2^{n-2k} - 1),$$

ce qui entraîne

$$k = 1, \; n = 2k + 1 = 3, \; x = 3, \; m = 2. \qquad \text{(P. M.)}$$

SUR LE TRIANGLE PSEUDO-ISOSCÈLE;

par M. G. DELAHAYE (Roye).

Soit ABC un triangle pseudo-isoscèle, c'est-à-dire tel que les bissectrices extérieures des angles en B et C soient égales entre elles sans que l'on ait $b = c$. On sait (voir *Mathesis*, 1895, p. 201 et 1900, p. 129) que les éléments d'un tel triangle vérifient les relations

$$a^3 - a^2(b + c) + 3abc - bc(b + c) = 0, \qquad (1)$$

$$a^2 + bc = 4Rr_a, \qquad (2)$$

$$\left(\frac{p-a}{a}\right)^2 = \frac{p-b}{b}\cdot\frac{p-c}{c}, \qquad (3)$$

$$\sin^2\frac{1}{2}A = \sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C, \qquad (4)$$

$$\overline{AI}^2 = BI.CI, \quad II_a^2 = II_b.II_c, \qquad (5)$$

$$AI = r_a - r, \quad II_a = \frac{(r_a - r)^2}{r}, \quad AI_a = \frac{r_a(r_a - r)}{r}. \tag{6}$$

Je me propose d'établir quelques autres relations.

1. En observant que

$$(p-b)(p-c) = rr_a, \quad p - a = \frac{ah_a}{2r_a}, \quad bc = 2Rh_a,$$

on déduit de (3)

$$\frac{R}{r} = 2\frac{r_a^2}{h_a^2}. \tag{7}$$

Soient S, S' les aires des triangles ABC, $I_aI_bI_c$. D'après un théorème connu, $S' : S = 2R : r$; donc

$$\frac{S'}{S} = \frac{4r_a^2}{h_a^2}.$$

Dans le triangle II_bI_c, IA est une hauteur et le rayon du cercle circonscrit est égal à 2R, car ABC est le triangle orthique de chacun des triangles $I_aI_bI_c$, II_bI_c, ...; par conséquent,

$$II_b \cdot II_c = AI \cdot 4R.$$

En combinant cette relation avec les égalités (5) et (6), on obtient

$$II_a^2 = 4R \cdot AI, \quad (r_a - r)^2 = 4Rr^2. \tag{8}$$

Les formules

$$AI = r_a - r, \quad pr = (p-a)r_a$$

conduisent à

$$AI = \frac{ar_a}{p} = \frac{ar}{p-a}. \tag{9}$$

Les triangles ABI_a, ACI_a donnent

$$\frac{BI_a}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{c}{\sin\frac{1}{2}C}, \quad \frac{CI_a}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{b}{\sin\frac{1}{2}B};$$

en multipliant ces proportions terme à terme et tenant compte de la relation (4), on trouve

$$BI_a \cdot CI_a = bc = AI \cdot AI_a \tag{10}$$

Les bissectrices extérieures des angles B et C étant égales, on a ($b > a > c$).

$$\frac{2ab\sin\frac{1}{2}C}{b-a} = \frac{2ac\sin\frac{1}{2}B}{a-c},$$

d'où on déduit facilement

$$\frac{a-c}{b-a}=\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B}. \qquad (11)$$

En multipliant les deux membres de (4) par $\sin\frac{1}{2}A$ et se rappelant que $r=4R\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$, on trouve

$$\sin^3\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}. \qquad (12)$$

La projection de H_a sur AB étant égale à a, on peut écrire

$$H_a=\frac{a}{\cos\frac{1}{2}A}=\frac{2R\sin A}{\cos\frac{1}{2}A}=4R\sin\frac{1}{2}A\ (*)$$

BIBLIOGRAPHIE.

Darstellende Geometrie. Erster Teil : Elemente; Ebenflächige Gebilde, von Prof. Dr Haussner. Leipzig, Göschen, 1902 (192 pages in 12°, avec 100 figures; reliure en toile). Prix : 80 Pf.

La *Sammlung Göschen*, d'après le prospectus, publie sur les différentes branches des sciences, des opuscules clairs et faciles, propres à initier le lecteur instruit à des domaines qui sont étrangers à ses études particulières; ces mêmes petits traités peuvent également rendre des services à l'homme du métier qui désire avoir un exposé synoptique de la science. Les livres de cette collection que nous avons parcourus, nous ont paru répondre parfaitement à ce double but; citons la géométrie analytique plane et la géométrie analytique à trois dimensions par Max Simon, la géométrie projective par K. Doehlemann, etc.

La maison Göschen publie également, sous le nom de *Sammlung Schubert*, une série de traités in-8° au prix de 2 marcs 50 à 5 marcs; plusieurs de ces livres sont devenus des *manuels* très estimés. Mentionnons la géométrie projective plane par Böger, les géométries analytiques plane et solide, par Max Simon, les Éléments d'Arithmétique et d'Algèbre, par H. Schubert, etc.

La Géométrie descriptive par Haussner, dont la première partie vient de paraître, renferme tous les développements désirables sur les projections des figures planes ou des polyèdres. Les quatre chapitres dont elle se compose, traitent respectivement de la projection parallèle des figures planes; de la

(*) Les notes mises à notre disposition par M. Delahaye renferment encore un grand nombre d'autres formules. Ces relations pourraient être multipliées à l'infini. (La Rédaction).

projection oblique des solides; des projections orthogonales sur deux plans rectangulaires; des angles solides et des polyèdres. L'ouvrage se recommande par une rédaction claire et un bon choix des matériaux. (J. N.)

Géométrographie ou art des constructions géométriques par E. Lemoine. Paris, Naud, 1902 (87 pages, petit in-8°, cartonné, avec 32 figures). Prix : 2 fr.

La Géométrographie a pour objet de donner pour une construction quelconque exécutée (au moyen de la règle, du compas et de l'équerre) un symbole qui est une sorte de mesure de sa simplicité et des chances de sa plus ou moins grande exactitude; elle permet ainsi de comparer entre elles toutes les constructions que l'on connaît d'un même problème et de choisir parmi celles-là la plus simple. M. Lemoine l'a développée successivement dans les mémoires présentés aux Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Oran (1888), Pau (1892), Besançon (1893), etc. et dans des articles qui ont paru dans le JME, dans *Mathesis* ((1) VIII, 217-222, 241-244), etc. C'est à lui qu'il faut faire remonter l'origine de cette science; cependant M. Lemoine tient à citer comme ses collaborateurs de la première heure MM. Evariste Bernès et Gaston Tarry.

L'opuscule que nous annonçons ici et qui fait partie de la collection *Scientia*, contient un exposé clair et méthodique de la géométrographie, avec de nombreuses applications aux problèmes classiques; il est plus complet que les exposés que l'auteur a publiés dans le traité de géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, et dans le tome (3) I des Archives de Grunert-Hoppe, continuées par MM. Lampe, Meyer et Jahnke. Nous le recommandons volontiers aux professeurs et aux élèves comme formant un complément utile, presque indispensable, des cours de géométrie.

Il n'est pas inutile de donner quelques exemples des simplifications introduites dans la solution de problèmes classiques sous l'influence de la géométrographie.

1. *Mener la bissectrice de l'angle formé par deux droites dans le cas où le sommet de l'angle est en dehors de l'épure.* La solution habituelle comporte le tracé de 9 droites et de 28 cercles; on peut la simplifier et ne tracer que 9 cercles et 13 droites, et en se laissant guider davantage par la géométrographie, ne tracer que 2 droites et 5 cercles (On n'emploie pas l'équerre).

2. *Tangentes communes à deux cercles qui se coupent.* Solutions classiques : 14 droites, 19 cercles ou 12 droites, 8 cercles; 9 droites, 8 cercles (souvent inexécutable); solutions simplifiées; 7 ou 6 droites, 6 ou 5 cercles; solution très simplifiée, ou géométrographique : 7 droites, 5 cercles. (J. N.)

La Géométrie non euclidienne par P. Barbarin, Paris, C. Naud, 1902. Collection *Scientia* (79 p. in-8° cartonné). Prix : 2 francs.

M. Barbarin expose, dans cet opuscule, les principes fondamentaux de la

géométrie non euclidienne, en s'appuyant sur les travaux de Saccheri, Lobatchefsky, Bolyai, Riemann, De Tilly, Gérard et sur les siens propres. Voici le sommaire des huit chapitres dont il se compose :

I. Historique : Euclide, Saccheri, Lambert, Taurinus, Gauss, Lobatchefsky, Bolyai, Beltrami, De Tilly. Nous pensons que ce n'est que vers 1816 et non en 1792 que Gauss a commencé à soupçonner que le postulatum est indémontrable. II. Les définitions et les postulats d'après Euclide. Les trois géométries. Trois gravures : une page d'un manuscrit d'Euclide, portraits de Lobatchefsky et de Riemann. L'ordre suivi est à peu celui de nos *Principes de Métagéométrie*. III. La distance comme notion fondamentale. Travaux de M. De Tilly. Le plan et la droite d'après Cauchy. IV. La géométrie générale dans le plan et dans l'espace. Horicycle (cercle de rayon infini), hypercycle (équidistante) Le cinquième livre en géométrie non euclidienne. Existence de droites riemanniennes équidistantes non situées dans un même plan. V. Trigonométrie. Constructions fondamentales. L'auteur renvoie pour la démonstration des formules trigonométriques non euclidiennes à la Thèse de M. Gérard et à notre exposé de ces formules en géométrie riemannienne (*Mathesis*, 1895, supplément). Nous trouvons qu'il eût été préférable de reproduire ici la partie essentielle du travail de M. Gérard ou du nôtre. VI. Mesure des aires et des volumes. Théorème de Lambert; aires courbes, volumes. M. Barbarin a introduit ici un théorème curieux nouveau qui lui est dû. VII. Les contradicteurs de la géométrie non euclidienne. Toutes les objections peuvent se retourner contre la géométrie euclidienne. VIII. La géométrie physique. On peut savoir expérimentalement si le monde est non euclidien, mais non s'il est euclidien.

Notes I. Réfutation d'une fausse démonstration du postulatum. II. Nouvelles démonstrations des deux théorèmes de Legendre.

Nous recommandons bien volontiers l'excellent petit livre de M. Barbarin aux lecteurs de *Mathesis* qui veulent s'initier vite et bien — nous ne disons pas sans travail — à la géométrie non euclidienne. (P. M.)

Traité juridique et mathématique des Opérations de Banque, par Cl. Thiry, Professeur à l'Ecole supérieure de l'Industrie et du Commerce de Gand. Gand, Hoste, 1902 (450 p. gr. in-8°). Prix : 5 fr.

Voici un livre excellent qui devrait se trouver entre les mains de tous les professeurs de mathématiques et de sciences commerciales des Athénées, des Collèges, des Ecoles moyennes et des Ecoles supérieures de commerce, car la partie mathématique, dont nous nous occuperons exclusivement dans ce compte-rendu, constitue une véritable arithmétique commerciale. En effet, on y trouve traitées, avec une netteté, une précision et une exactitude remarquables les questions suivantes : conseils pratiques sur la manière de calculer rapidement et exactement. Opérations spéciales. Opérations abrégées. Règle conjointe. Nombres secrets. Monnaies. Calcul de la valeur au pair, de la valeur au tarif et de la valeur commerciale des monnaies. Cotations de l'or et

de l'argent. Calculs sur monnaies étrangères. Méthodes commerciales pour le calcul de l'intérêt et de l'escompte. Intérêt civil. Bordereaux d'escompte par les méthodes de Cauchy et de Thoyer. Taux moyen. Echéance moyenne. Inverse de l'échéance moyenne. Echéance commune. Variétés de l'échéance commune. Comparaison de plusieurs dettes d'échéances différentes. Bordereaux d'agents de change. Changes. Valeur nette des coupons français. Dressement des comptes courants par les diverses méthodes, etc. Les théories relatives à l'escompte, à l'échéance moyenne et à l'échéance commune sont exposées d'une manière assez différente de celles qu'on rencontre ordinairement dans les ouvrages classiques, ce dont nous félicitons sincèrement l'auteur, car il est grand temps que certaines idées, absolument fausses, disparaissent de l'enseignement de l'Arithmétique appliquée.

La théorie mathématique des comptes courants et d'intérêts est traitée d'une façon vraiment magistrale; l'auteur réfute victorieusement les nombreuses erreurs qui foisonnent dans les livres sur cette importante question qui vient, peut-être pour la première fois, d'être traitée d'une façon complète, exacte et juridique.

Le livre renferme de nombreuses notions pratiques de droit civil, de droit commercial et de droit fiscal que tout le monde lira avec le plus grand intérêt.

Nous recommandons chaleureusement l'ouvrage de M. Thiry à MM. les Professeurs, et nous faisons des vœux pour que, dans l'enseignement de l'arithmétique appliquée à la finance, ils s'inspirent des idées et des méthodes *vraiment pratiques* de l'auteur. J. Massau.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1044.

(Voir *Mathesis* (2), V, p. 264).

Soit M *un point quelconque de la circonférence circonscrite à un triangle équilatéral* ABC. *Projetons* M *en* A_1, B_1, C_1 *sur* BC. CA, AB; *la droite* MA_1 *rencontre* CA *en* A_2. AB *en* A_3; *la droite* MB_1 *rencontre* AB *en* B_2, BC *en* B_3; *enfin* MC_1 *rencontre* BC *en* C_2, CA *en* C_3. *Cela posé, démontrer* 1° *que les points* A_2, B_2, C_2 *sont en ligne droite, de même que* A_3, B_3, C_3; 2° *que les droites* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ *forment un triangle équilatéral. Trouver les lieux des sommets de ce triangle* (*). (A. C.)

Solution par M Absolonne. Appelons K le milieu du côté AB, O le centre du cercle ABC. Les triangles MA_1B_3, MB_1C_3, MC_1A_3 sont direc-

(*) Le lecteur est prié de faire la figure en prenant le point M sur l'arc AB, plus près de A que de B.

tement semblables au triangle BKC; puisque les points A_1, B_1, C_1 sont en ligne droite, les points A_3, B_3, C_3 appartiennent aussi à une droite faisant avec $A_1B_1C_1$ un angle de 60°. De même, les points A_2, B_2, C_2 sont sur une droite faisant avec $A_1B_1C_1$ l'angle de 60° dans l'autre sens. Les lignes $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ forment donc un triangle équilatéral DEF.

On sait que la ligne $A_1B_1C_1$ passe par le milieu N_1 du rayon OM. Soient N_2N_3 les extrémités de la corde perpendiculaire en N_1 sur OM Comme le triangle MN_1N_3 est directement semblable à BKC ou A_1MB_3, N_3 est un point de la ligne $A_3B_3C_3$ considérée comme transformée de la ligne $C_1A_1B_1$ par similitude. De même, la droite $A_2B_2C_2$ passe par N_2. L'angle N_2DN_3 étant égal à 60°, et N_2N_3 étant le côté du triangle équilatéral inscrit au cercle O, le point D appartient à la circonférence ABC.

D'après un théorème connu, la droite $A_1B_1C_1$ enveloppe une hypocycloïde : le cercle roulant a pour centre M, pour rayon MN_1 ; le cercle fixe a pour centre O, pour rayon $O\omega = \frac{3}{2}OM$ (OM étant prolongé de $M\omega = ON_1$) ; le point décrivant est la projection P de ω sur la droite $A_1B_1C_1$. La définition tangentielle de la courbe est la suivante : **Un rayon ON_1 d'une circonférence est articulé en son extrémité N_1 à une droite $A_1B_1C_1$; si les droites ON_1, $A_1B_1C_1$ ont les vitesses angulaires égales et de sens contraires, la droite $A_1B_1C_1$ enveloppe une hypocycloïde de** STEINER.

Cette définition montre immédiatement que les droites $A_2B_2C_2$. $A_3B_3C_3$ enveloppent une hypocycloïde. En effet, les droites ON_1 et ON_3, de même que $A_1B_1C_1$ et $A_3B_3C_3$ font un angle constant de 60°, de manière à avoir les vitesses angulaires égales.

Si dans la transformation par similitude qui change la droite $A_1B_1C_1$ en $B_3C_3A_3$ ou en $C_2A_2B_2$, on cherche l'homologue de la projection de M sur A_1B_1, on trouve respectivement les points E, F; donc les lignes ME, MF sont perpendiculaires à A_3B_3. A_2B_2 et MD, perpendiculaire à A_1B_1, est un diamètre de la circonférence DEF La circonférence de diamètre MN_3 passe par N_1 et par E; elle est égale à la circonférence roulante de l'hypocycloïde (A_1B_1). Peut-on conclure de là que les points D, E décrivent une hypocycloïde allongée?

NOTE. Les deux premières parties de la question ont été établies de la même manière par MM. DÉPREZ, EMMERICH et COLART.

MM Dépaez et Emmerich traitent les lieux des points E, F par le calcul. Ils trouvent pour les équations des droites $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ rapportées au triangle de référence ABC

$$\Sigma\, xx'(2z'+y')(2y'+z')=0, \quad \text{ou} \quad \Sigma\frac{x}{x'^2(y'-z')}=0;$$

$$\Sigma\, xx'(2y'+z')(y'-z')=0, \quad \text{ou} \quad \Sigma\frac{z'x}{z'-x'}=0;$$

$$\Sigma\, xx'(2z'+y')(y'-z')=0 \quad \text{ou} \quad \Sigma\frac{y'x}{x'-y'}=0$$

x', y', z' étant les coordonnées de M. Si l'on tient compte de la relation $\frac{1}{x'}+\frac{1}{y'}+\frac{1}{z'}=0$, on trouve pour les coordonnées des points :

$$E\cdots\frac{1}{2z'+y'},\ \frac{1}{2x'+z'},\ \frac{1}{2y'+x'};$$

$$F\cdots\frac{1}{2y'+z'},\ \frac{1}{2z'+x'},\ \frac{1}{2x'+y'};$$

$$D\cdots\frac{1}{y'-z'},\ \frac{1}{z'-x'},\ \frac{1}{x'-y'}.$$

Le point D décrit donc la circonférence ABC. Les points E, F décrivent la quartique

$$5xyz(x+y+z)-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=0.$$

×Question 1167.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 104.)

Dans tout hexagone gauche rectangle (dont les six angles sont droits), ***les plus courtes distances des trois couples de cotés opposés ont une normale commune.*** (Johannes Petersen).

Soient a, b, c trois droites quelconques de l'espace et a', b', c' les plus courtes distances de (b, c), (c, a), (a, b). Les six droites $a, b', c. a', b, c'$ forment un hexagone gauche rectangle. Nous appelons a'', b'', c'' les plus courtes distances des côtes opposés (a, a'), (b, b'), (c, c').

Menons par un même point des parallèles α, β, γ, α', β', γ' à $a. b, c$, a', b', c'; nous formons ainsi deux trièdres supplementaires $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, car α qui est perpendiculaire à β' et γ' est perpendiculaire au plan $\beta'\gamma'$, etc. Le plan $\alpha\alpha'$ qui passe par une perpendiculaire α' au plan

$\beta\gamma$ est perpendiculaire à ce plan ; de même les plans $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sont respectivement perpendiculaires aux plans $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$. Par conséquent, d'après un théorème connu, les plans $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ se coupent suivant une même droite δ. Les plans $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ respectivement perpendiculaires aux droites α', α se coupent suivant une droite α'' perpendiculaire au plan $\alpha\alpha'$ et par suite à la droite δ de ce plan. De même les droites β'', γ'' suivant lesquelles se coupent les plans $\gamma\alpha$ et $\gamma'\alpha'$, $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ sont perpendiculaires à δ. Donc les droites α'', β'', γ'' sont contenues dans un même plan perpendiculaire à δ.

Si nous revenons à l'hexagone gauche, nous voyons que les droites a'', b'', c'' sont parallèles à α'', β'', γ'' et par suite perpendiculaires à la direction δ.

Ce qui précède est connu ; on peut également l'établir par la considération de deux triangles sphériques supplémentaires.

Existe-t-il une normale commune qui *rencontre* a'', b'', c''? (J. N.)

Autre solution par M. Emmerich.

Question 1844.

(Voir *Mathesis*, (2) IX, p. 264).

A *et* B *sont deux points fixes, que l'on joint à un point quelconque* M. *Sur la droite* MA, *on prend une longueur* $MM' = \frac{\overline{MB}^2}{MA}$. *Étudier la transformation* (M, M'). (J. Neuberg.)

Solution par M. V. Retali. Si l'angle $MAB = \theta$, puisque

$$AM' = AM + MM' = AM + \frac{\overline{MB}^2}{MA},$$

nous avons

$$AM \cdot AM' = \overline{AM}^2 - \overline{MB}^2 = 2AB \cdot AM \cdot \cos\theta - \overline{AB}^2,$$

ou, en posant $AM = \rho$, $AM' = \rho$, $AB = a$,

$$\rho' = 2a\cos\theta - \frac{a^2}{\rho};$$

si nous décrivons le cercle A^2 avec le centre en A et le rayon a, et le cercle égal B^2 avec le centre B, on passe de M à M' comme il suit : on prend l'inverse M_1 de M par rapport à A^2 et à partir du point μ où AM recoupe B^2 on prend $\mu M' = -AM_1$. Prenant A pour origine et AB

pour axe des x (coordonnées rectangulaires) les formules de la transformation sont évidemment

$$x : y : 1 = ax' (2x' - a) : ay' (2y' - a) : x'^2 + y'^2$$
$$x' : y' : 1 = -a^2 x : -a^2 y : x^2 + y^2 - 2ax,$$

x', y' étant les coordonnées du point M et x, y celles du point correspondant M'. Aux droites $\lambda x' + \mu y' + 1 = 0$ du système (M) correspondent les cercles

$$x^2 + y^2 - a^2 (\lambda x + \mu y) - 2ax = 0,$$

passant par l'origine A; aux droites $lx + \mu y + 1 = 0$ de (M') correspondent, en supprimant les accents, les coniques

$$x^2 (1 + 2al) + 2amxy + y^2 - a^2 (\lambda x + \mu y) = 0,$$

qui passent aussi par A et par les deux points imaginaires conjugués $\left(\frac{a}{2}, \pm \frac{ai}{2}\right)$ c'est-à-dire par les *antipoints* de A et B.

La transformation (M, M') est donc une transformation quadratique, birationelle, non involutive; les trois points fondamentaux du système (M') sont A et les deux points cycliques; ceux de (M) sont A et les deux *antipoints* de A et B. Les cercles de (M) sont transformés en cercles de (M'); les coniques de (M) donnent des quartiques bicirculaires ayant en A un point double, c'est-à-dire des inverses de coniques centrales; en particulier, aux paraboles de (M) correspondent des quartiques bicirculaires ayant un rebroussement en A (inverses de paraboles); les coniques à centre ayant un foyer en A, donnent des ovales de Descartes avec un point double en A, c'est-à-dire des limaçons; les paraboles avec le foyer en A sont transformées en cardioïdes ayant en A le rebroussement etc.

Note. De bonnes solutions de la même question nous ont été adressées par MM. Cardoso-Laynes (Livourne) et Emmerich; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de les reproduire *in extenso*. Nous en extrayons seulement quelques remarques qui ne sont pas contenues explicitement dans la solution de M. Retali.

1° Si M parcourt une courbe C d'ordre n et ayant en A un point d'ordre p, M' décrit une courbe C' d'ordre $2n - p$ et ayant en A un point d'ordre n; les tangentes en A passent par les points de rencontre de C avec la médiatrice de AB. La courbe C' a $2(n - r)$ asymptotes isotropes,

et les r asymptotes restantes sont parallèles aux tangentes menées à C en A. (Cardoso).

2° Si M parcourt une droite passant par B, M′ décrit la circonférence passant par A et touchant la droite BM en B. (Emmerich).

3° Si M parcourt le cercle de centre A et de rayon $\frac{a}{2}$, M′ décrit la cardioïde

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$ (Emmerich).

4° Le cercle de centre B et de rayon a se transforme en une cissoïdale

$$(x^2 + y^2)(x + \tfrac{1}{2}a) = 2ax^2.$$

5° Le cercle de diamètre AB se transforme en la strophoïde qui a pour équation $r = a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$. (Cardoso, Emmerich).

6° Le cercle de centre B et de rayon a se transforme en une trisectrice de Maclaurin. (Cardoso).

7° Si M parcourt la cissoïde $x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$. M′ décrit le *trifolium parabolique* :

$$y^2(x^2 + y^2) + ax(x^2 - y^2) = 0.$$

La parabole semicubique $x^3 = \frac{1}{2}ay^2$ se transforme en une parabole du second degré et deux droitres isotropes. (Cardoso).

8° Si M′ décrit la lemniscate de Bernoulli, les foyers étant A et B, M décrit une conique. (Cardoso).

Question 1346.

(Voir *Mathesis* (3), t. I, p. 264).

Soient D, E, F *les points où les droites* AM, BM, CM *qui joignent les sommets du triangle* ABC *à un même point* M *rencontrent les côtés opposés* BC, CA, AB. *Les droites* AM, BM, CM *rencontrent respectivement les côtés du triangle* DEF *aux points* D′, E′, F′. *Démontrer :* 1° *que les droites joignant* A, B, C *aux milieux* H, K, L *des droites* EF, FD, DE, *concourent en un point* N ; 2° *que les droites joignant* D, E, F *aux milieux* h, k, l *des côtés correspondants du triangle* D′E′F′ *concourent en un point* P ; 3° *que les points* M, N, P *sont en ligne droite.*

Solution par MM. J. Rose et Claeys. La question peut être généralisée en considérant une droite n qui coupe en H_1, K_1, L_1, h_1, k_1, l_1 les

côtés des triangles DEF, D'E'F' et en prenant pour H, K, L, k, k, l leurs conjugués harmoniques par rapport aux sommets de ces deux triangles.

1° Il existe une conique S inscrite au triangle ABC et circonscrite au triangle DEF. Le point H_1 étant situé sur DE, polaire de A par rapport à S, sa polaire est AH. De même BK et CL sont les polaires de K_1 et L_1 par rapport à la même conique. Les points H_1, K_1, L_1 étant en ligne droite, leurs polaires concourent en N, pôle de π par rapport au triangle DEF.

2° Il existe de même une conique S' inscrite à DEF et circonscrite à D'E'F'. Les droites Dk, Ek, Fl sont respectivement les polaires des points k_1, k_1, l_1 par rapport à S'. Par suite, ces droites passent par P, pôle de π par rapport au triangle D'E'F'.

3° Les triangles DEF, D'E'F' se correspondent dans une homologie ayant pour centre M et pour axe sa polaire trilinéaire par rapport à ABC. Par suite, les points correspondants N et P sont alignés sur le centre M. On peut encore démontrer cette propriété de la façon suivante : les polaires des points M, N, P par rapport aux coniques du faisceau S, S' sont concourantes; par suite, ces points sont en ligne droite.

Remarques. En supposant π à l'infini on a l'énoncé du problème.

Si on répète indéfiniment les mêmes constructions, on obtient une série de triangles jouissant des mêmes propriétés.

Note. I. M. Claeys donne encore de la question généralisée une solution analytique que nous allons résumer.

Adoptons par rapport au triangle de référence ABC des coordonnées telles que M devienne le point unitaire (1, 1, 1). Les coordonnées de D, E, F sont (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0) et les équations des droites EF, FD, DE sont

$$-x+y+z=0. \quad x-y+z=0, \quad x+y-z=0.$$

La droite π étant représentée par $ax+by+cz=0$, on trouve pour AH_1 : $(a+b)y+(a+c)z=0$; on en conclut les équations de AH, BK, CL :

$$\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}, \quad \frac{z}{a+b}=\frac{x}{b+c}, \quad \frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}.$$

Ces droites concourent au point $(b+c, c+a, a+b)$.

On passe du triangle de référence ABC au triangle de référence DEF par les formules de transformation

$$X = -x + y + z, \quad Y = x - y + z, \quad Z = x + y - z;$$

les formules inverses sont

$$x = \tfrac{1}{2}(Y + Z), \quad y = \tfrac{1}{2}(Z + X), \quad z = \tfrac{1}{2}(X + Y) \qquad (1)$$

M étant resté le point unitaire et l'équation de n étant maintenant

$$(b + c)X + (c + a)Y + (a + b)Z = 0,$$

on trouve les coordonnées de P par rapport à DEF en remplaçant dans celles de N par rapport à ABC les quantités a, b, c par $b + c$, $c + a$, $a + b$; elles sont donc $2a + b + c$, $a + 2b + c$, $a + b + 2c$. Les coordonnées de P par rapport à ABC, d'après les formules (1), sont

$$2a + 3b + 3c = -a + 3(a + b + c), \quad -b + 3(a + b + c),$$
$$-c + 3(a + b + c).$$

La forme de ces expressions montre que P est sur la droite joignant les points (a, b, c), $(1, 1, 1)$.

II. M. Emmerich a résolu la même question. Il démontre le 1° en multipliant membre à membre les égalités

$$\frac{\sin HAC}{\sin HAB} = \frac{AP}{AF}, \quad \frac{\sin KBA}{\sin KBC} = \frac{BF}{BD}, \quad \frac{\sin LCB}{\sin LCA} = \frac{CD}{CE}.$$

Le 2° résulte du 1° par analogie. Enfin le 3° est établi à l'aide de calculs assez simples.

Solution géométrique et solution analytique par M. Dépaez.

*Question 1356.

(Voir *Mathesis*, (3), II, p. 32.)

Résoudre l'équation

$$\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = a.$$

(E. N. Barisien.)

Solution par MM. E. Pire (Gand), François (la Haye), Janne (Liége), Malengreau (Bruxelles). En remplaçant $\cos 3x$ et $\sin 3x$ par leurs valeurs en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$, l'équation proposée devient successivement,

$$4(\cos^6 x - \sin^6 x) - 3(\cos^4 x - \sin^4 x) = a,$$
$$\cos 2x\,[4(\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x) - 3] = a,$$

$$\cos 2x\,[4\,(1-\sin^2 x\cos^2 x)-3]=a,$$

$$\cos 2x\,(1-\sin^2 2x)=a,$$

et enfin $\cos^3 2x=a$ d'où $\cos 2x=\sqrt[3]{a}$.

Solution par MM. Plakhovo, Paulmier et Verheugen. On a

$$\cos 3x=\cos x\,(1-4\sin^2 x),\quad \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x;$$

d'où, en posant $y=\sin^2 x$,

$$1-6y+12y^2-8y^3=a,\quad (1-2\sin^2 x)^3=a,\quad \cos^3 2x=a,\quad \text{etc.}$$

Solution par MM. E. Cesàro, Ruis y Casas, Bragard (*Audenne*) *et* Rose. En remarquant que

$$\cos 3x=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x,$$

$$\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x,$$

on ramène l'équation proposée à

$$(\cos^2 x-\sin^2 x)^3=\cos^3 2x=a,\ \text{etc.}$$

Solution par MM. Listray *et* Thonet. En tenant compte des identités

$$4\cos^3 x=\cos 3x+3\cos x.\quad 4\sin^3 x=3\sin x-\sin 3x,$$

on peut donner à l'équation la forme

$$\cos^2 3x-\sin^2 3x+3\,(\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x)=4a,$$

ou

$$\cos^3 x+3\cos 2x=4a;$$

en s'appuyant sur la première identité on trouve $\cos^3 2x=a$, etc

MM. Déprez et Emmerich ont résolu la même question.

Questions 1364.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 80).

Si $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$, $\operatorname{tg}\delta$ *sont les racines de l'équation*

$$A_0x^4+4A_1x^3+6A_2x^2+4A_3x+A_4=0,$$

former l'équation qui a pour racines

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\gamma+\delta),\quad \operatorname{tg}(\alpha+\gamma)\operatorname{tg}(\beta+\delta),\quad \operatorname{tg}(\alpha+\delta)\operatorname{tg}(\beta+\gamma).$$

Solution par M. Audibert (Marseille). Désignons par a, b, c, d les racines de l'équation proposée, et par y_1, y_2, y_3 les trois racines de l'équation cherchée. On a par exemple

$$y_1=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta}{1-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}=\frac{\Sigma ab-(ab+cd)}{1+abcd-(ab+cd)}.\qquad (1)$$

La *résolvente* de Lagrange a pour racines

$$z_1 = ab + cd, \quad z_2 = ac + bd, \quad z_3 = ad + bc;$$

elle est

$$z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)\,z^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)\,z - z_1z_2z_3 = 0.$$

Ses coefficients se trouvent facilement

$$\Sigma z_1 = \Sigma ab = \frac{6A_2}{A_0}, \quad \Sigma z_1z_2 = \frac{16\,A_1A_3}{A_0^2} - 4\frac{A_4}{A_0},$$

$$z_1z_2z_3 = 16\left(\frac{A_1A_3^2}{A_0^2} + \frac{A_3^2}{A_0^2}\right) - 24\frac{A_2A_4}{A_0}.$$

Mais d'après la formule (1), on a, entre les racines correspondantes de cette résolvante et de l'équation proposée, la relation

$$y = \frac{6A_2 - A_0z}{A_4 + A_0 - A_0z}.$$

Il reste donc à tirer de là z en fonction de y et à substituer la valeur dans l'équation de Lagrange.

Solution analogue par M. Barisien.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1042. Etant données quatre droites a, b, c, d, on prend les polaires trilinéaires α, β, γ, δ d'un même point P par rapport aux quatre triangles bcd, cda, dab, abc; démontrer que les points de rencontre des couples $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ sont sur une même droite.

Soient, dans un système quelconque de coordonnées,

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0$$

les équations des droites a, b, c, d, et désignons par A', B', C', D' les valeurs des premiers membres quand on y remplace les coordonnées courantes par celles du point P.

Pour avoir l'équation de δ observons que les droites joignant P aux points ab, ac ont pour équations

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}, \quad \frac{A}{A'} = \frac{C}{C'};$$

les conjuguées harmoniques de ces droites par rapport aux angles ab, ac sont représentées par

$$\frac{A}{A'} + \frac{B}{B'} = 0, \quad \frac{A}{A'} + \frac{C}{C'} = 0,$$

d'où l'on conclut que leurs points de rencontre avec c et b sont sur la droite

$$\frac{A}{A'}+\frac{B}{B'}+\frac{C}{C'}=0.$$

Le point de rencontre de cette dernière droite avec d est situé sur la droite

$$\frac{A}{A'}+\frac{B}{B'}+\frac{C}{C'}+\frac{D}{D'}=0, \text{ etc.}$$

1048. M (x, y, z) étant un point quelconque du plan d'un triangle ABC, les perpendiculaires élevées en M sur les droites MA, MB, MC rencontrent respectivement BC, CA, AB en trois points A′, B′, C′. Démontrer que ces points sont situés sur la droite ayant pour équation en coordonnées normales

$$\Sigma \frac{X}{yz+x(y\cos B+z\cos C-x\cos A)}=0.$$

(A. Boutin).

Quand il s'agit de relations métriques en coordonnées normales, il est utile d'introduire la fonction

$$\varphi(u, v, w)=\Sigma u^2-2\Sigma uv\cos C$$

et ses demi-dérivées partielles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ par rapport à u, v, w. La condition de perpendicularité de deux droites (u, v, w), (u', v', w') est alors

$$u'\varphi_1+v'\varphi_2+w'\varphi_3=0;$$

pour les applications, il est commode de dire que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont les coordonnées du point à l'infini, sur la direction perpendiculaire à la droite (u, v, w).

On écrira facilement l'équation de la droite MA′ passant par le point M (x, y, z) et par le point à l'infini sur la direction perpendiculaire à la droite MA, qui a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$, etc.

1049. Le lieu des points de contact des tangentes menées du sommet d'une parabole aux cercles bitangents est une quartique.

(E. N. Barisien.)

1050. Dans tout triangle ABC, les distances du centre du cercle inscrit aux médianes m_a, m_b, m_c ont pour expressions

$$\frac{(b-c)r}{m_a}, \quad \frac{(c-a)r}{m_b}, \quad \frac{(a-b)r}{m_c}.$$

(E. Hain).

1051. M étant un point quelconque et ABC un triangle donné, le triangle formé par les barycentres des triangles MBC, MCA, MAB est toujours égal à lui-même.

1368. Soient AB et CD deux cordes rectangulaires passant par le point de rebroussement O d'un limaçon de Pascal. Le lieu des points de rencontre des cercles décrits sur AB et CD comme diamètres, est un cercle. (E. N. Barisien.)

En effet, les deux cercles sont égaux et ont pour centres les extrémités d'un même diamètre du cercle directeur du limaçon; ils forment donc une figure de forme invariable.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1369. Trouver une courbe telle que la tangente en un point M rencontrant les axes rectangulaires OX, OY en T et T', le rayon vecteur OM soit une moyenne harmonique entre MT et MT'. (Boutin.)

1370. On mène une tangente en un point quelconque M de l'ellipse qui touche les côtés du triangle ABC en leurs milieux A', B', C'; soient α, β, γ, les points où cette droite coupe les côtés du triangle ABC. Démontrer que les symétriques des circonférences $M\alpha A'$, $M\beta B'$, $M\gamma C'$ par rapport à la tangente se coupent sur la circonférence A'B'C'. (A. Gob.)

1371. Parmi tous les triangles ayant un angle commun et même somme des côtés comprenant cet angle, le triangle isoscèle a le périmètre minimum et la surface maximum.

Déduire de ces propriétés que parmi toutes les figures planes isopérimètres le cercle est un maximum.

Il en résultera que cette propriété du cercle est *indépendante du postulatum d'Euclide.* (G. Tarry.)

×**1372.** Résoudre le système

$$a^2(m+x+y+z)^2 = k^2(y^2+z^2+yz)$$
$$b^2(m+x+y+z)^2 = k^2(z^2+x^2+zx)$$
$$c^2(m+x+y+z)^2 = k^2(x^2+y^2+xy)$$

Rectifications (signalées par M. Paulmier). Page 34, ligne 9, en remontant, *lire* a_{m-1} *au lieu de* a_{m-1}; ligne 6, en remontant dernier terme, *lire* 10^{m-1} *au lieu de* 10^{m-1}. Page 36, dernier mot, *lire* Bianchi, *au lieu de* Biarchi. Page 55, question 1039, dernier mot, *lire* x *au lieu de* y.

DÉTERMINATION DE QUELQUES CLASSES DE COURBES GAUCHES,

par M. A. Demoulin, professeur à l'Université de Gand.

I.

Soient, en un point (x, y, z) d'une courbe gauche, τ le rayon de torsion et c, c', c'' les cosinus directeurs de la binormale.

Dans les formules bien connues

$$\begin{aligned} dx &= \tau\,(c'\,dc'' - c''\,dc'),\\ dy &= \tau\,(c''\,dc - c\,dc''),\\ dz &= \tau\,(c\,dc' - c'\,dc), \end{aligned}$$

faisons $c = c''\alpha$, $c' = c''\beta$; il viendra

$$(1)\quad \begin{cases} dx = -\tau c''^2\,d\beta,\\ dy = \tau c''^2\,d\alpha,\\ ds = \tau c''^2\,(\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha). \end{cases}$$

Proposons-nous de déterminer toutes les courbes telles que $\tau c''^2$ soit une fonction donnée de $\frac{c}{c''}$:

$$\tau c''^2 = f\left(\frac{c}{c''}\right).$$

Les formules ci-dessus nous donnent les coordonnées de ces courbes :

$$\begin{aligned} x &= -\int f(\alpha)\,d\beta,\\ y &= \int f(\alpha)\,d\alpha,\\ z &= \int f(\alpha)\,(\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha), \end{aligned}$$

expressions qui s'écrivent, après des intégrations par parties,

$$(2)\quad \begin{cases} x = -\beta f(\alpha) + \int \beta f'(\alpha)\,d\alpha,\\ y = \int f(\alpha)\,d\alpha,\\ z = \alpha\beta f(\alpha) - \int \alpha\beta f'(\alpha)\,d\alpha - 2\int \beta f(\alpha)\,d\alpha. \end{cases}$$

Tout revient à mettre β, qui est une fonction arbitraire de α, sous une forme telle que les trois quadratures

$$\text{(I)}\ \int \beta f(\alpha)\,d\alpha,\quad \text{(II)}\ \int \alpha\beta f'(\alpha)\,d\alpha,\quad \text{(III)}\ \int \beta f'(\alpha)\,d\alpha$$

puissent être effectuées. Lorsqu'on laisse à la fonction $f(\alpha)$ toute sa généralité, ce problème paraît fort difficile. Je vais indiquer trois formes de $f(\alpha)$ pour lesquelles il peut être résolu.

1° Si $f(\alpha)$ est un polynôme entier de degré n, il suffira de prendre

pour β la dérivée d'ordre $n+1$ d'une fonction arbitraire de α. Les trois intégrales s'obtiendront par une suite d'intégrations par parties.

2° Posons

$$\int \beta f(\alpha)\, d\alpha = \alpha^m \varphi(\alpha),$$

d'où

$$\beta = \frac{1}{f(\alpha)} \cdot \frac{d}{d\alpha}[\alpha^m \varphi(\alpha)].$$

Les intégrales (II) et (III) deviendront

$$\int \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} [m\varphi(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha)]\, \alpha^m d\alpha,$$

$$\int \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} [m\varphi(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha)]\, \alpha^{m-1} d\alpha.$$

Supposons que l'on ait

$$\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{P(\alpha)}{\alpha^p},$$

$P(\alpha)$ étant un polynôme entier de degré n et l'exposant p étant quelconque. Si l'on fait $m = p+1$, les deux intégrales se réduisent aux suivantes

$$\int \alpha P(\alpha) [(p+1)\varphi(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha)]\, d\alpha,$$
$$\int P(\alpha) [(p+1)\varphi(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha)]\, d\alpha,$$

et, pour pouvoir évaluer ces dernières, il suffit de poser $\varphi(\alpha) = \psi^{(n+1)}(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ étant arbitraire.

Le problème est donc résolu pour les fonctions $f(\alpha)$ de la forme

$$e^{\int \frac{P(\alpha)}{\alpha^p} d\alpha}.$$

3° Posons enfin

$$\int \beta f'(\alpha)\, d\alpha = \alpha^m \varphi(\alpha),$$

d'où

$$\beta = \frac{1}{f'(\alpha)} \cdot \frac{d}{d\alpha}[\alpha^m \varphi(\alpha)].$$

Les deux autres intégrales s'écriront

$$\int \alpha^m [m\varphi(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha)]\, d\alpha,$$

$$\int \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \alpha^{m-1} [m\varphi(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha)]\, d\alpha.$$

Choisissons la fonction $f(\alpha)$ de manière que l'on ait

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{P(\alpha)}{\alpha^p},$$

$P(\alpha)$ étant un polynôme entier de degré n et p un nombre entier positif, 0 ou -1, puis faisons $m = p+1$; les intégrales deviendront

$$\int \alpha^{p+1} [(p+1)\varphi(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha)]\, d\alpha,$$
$$\int P(\alpha) [(p+1)\varphi(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha)]\, d\alpha,$$

et l'on pourra effectuer ces deux quadratures en posant $\varphi(\alpha) = \psi^{(\nu)}(\alpha)$, ν désignant le plus grand des deux entiers $p+2$ et $n+1$.

Les fonctions $f(\alpha)$ pour lesquelles le problème est résolu sont ici de la forme

$$e^{\int \frac{\alpha^p\, d\alpha}{P(\alpha)}}.$$

Parmi les valeurs de $f(\alpha)$ données par cette formule, je signalerai la suivante. Faisons $p = 0$ et soit

$$P(\alpha) = A(\alpha - \alpha_1) \dots (\alpha - \alpha_n) = A\Phi(\alpha),$$

les α_k étant tous différents. On aura

$$\frac{1}{P(\alpha)} = \frac{1}{A}\left(\frac{A_1}{\alpha - \alpha_1} + \dots + \frac{A_n}{\alpha - \alpha_n}\right),$$

$$A_k = \frac{1}{\Phi'(\alpha_k)},$$

d'où

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)^{\frac{A_1}{A}} (\alpha - \alpha_2)^{\frac{A_2}{A}} \dots (\alpha - \alpha_n)^{\frac{A_n}{A}}.$$

$f(\alpha)$ sera une fonction algébrique de α si A et les α_k sont rationnels, et même une fraction rationnelle si A a été choisi de manière que les exposants $\frac{A_k}{A}$ soient entiers. Soit $A_k = \frac{p_k}{q_k}$, p_k et q_k étant entiers et premiers entre eux : il suffira de prendre pour $\frac{1}{A}$ le plus petit commun multiple de $q_1, \dots, q_n$.

La formule ci-dessus donne, à titre de cas particulier, $f(\alpha) = \alpha^k$, k étant un nombre quelconque. On obtient encore cette expression de $f(\alpha)$ en posant $p = -1$, $P(\alpha) = \frac{1}{k}$. Je développerai les calculs pour ce choix de $f(\alpha)$. Les courbes correspondantes sont telles que $\tau = \frac{C^k}{C'^{k+1}}$.

L'intégrale (III) se réduit à $\varphi(\alpha)$ et les intégrales (II) et (I) deviennent

$$\int \alpha\varphi'(\alpha)\,d\alpha, \quad \frac{1}{k}\int \alpha\varphi'(\alpha)\,d\alpha,$$

ou, en posant $\varphi(\alpha) = \psi'(\alpha)$,

$$\alpha\psi'(\alpha) - \psi(\alpha), \quad \frac{1}{k}[\alpha\psi'(\alpha) - \psi(\alpha)].$$

En portant ces valeurs dans les formules (2) et observant que $\beta = \frac{\psi''(\alpha)}{k\alpha^{k-1}}$, on trouve

$$x = -\frac{\alpha\psi''(\alpha)}{k} + \psi'(\alpha), \tag{3}$$

$$y = \frac{\alpha^{k+1}}{k+1}, \tag{4}$$

$$z = \frac{\alpha^2\psi''(\alpha)}{k} - \left(1+\frac{2}{k}\right)[\alpha\psi'(\alpha) - \psi(\alpha)], \tag{5}$$

si $k+1$ n'est pas nul, et

$$x = \alpha\psi''(\alpha) + \psi'(\alpha),$$
$$y = \log\alpha.$$
$$z = -\alpha^2\psi''(\alpha) + \alpha\psi'(\alpha) - \psi(\alpha),$$

si $k = -1$.

Donnons à k une valeur rationnelle différente de -1 et proposons-nous de déterminer, parmi les courbes correspondantes, celles qui sont algébriques. On obtiendra une courbe algébrique en prenant pour $\psi(\alpha)$ une fonction algébrique de α. ***Réciproquement, si la courbe est algébrique,*** $\psi(\alpha)$ ***sera algébrique en*** α.

En effet, x, y, z, c, c', c'' seront des fonctions algébriques d'un paramètre t convenablement choisi. En vertu de (4), α sera algébrique en t. Or $\frac{c'}{c''} = \frac{\psi''(\alpha)}{k\alpha^{k-1}}$, donc $\psi''(\alpha)$ sera également algébrique en t, et, en vertu de (3) et (5), il en sera de même de $\psi(\alpha)$ et de $\psi'(\alpha)$. $\psi(\alpha)$ et α étant algébriques en t, $\psi(\alpha)$ sera algébrique en α. CQFD.

II.

Les formules (1) permettent d'établir rapidement une relation entre les torsions de deux courbes polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire, en deux points correspondants.

Rapportons le complexe à trois axes rectangulaires, l'axe central étant pris pour axe des z ; a, b, c, p, q, r étant les coordonnées pluckériennes de la droite, l'équation du complexe est de la forme

$$kc = r,$$

k désignant le paramètre du complexe.

Soit maintenant (C) une courbe quelconque ; sa polaire réciproque par rapport au complexe est une courbe (C_1), lieu du pôle M_1 du plan osculateur en un point variable M de (C). Réciproquement, le point M est le pôle du plan osculateur de (C_1) en M_1. Soient, au point $M(x, y, z)$, τ le rayon de torsion et c, c', c'' les cosinus directeurs de la binormale, et, au point $M_1(x_1, y_1, z_1)$, τ_1 le rayon de torsion et c_1, c_1', c_1'', les cosinus directeurs de la binormale. On a

$$(6)\quad \begin{cases} dx = -\tau c''^2\, d\beta, \\ dy = \tau c''^2\, d\alpha, \\ dz = \tau c''^2\,(\alpha d\beta - \beta d\alpha), \end{cases} \qquad (7)\quad \begin{cases} dx_1 = -\tau_1 c_1''^2 d\beta_1, \\ dy_1 = \tau_1 c_1''^2 d\alpha_1, \\ dz_1 = \tau_1 c_1''^2\,(\alpha_1 d\beta_1 - \beta_1 d\alpha_1), \end{cases}$$

pourvu qu'on pose

$$\alpha = \frac{c}{c''},\ \beta = \frac{c'}{c''};\quad \alpha_1 = \frac{c_1}{c_1''},\ \beta_1 = \frac{c_1'}{c_1''}. \tag{8}$$

Le plan polaire du point M a pour équation, en coordonnées (X, Y, Z),

$$y_1 X - x_1 Y + kZ = kz_1.$$

Or, c'est le plan osculateur de (C) en M, donc

$$\frac{y_1}{c} = \frac{-x_1}{c'} = \frac{k}{c''},$$

par suite,

$$x_1 = -k\frac{c'}{c''} = -k\beta,\quad y_1 = k\frac{c}{c''} = k\alpha; \tag{9}$$

et de même,

$$x = -k\beta_1,\quad y = kx_1. \tag{10}$$

Or, si l'on multiplie membre à membre la première des formules (6) et la première des formules (7), on trouve

$$dx\, dx_1 = \tau c''^2 \cdot \tau_1 c_1''^2\, d\beta\, d\beta_1,$$

relation qui, en vertu des formules (9) et (10), se réduit à

$$\tau c''^2 \cdot \tau_1 c_1''^2 = k^2. \tag{11}$$

D'ailleurs les formules (8), (9) et (10) donnent

$$c''^2 = \frac{k^2}{k^2 + x_1^2 + y_1^2}, \quad c_1''^2 = \frac{k^2}{k^2 + x^2 + y^2},$$

ou, en appelant r et r_1 les distances des points M et M_1 à l'axe central du complexe

$$c''^2 = \frac{k^2}{k^2 + r_1^2}, \quad c_1''^2 = \frac{k^2}{k^2 + r^2}.$$

Portant ces valeurs dans l'égalité (11), on obtient finalement la relation

$$\tau\tau_1 = \left(k + \frac{r^2}{k}\right)\left(k + \frac{r_1^2}{k}\right)$$

que j'ai fait connaître ailleurs (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, séance du 29 janvier 1898).

Si les tangentes de la courbe (C) appartiennent au complexe, les courbes (C_1) et (C) coïncident et la formule ci-dessus conduit à la suivante, due à Sophus Lie,

$$\tau = k + \frac{r^2}{k}.$$

SUR UNE TRANSFORMATION PAR RAPPORT A UNE CONIQUE,

par M. E. N. Barisien.

Soient M le point d'intersection des tangentes et N celui des normales menées aux extrémités d'une corde PQ d'une conique Σ; M' celui des droites menées par P et Q symétriquement à PM et à QM par rapport à la direction d'un axe de Σ; N' celui des droites menées par P et Q symétriquement à PN et à QN par rapport à la même direction. On peut se proposer d'étudier les transformations (M, M'), (N, N'), (M, N'), (M', N).

Voici quelques résultats intéressants dont la démonstration ne présente pas beaucoup de difficultés.

1° Si l'on prend pour Σ une parabole de sommet O, les droites OM, OM' sont symétriques par rapport à l'axe de Σ, et l'on a $OM' = 3OM$.

2° Prenons pour Σ une ellipse et pour M un point d'une diagonale du rectangle des axes; alors le point M' est situé sur la même diagonale.

3° Si PQ est un côté d'un triangle d'aire maxima inscrit à une ellipse, N est l'orthocentre d'un tel triangle et décrit une ellipse (théorème connu); le point N′ décrit également une ellipse.

4° Si le point N décrit l'une des diagonales du rectangle des axes d'une ellipse Σ, N′ décrit l'autre diagonale, et le lieu de M se compose du cercle de Monge de Σ et de l'hyperbole équilatère qui a pour sommets les foyers de F.

5° Le lieu du point M tel que le milieu de M′N′ décrive un axe de Σ, est une circonférence.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES OVALES DE DESCARTES,

par M. Gomes Teixeira, directeur de l'École Polytechnique de Porto.

On sait que l'équation bipolaire de ces courbes est

$$\rho + k\rho' = k,$$

où ρ et ρ' sont les distances d'un point quelconque de la courbe à deux points fixes F, F′, qui sont des foyers ; k et k sont des constantes.

Prenons pour axes de coordonnées la droite FF′ et la perpendiculaire en F, et posons $FF' = a$; nous aurons

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = \rho'^2 = \left(\frac{k-\rho}{k}\right)^2,$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{(k^2-1)^2\rho^2 + 2k\rho + a^2k^2 - k^2}{2ak^2}$$

$$y^2 = \frac{[(k^2-1)^2\rho^2 + 2k\rho + a^2k^2 - k^2)]^2 - 4a^2k^4\rho^2}{4a^2k^4}.$$

Cela posé, considérons la droite

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Elle rencontre la courbe en quatre points dont on obtient les distances au point F en substituant les valeurs x et y en ρ dans l'équation (1). En rendant l'équation rationnelle et ordonnant par rapport à ρ, on trouve

$$\frac{(k^2-1)^2}{4a^2k^4}(A^2+B^2)\rho^4 + \frac{k(k^2-1)}{a^2k^4}(A^2+B^2)\rho^3$$

$$+ \cdots + \frac{(a^2k^2-k^2)^2}{4a^2k^4}(A^2+B^2) + C^2 + AC\frac{a^2k^2-k^2}{ak^2} = 0.$$

Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 les quatre racines; on aura

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4=-\frac{4k}{k^2-1},$$

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4=\frac{(a^2k^2-k^2)^2}{(k^2-1)^2}+\frac{4a^2k^4}{(k^2-1)^2}\left[C^2+AC\frac{a^2k^2-k^2}{ak^2}\right].$$

La première de ces relations est connue. La seconde, si l'on y fait $C=0$, donne un théorème qui est un cas particulier d'une proposition connue, applicable à toutes les courbes cycliques; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

On obtient une propriété nouvelle en supposant

$$C=-A\frac{a^2k^2-k^2}{a^2k^2};$$

cette hypothèse donne

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4=\frac{(a^2k^2-k^2)^2}{(k^2-1)^2}, \tag{2}$$

et l'équation de la sécante est maintenant

$$A\left(x-\frac{a^2k^2-k^2}{ak^2}\right)+By=0. \tag{3}$$

Toutes les droites représentées par l'équation (3), lorsque A et B varient, passent par le point fixe f de FF′ qui a pour coordonnées

$$x_1=\frac{a^2k^2-k^2}{ak^2},\quad y_1=0.$$

Ainsi, *il existe sur l'axe* FF′ *un point f tel que toute droite menée par ce point coupe l'ovale en quatre points dont le produit des distances au foyer* F *est constant.*

Le foyer F′ jouit évidemment d'une propriété analogue, mais par rapport à un autre point f' de la droite FF′. Si l'on écrit l'équation bipolaire sous la forme

$$\rho'+\frac{1}{k}\rho=\frac{k}{k},$$

on voit qu'on passe de F à F′ en changeant dans les résultats précédents k en $\frac{1}{k}$ et k en $\frac{k}{k}$. On a donc pour l'abscisse de f' :

$$F'f'=\frac{a^2-k^2}{a}=a-\frac{k^2}{a},\quad \text{d'où}\quad Ff'=\frac{k^2}{a},$$

et pour les rayons vecteurs des points où une sécante menée par f' coupe l'ovale

$$\rho'_1\rho'_2\rho'_3\rho'_4 = \frac{(a^2-k^2)^2}{(k^2-1)^2}.$$

La courbe possède un troisième foyer F'' situé sur l'axe FF', et dont l'abscisse $FF'' = a_1$ a pour valeur

$$a_1 = \frac{a^2k^2-k^2}{a(k^2-1)},$$

et l'équation bipolaire correspondante est

$$\rho + \frac{ak}{k}\rho'' = \frac{a^2k^2-k^2}{k(k^2-1)}.$$

Pour passer du couple FF' au couple FF'', il suffit de remplacer a, k, k par

$$a_1, \quad \frac{ak}{k}, \quad \frac{a^2k^2-k^2}{k(k^2-1)};$$

ces substitutions n'altèrent pas les valeurs de x_1 et $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$, ce qui est évident.

A F'' correspond un point f'' tel, que

$$F''f' = \frac{a(a^2k^2-k^2)}{k^2(k^2-1)}, \quad \rho''_1\rho''_2\rho''_3\rho''_4 = \frac{(a^2k^2-k^2)^2(k^2-a^2)^2}{a^4(k^2-1)^2}.$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

18. *Sur le développement de cos nφ suivant les puissances de cos φ.* E. Heine indique les deux méthodes suivantes, plus *expéditives* que les procédés ordinaires (*Mathematische Annalen*, t. II, p. 186).

I. On a identiquement

$$l(1-ae^{\varphi}) + l(1-ae^{-\varphi}) = l(1-2a\cos\varphi+a^2),$$
$$= l[1-a(2\cos\varphi-a)].$$

Si l'on développe les deux membres d'après la formule

$$-l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

le coefficient de $-a^n$, dans le premier membre, se réduit à $\frac{2\cos n\varphi}{n}$; le second membre prend la forme

$$-\Sigma\frac{a^\nu}{\nu}(2\cos\varphi-a)^\nu = -\Sigma\left[\frac{(2\cos\varphi)^\nu}{\nu}a^\nu - \frac{\nu}{1}\frac{(2\cos\varphi)^{\nu-1}}{\nu}a^{\nu+1} + \cdots\right]$$

où ν reçoit les valeurs 0, 1, 2, 3, ···. En égalant les coefficients de a^n on obtient la formule cherchée

$$\frac{2\cos n\varphi}{n} = \frac{(2\cos\varphi)^n}{n} - (n-1)\frac{(2\cos\varphi)^{n-2}}{n-1} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\frac{(2\cos\varphi)^{n-4}}{n-2} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}\frac{(2\cos\varphi)^{n-6}}{n-3} + \cdots$$

II. On peut aussi partir de l'identité

$$\frac{1}{1-ae^{i\varphi}} + \frac{1}{1-ae^{-i\varphi}} = 2\frac{1-a\cos\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2},$$

et développer les deux fractions du premier membre et

$$[1-a(2\cos\varphi-a)]^{-1}$$

d'après la formule

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots,$$

puis égaler les coefficients a^n dans les deux membres de l'identité.

Pour obtenir l'expression de $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ en fonction de $\cos\varphi$, on peut se servir de l'identité

$$\frac{1}{1-ae^{i\varphi}} - \frac{1}{1-ae^{-i\varphi}} = \frac{2ia\sin\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}.$$

14. *Sur la question* 1343 (*Mathesis*, (3) II, p. 99). La solution devient assez simple si l'on part de l'équation d'une conique qui touche les axes coordonnés OX, OY et a pour centre le point C (α, β). La corde de contact étant divisée par OC en deux parties égales, ses coordonnées à l'origine sont proportionnelles à α et β; par suite, son équation a la forme $\alpha y + \beta x - \lambda = 0$, et la conique peut être représentée par

$$(\alpha y + \beta x - \lambda)^2 - 2Kxy = 0. \qquad (1)$$

En exprimant que α et β annulent la dérivée du premier membre de l'équation (1) par rapport à x, on trouve la valeur de K. L'équation demandée est donc

$$(\alpha y + \beta x - \lambda)^2 - 2(2\alpha\beta - \lambda)xy = 0.$$

(J. Déprez).

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de trigonométrie par A. MINEUR, professeur à l'Université libre de Bruxelles. Quatrième édition. Bruxelles, Stevens, 1901 (VI, 280 p. in-8°).

SOMMAIRE. *Chapitre I* (pp. 1-16). Théorie des projections y compris les produits géométriques dans le plan. *Chapitre II* (pp. 17-41). Lignes trigonométriques : 1. Sinus. 2. Cosinus. 3. Tangente. 4. Cotangente. 5. Sécante. 6. Cosécante (Définition par les vecteurs). 7. Définition de la trigonométrie = théorie des fonctions circulaires avec les applications à la géométrie du plan et de la sphère. 8. Relations entre les lignes trigonométriques d'un même arc. 9. Exercices. *Chapitre III* (pp. 42-63). Addition des arcs. Cinq démonstrations des formules donnant $\sin(x \pm y)$, $\cos(x \pm y)$. Conséquences pour $\sin p + \sin q$, etc., pour $\operatorname{tang}(x + y)$, etc. Applications diverses. Exercices *Chapitre IV* (pp. 64-72). Multiplication des arcs. Exercices. *Chapitre V* (pp. 73-81). Division des arcs. Exercices. *Chapitre VI* (pp. 82-112). Tables Trigonométriques. 1. Construction. 2. Usage. 3. Méthode pour rendre les formules calculables par logarithmes. 4. Exercices. *Chapitre VII* (pp. 113-173). Trigonométrie rectiligne. 1-2. Formules relatives aux triangles rectangles ou quelconques. 3-4. Résolution des triangles rectangles ou quelconques. 5. Quadrilatère. 6. Operations sur le terrain. 7. Exercices nombreux (16 pages) contenant un résumé de la géométrie récente. *Chapitre VIII* (pp. 174-219). Trigonométrie sphérique. 1. Projections dans l'espace. 2. Formules relatives aux triangles quelconques (quatre démonstrations de la formule fondamentale). 3. Formules relatives aux triangles rectangles. 4-5. Résolution des triangles rectangles ou quelconques. 6. Applications diverses et exercices (12 pages). *Appendice* (pp. 220-231). 1. Représentation géométrique des imaginaires (Nous ne pensons pas que la formule de Moivre pour m incommensurable soit démontrée avec rigueur). 2-3. Résolution de l'équation du second degré. 4. Tables trigonométriques. *Questions à résoudre* (pp. 232-280) très variées au nombre de 320 classées par chapitres.

Le cours de trigonométrie de M. Mineur est l'un des meilleurs que l'on puisse conseiller aux professeurs qui veulent se mettre au courant des méthodes modernes les plus savantes pour l'exposition de la trigonométrie et avoir en même temps à leur disposition une bonne collection d'exercices suffisamment difficiles. On ne peut, au contraire, le mettre entre les mains que d'élèves d'élite, connaissant déjà la trigonométrie; encore faut-il les guider dans un répertoire de formules et de démonstrations aussi riche que l'est ce cours : sans cela, ils seraient exposés à apprendre plus de trigonométrie qu'il n'est nécessaire d'en savoir, même si l'on est mathématicien de profession.

Voici quelques desiderata que nous soumettons à l'auteur : 1° Il aurait été utile, ce semble, de signaler quelques autres tables que celles de Lalande (ou plutôt de Marie; celles de Lalande n'ont que 5 décimales) et de Callet. N'aurait-il pas fallu aussi parler de la division décimale du quadrant, très employée en France, de la division décimale du degré qui pourrait bien

triompher ailleurs, et des tables correspondantes? 2° Dans un cours aussi complet que celui de M. Mineur, on aurait pu donner, comme Serret et Mantel, le développement de sinus et de cosinus en série et en produit infini. 3° L'auteur est bien près de la théorie des quaternions dans sa théorie des projections; en sacrifiant quelques applications, il aurait pu en faire connaître les premiers principes sans grossir son volume. 4° Les formules approximatives de Cusa, de Newton méritaient peut-être aussi une page ou deux. 5° Enfin, il semble qu'un aperçu de la théorie des fonctions hyperboliques serait à sa place dans l'appendice. (P. M.)

Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et au moyen-âge, par H.-G. Zeuthen, Professeur à l'Université de Copenhague. Édition française, revue et corrigée par l'auteur, traduite par Jean Mascart. Paris, Gauthier-Villars, 1902 (in-8 de XV-296 pages, avec 31 figures). Prix : 9 fr.

« Je me suis efforcé, dans cette *Histoire des Mathématiques*, dit l'auteur, de mettre principalement en relief ce qu'il importe aux étudiants et aux professeurs de savoir. L'essentiel n'est pas, pour eux, de posséder un grand nombre de détails historiques, de connaître le premier qui découvrit telle ou telle vérité, qui préconisa telle ou telle méthode, mais, bien plutôt, de pouvoir apprécier exactement les formes sous lesquelles vérités et méthodes se manifestèrent, et quelles applications en furent faites; et, par la même occasion, la notion précise de ces origines sera la condition indispensable pour comprendre la lente évolution des formes, jusqu'à donner aux Mathématiques leur physionomie actuelle...

« L'édition que M. Gauthier-Villars veut bien publier en français m'a permis de faire les additions et les corrections que peuvent nécessiter les progrès effectués, dans la connaissance de l'Histoire des Mathématiques, depuis l'apparition des autres éditions....

« Je dois encore remercier M. Jean Mascart pour les grands soins qu'il sut apporter afin de rendre bien exactement ma pensée; et les lecteurs, j'en suis sûr, sauront gré, comme moi, à M. Paul Tannery : ses annotations, marquées (T.), malgré leur étendue restreinte, comportent toutes des renseignements aussi intéressants qu'importants. »

Nous avons rendu compte de l'édition allemande de cet excellent manuel, dans *Mathesis*, 1898, (2) VIII, pp. 195-196. Nous y renvoyons le lecteur, nous contentant de reproduire le sommaire de l'ouvrage :

Avant-propos. — Introduction. Mathématiques préhistoriques. Égyptiens et Babyloniens. — Les mathématiques grecques. Aperçu historique. Les Mathématiques pythagoriciennes. L'Arithmétique géométrique. Algèbre géométrique. Équations quadratiques numériques; extraction de la racine carrée. L'infini. La quadrature du cercle. Trisection de l'angle; intercalations. Duplication du cube. Théorèmes et problèmes; sens et portée de la construction géométrique. Méthode analytique; forme analytique, synthétique d'exposition.

Éléments : moyens auxiliaires d'Analyse. Aperçu des éléments d'Euclide; système synthétique. Hypothèses géométriques d'Euclide. Note sur les hypothèses de la Géométrie. La théorie générale des proportions; cinquième et sixième Livres d'Euclide. Grandeurs commensurables et leur traitement numérique; septième et neuvième Livres d'Euclide. Grandeurs incommensurables; dixième Livre d'Euclide. Éléments de Stéréométrie; polyèdres réguliers; onzième et treizième Livres d'Euclide. Démonstration d'exhaustion; douzième Livre d'Euclide. Déterminations infinitésimales chez Archimède. Théorie de l'équilibre par Archimède. La théorie des sections coniques avant Apollonius. Les sections coniques d'Apollonius. Lieux et problèmes solides. Géométrie calculante. Géométrie sphérique. Décadence de la Géométrie grecque. Arithmétique grecque plus récente : Diophante. — Les Mathématiques indiennes. Aperçu historique. Noms et signes des nombres; numération avant les Indiens, et chez eux. Emploi du calcul numérique. Algèbre et théorie des nombres; Géométrie. — Le moyen âge. Introduction générale. L'Arithmétique et l'Algèbre des Arabes. La Trigonométrie des Arabes. Premier réveil des Mathématiques en Europe.

(P. M.)

Revue décennale des thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, en vue du grade de Docteur ès sciences, du 1er janvier 1891 au 31 décembre 1900, avec l'indication des Périodiques contenant la plupart de ces Mémoires ou leurs Analyses par E. Estanave, Docteur ès sciences. Arcis-sur-Aube, Frémont. Paris, Croville-Morant, 1901 (115 pages in-8). Prix : 5 francs.

Enumération de 347 dissertations de doctorat (63 de mathématiques, 146 relatives aux sciences physiques, 138 aux sciences naturelles) avec les indications bibliographiques indiquées dans le titre; table alphabétique des auteurs; table systématique des dissertations. Quelques indications biographiques sur chaque auteur viennent après le titre de chaque dissertation; quelques renseignements sur le doctorat précèdent la liste des dissertations. Voici les noms des 63 docteurs en sciences mathématiques : Antomari, Bachelier, Baire, Beudon, Borel, Bouasse, Boulanger, Bourguet, Bourlet, Cahen (Eugène et Armand), Caronnet, Cartan, Cels, Coculesco, Cotton, Cousin, Davidoglou, Delassus, Delemer, Desaint, Drach, Edler von Leber, Fabry, Féraud, Gérard, Gonnessiat, Grévy, Hadamard, Haure, Mlle Klumpke, Lacour, Léau, Lebœuf, Lelieuvre, Le Roux, Le Roy, Le Vavasseur, Maillet, Maltezos, Mangeot, Marotte, Mascart, Nau, Padé, Paraf, Perchot, Périer, Petrovitch, Picart, Rougier, Sacerdote, Sautreaux, de Séguier, Servant, Simonin, Suchar, de Tannenberg, Thybaut, Tresse, Titzeica, Vessiot.

Le recueil bio-bibliographique de M. Estanave est évidemment très utile à tous ceux qui s'occupent de recherches scientifiques, à cause de la valeur exceptionnelle des dissertations de doctorat de l'Université de Paris.

(P. M.)

Quelques réflexions sur la Mécanique suivies d'une première leçon de dynamique, par E. PICARD, membre de l'Institut. Paris, Gauthier-Villars, 1902 (V-57 p. in-8).

Étude critique et exposé systématique des premiers principes de la mécanique, où l'auteur, ce nous semble, sépare plus nettement que dans beaucoup de manuels et de traités ce qui est expérimental et ce qui ne l'est pas dans cette partie de la Science. La brochure de M. Picard fera pénétrer les idées de M. Duhem sur le vrai caractère des représentations mécaniques des phénomènes matériels, dans des milieux jusqu'ici réfractaires à la considération des propriétés qualitatives des corps. (P. M.)

La fonction gamma; théorie, histoire, bibliographie par M. GODEFROY, bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille. Paris, Gauthier-Villars, 1901 (VII-94 pages in-8). Prix : 3 fr. 50.

La monographie de la fonction gamma de M. Godefroy est la troisième qui ait été publiée en français sur cette transcendante. Les deux autres sont : *Théorie de la fonction gamma*, par H. LIMBOURG; Tournay, Casterman, 1859 (139 pages in-8°). *Monographie de la fonction gamma*, par M. G. BRUNEL; Bordeaux, Dutha, 1886 (184 pages in-8°), qui a paru aussi dans le t. III de la 3e série des Mémoires de la Société des sciences naturelles de Bordeaux. Le travail de Limbourg exposait les travaux des géomètres sur la fonction gamma, jusqu'à ceux de Weierstrass exclusivement, sous une forme élémentaire : il contenait des recherches de l'auteur sur l'approximation maxima de gamma au moyen de la série de Stirling Celui de Brunel contient le résumé ou au moins des indications bibliographiques sur les recherches des géomètres jusqu'en 1886 Bien que publiée quinze ans plus tard, la monographie de M. Godefroy ne renferme pas maintes de belles propriétés de gamma connues depuis longtemps. Cela provient de ce que l'auteur prend pour point de départ la définition de gamma par les produits infinis et qu'il ne recourt nulle part au calcul intégral; par suite, il exclut de son exposé les nombreuses propriétés de gamma où entrent des intégrales. Selon lui, le mode d'exposition par les produits infinis est *plus concis, plus rigoureux et plus naturel*. Nous ne sommes nullement de cet avis : la méthode la plus naturelle et la plus concise d'exposer la théorie de gamma, c'est celle où l'on emploie, *suivant les cas*, le calcul intégral ou les produits infinis : *c'est ainsi que les inventeurs ont trouvé les propriétés de gamma*. On peut d'ailleurs exposer les deux méthodes avec la même rigueur comme on peut le voir dans maints traités d'analyse.

La monographie de gamma, *considéré comme produit infini*, de M. Godefroy contient sept chapitres : 1 Historique (sommaire). 2. Etude générale de la fonction gamma et des fonctions apparentées de Prym (et non Prÿm) et d'autres géomètres. 3. Propriétés de gamma. 4. Fonctions de Binet. 5. Dérivées de gamma 6. Développements en séries entières. 7. Applications.

Des recherches très récentes, même publiées en suédois ou en tchèque, sont

résumées dans le livre de M. Godefroy. Des recherches anciennes aussi importantes, qui ont paru en Belgique ou en Suisse (Graf, Landsberg, Schaar, Limbourg) ne sont pas citées. Certaines démonstrations s'appuient sur des théorèmes de la théorie des fonctions qui ne sont nullement élémentaires.

En somme, la monographie de M. Godefroy est un très bon mémoire, mais la méthode employée est trop exclusive. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1282.

(Voir *Mathesis*, (2), X, p. 215.)

X, Y, Z *sont trois points dans le plan d'un triangle* ABC *tels que les droites* AY *et* AZ, BZ *et* BX, CX *et* CY *soient, respectivement symétriques par rapport aux bissectrices* AI, BI, CI *du triangle* ABC. *On fait parcourir à* Y *une droite donnée* u_b, *à* Z *une droite donnée* u_c. *Démontrer les propriétés suivantes :*

1° *Le lieu de* X *est une droite* u_a.

2° *Si* u_b *est perpendiculaire à* CA *et* u_c *à* AB, u_a *est perpendiculaire à* BC.

3° *Si* u_a, u_b, u_c *coupent* BC, CA, AB *en* A_1, B_1, C_1, *le triangle* $A_1B_1C_1$ *est homologique à* ABC (*Enoncé rectifié*).

4° *Les droites* AX, BY, CZ *concourent sur une conique circonscrite au triangle* ABC *et passent par le centre d'homologie des triangles* ABC, $A_1B_1C_1$.

5° *Etant donné ce centre d'homologie, les droites* u_a, u_b, u_c *peuvent varier de manière qu'elles se coupent en un même point; chercher le lieu de ce point.* (J. A. Third.)

Solution par MM. Déprez et Emmerich. Soient

$$b_1x + b_2y + b_3z = 0, \quad c_2x + c_3y + c_3z = 0,$$
$$\lambda y - z = 0, \qquad \lambda z - y = 0$$

les équations des droites u_b, u_c, AY, AZ.

On en conclut les coordonnées des points Y et Z :

$$b_2 + b_3\lambda, \quad -b_1, \quad -b_1\lambda; \quad c_2\lambda + c_3, \quad -c_1\lambda, -c_1;$$

ensuite, les équations des droites CY, CZ;

$$b_1x + (b_2 + b_3\lambda)\,y = 0; \quad c_1x + (c_2\lambda + c_3)\,z = 0;$$

enfin, celles de leurs isogonales CX, BX :

$$(b_2 + b_3\lambda)\,x + b_1\,y = 0; \quad (c_2\lambda + c_3)\,x + c_1z = 0.$$

L'élimination de λ entre ces dernières équations donne pour le lieu de X :

$$(b_2c_2 - b_3c_3)\,x + b_1c_2y - b_3c_1z = 0.$$

2° Si u_b, u_c sont perpendiculaires à CA, AB, on a

$$b_2 = b_1 \cos C + b_3 \cos A, \quad c_3 = c_2 \cos A + c_1 \cos B;$$

éliminant cos A on trouve

$$b_2c_2 - b_3c_3 = b_1c_2 \cos C - b_3c_1 \cos B,$$

ce qui exprime que u_a est perpendiculaire à BC.

3° Si dans les équations de u_a, u_b, u_c on fait respectivement $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on trouve pour les droites AA_1, BB_1, CC_1 :

$$b_1c_2y - b_3c_1z = 0, \quad b_1x + b_3z = 0, \quad c_1x + c_2y = 0.$$

Il en résulte que ces droites se coupent en un point D défini par

$$\frac{x}{-b_3c_2} = \frac{y}{c_1b_3} = \frac{z}{b_1c_2}.$$

4° Les droites AX, BY, CZ ont pour équations

$$\frac{b_1y}{b_2 + b_3\lambda} = \frac{c_1z}{c_2\lambda + c_3}, \quad \frac{x}{b_2 + b_3\lambda} = \frac{z}{b_1\lambda}, \quad \frac{x}{c_2\lambda + c_3} = -\frac{y}{c_1\lambda}. \tag{1}$$

Elles se coupent au point N défini par

$$-x : y : z = 1 : \frac{c_1\lambda}{c_2\lambda + c_3} : \frac{b_1\lambda}{b_3\lambda + b_2}.$$

L'élimination de λ entre deux des équations (1) donne

$$\frac{b_2c_2 - b_3c_3}{x} + \frac{b_2c_1}{y} - \frac{b_1c_3}{z} = 0;$$

donc le point N parcourt une conique circonscrite au triangle ABC et passant par D.

5° Soient (p, q, r) les coordonnées du point D supposé fixe et soient (x, y, z) les coordonnées du point de concours E des droites u_a, u_b, u_c. Nous avons les égalités

$$b_1p + b_3r = 0, \quad c_1p + c_3q = 0, \tag{2}$$

$$b_1x + b_3y + b_1z = 0, \quad c_1x + c_3y + c_1z = 0, \tag{3}$$

$$(b_2c_2 - b_3c_3)\,x + b_1c_3y - b_3c_1z = 0. \tag{4}$$

Pour avoir le lieu (E), il faut éliminer les b et c entre les cinq égalités. Tirons d'abord b_1 et c_1 de (2) pour substituer les valeurs dans (3) et (4); il vient

$$b_3py + b_3(pz - rx) = 0, \quad c_3(py - qx) + c_1pz = 0, \tag{3'}$$

$$p(b_2c_2 - b_3c_3)\,x + b_3c_3(qz - ry) = 0. \tag{4'}$$

Ces équations étant homogènes en b_2 et b_3, c_2 et c_3, il reste à remplacer, dans l'équation (4'), les quantités b_2, b_3, c_2, c_3 par

$$rx - pz, \quad py, \quad pz, \quad qx - py.$$

L'équation du lieu de E est donc

$$x[rxz + pxy - pz^2 - qx^2] + yz(qz - ry) = 0.$$

Ce lieu est une cubique.

Remarques (dues à M. Déprez). I. Si les droites u_b, u_c sont données, les côtés du triangle XYZ enveloppent trois coniques.

II. Soient X_1, Y_1, Z_1 les points de rencontre des couples de droites (BZ, CY), (AZ, CX), (AY, BX); ces points décrivent les trois coniques inverses triangulaires des droites u_a, u_b, u_c.

III. Si les points Y, Z décrivent deux coniques U_b, U_c circonscrites au triangle ABC, X décrit également une conique circonscrite à ce triangle, et les droites AX, BY, CZ concourent sur une droite, etc.

Note. Les n^os^ 1 et 2 s'établissent facilement par la géométrie projective.

En effet, les droites isogonales AY et AZ, BZ et BX, CX et CY se correspondent respectivement dans des faisceaux inversement égaux; mais lorsque Y et Z décrivent u_b et u_c, les six faisceaux sont projectifs deux à deux; en mettant Y en B_1, on voit que BC est un rayon uni des faisceaux (BX), (CX), donc X décrit une droite.

Pour établir le n° 2, il suffit de prendre pour Y le point à l'infini sur u_b.

(J. N.)

Question 1227.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 176.)

Si l'on convient de représenter $\sin(\sin x)$ *par* $\sin_2 x$, $\sin(\sin_2 x)$ *par* $\sin_3 x$, etc, *démontrer que la vraie valeur de l'expression*

$$\frac{x^{n-1}\sin_n x - \sin^n x}{x^{n+4}}$$

pour $x = 0$ *est* $\frac{1}{36}n(n-1)$. (Schlömilch.)

Solution par MM. Verheugen *et* Rose. Soit y_n l'expression proposée; on a

$$y_n = \frac{\sin_n x - \dfrac{\sin^n x}{x^{n-1}}}{x^5}. \qquad (1)$$

Nous allons employer les développements en série suivant les puissances croissantes de x en supprimant les termes dont le degré surpasse 5.

1° Soit d'abord $n = 2$. On sait que

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \ldots ; \qquad (2)$$

il en résulte

$$\sin_2 x = \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{120}\sin^5 x \ldots$$

En remplaçant $\sin x$ par la série (2) on trouve

$$\sin_2 x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 \ldots$$

Par conséquent, y_2 a la valeur

$$\frac{1}{x^3}\left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 \cdots - \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \ldots\right)^2\right].$$

La quantité entre crochets se réduisant à $\frac{1}{18}x^5 \ldots$, le théorème est démontré pour y_2.

2° Supposons la proposition vérifiée pour y_n et démontrons qu'elle est encore vraie pour y_{n+1}. De l'égalité (1) on tire

$$\sin_n x = y_n x^3 + \frac{\sin^n x}{x^{n-1}}.$$

Par hypothèse, y_n est de la forme $\frac{n(n-1)}{36} + E$, E étant une quantité qui s'annule avec x; on a donc

$$\begin{aligned}\sin_n x &= \left[\frac{n(n-1)}{36} + E\right]x^3 + \frac{1}{x^{n-1}}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right)^n \\ &= x - \frac{n}{6}x^3 + \left[\frac{n(n-1)}{36} + \frac{n}{120} + \frac{n(n-1)}{2.36}\right]x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{n}{6}x^3 + \frac{n(5n-4)}{120}x^5 \ldots \qquad (3)\end{aligned}$$

Substituons cette valeur dans l'égalité

$$\sin_{n+1} x = \sin_n x - \frac{1}{6}\sin_n^3 x + \frac{1}{120}\sin_n^5 x \ldots ;$$

il vient

$$\sin_{n+1} x = x - \frac{n+1}{6}x^3 + \left[\frac{n(5n-4)}{120} + \frac{3n}{6.6} + \frac{1}{120}\right]x^5 \ldots$$

$$= x - \frac{n+1}{6}x^3 + \frac{(n+1)(5n+1)}{120}x^5 \ldots, \qquad (4)$$

ce qui est la formule (3) où l'on change n en $n+1$. Ensuite

$$y_{n+1} = \frac{1}{x^3}\left[\sin_{n+1} x - \frac{\sin^{n+1} x}{x^n}\right].$$

Remplaçons $\sin_{n+1} x$ par la valeur (4) et $\dfrac{\sin^{n+1} x}{x^n}$ par

$$\frac{1}{x^n}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cdots\right)^{n+1} = x - \frac{n+1}{6}x^3 + \left[\frac{n+1}{120} + \frac{(n+1)n}{2.36}\right]x^5 \ldots ;$$

il vient

$$y_{n+1} = \frac{1}{x^3}\left[\frac{n(n+1)}{36}x^5 \ldots\right].$$

D'où l'on conclut que la proposition est encore vraie pour y_{n+1}.

×Question 1899.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 176).

Les cercles d'Apollonius d'un triangle se coupent deux à deux sous des angles égaux à 120°. (E. Lemoine).

Solution par M. J. Déprez. Soient A_1, B_1 les centres des cercles d'Apollonius relatifs aux côtés BC, CA du triangle, V le centre isodynamique situé à l'intérieur de ABC. On sait que les cercles (A_1), (B_1) sont orthogonaux au cercle ABC et que l'angle $AVB = C + 60°$. Or, on a, successivement

$$A_1VB_1 = AVA_1 + BVB_1 - AVB = VAA_1 + VBB_1 - AVB$$

$$= VAB + BAA_1 + VBA + ABB_1 - AVB = 2^{dr} - AVB + 2C - AVB$$

$$= 2[1^{dr} - AVB] + 2C = 60°.$$

Donc les cercles (A_1), (B_1) se coupent sous l'angle de 120°.

M. Emmerich, en nous adressant une solution analogue, même plus détaillée, rappelle que le théorème a été énoncé par M. Glaser, de Hamburg (*Zeitschrift für math. and naturw. Unterricht*, 1890, p. 31 et 423) et dit qu'une démonstration simple et vraiment élémentaire ne semble pas avoir été déjà publiée.

Solution par MM. A. Droz-Farny, Pire, Ripert, Boutin et Plakhovo. Les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A rencontrent le côté BC en A′ et A″; le cercle d'Apollonius relatif au côté BC sera le cercle décrit sur A′A″ comme diamètre; son centre D, point milieu de A′A″, est le point d'intersection avec BC de la tangente en A au cercle circonscrit ABC. Soit de même E le centre du cercle d'Apollonius relatif au côté AC et supposons $a > b > c$.

Des relations connues

$$\frac{BA'}{c} = \frac{CA'}{b} = \frac{a}{b+c}, \quad \frac{A''C}{b} = \frac{A''B}{c} = \frac{a}{b-c},$$

on déduit aisément

$$DA = \frac{abc}{b^2 - c^2}, \quad DB = \frac{ac^2}{b^2 - c^2}, \quad DC = \frac{ab^2}{b^2 - c^2};$$

de même,

$$EB = \frac{abc}{a^2 - c^2}, \quad EA = \frac{bc^2}{a^2 - c^2}, \quad EC = \frac{ba^2}{a^2 - c^2}.$$

Soit φ l'angle d'intersection des deux cercles d'Apollonius de centres D et E; on aura, en exprimant de deux manières la quantité $\overline{DE}^2$:

$$\overline{DC}^2 + EC^2 - 2DC.EC.\cos C = \overline{DA}^2 + \overline{EB}^2 + 2DA.EB.\cos\varphi,$$

$$\overline{DC}^2 - DB.DC + \overline{EC}^2 - EA.EC = 2DC.EC\cos C + 2DA.EB.\cos\varphi,$$

$$a.DC + b.EC = 2DC.EC\cos C + 2DA.EB.\cos\varphi,$$

$$\frac{a^2b^2}{b^2 - c^2} + \frac{a^2b^2}{a^2 - c^2} = \frac{2a^2b^2\cos C}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} + \frac{2a^2b^2c^2\cos\varphi}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}$$

$$a^2 + b^2 - 2c^2 = 2ab\cos C + 2c^2\cos\varphi$$

$$a^2 + b^2 - 2c^2 = a^2 + b^2 - c^2 + 2c^2\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = -\tfrac{1}{2}, \quad \varphi = 120°.$$

Même démonstration pour les deux autres cas.

Solution par M. Lez. Prenons ABC pour triangle de référence; les cercles d'Apollonius, passant par un sommet de ce triangle et par les pieds des bissectrices correspondantes, auront pour équations en coordonnées normales :

$$\beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\gamma\cos B + 2\alpha\beta\cos C = 0, \quad (1),$$

$$\gamma^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta\cos C + 2\beta\gamma\cos A = 0, \quad (2),$$

$$\alpha^2 - \beta^2 - 2\beta\gamma\cos A + 2\alpha\gamma\cos B = 0. \quad (3).$$

Ils se coupent en deux points sur la corde commune

$$\alpha\sin(B - C) + \beta\sin(C - A) + \gamma\sin(A - B) = 0, \quad (4)$$

qui n'est autre que le diamètre de Brocard, passant par le point K de Lemoine (sin A, sin B, sin C) et par le centre O du cercle circonscrit (cos A, cos B, cos C).

Par suite, les coordonnées des points d'intersection T, S des cercles d'Apollonius sont de la forme

$$p\cos A + q\sin A, \quad p\cos B + q\sin B, \quad p\cos C + q\sin C;$$

en les substituant dans l'équation (1) on trouve

$$p\sqrt{3} = \pm q,$$

de sorte que les coordonnées de S et T sont

$$\sin A \pm \cos A\sqrt{3}, \quad \sin B \pm \cos B\sqrt{3}, \quad \sin C \pm \cos C\sqrt{3}.$$

Les centres M, N, P des mêmes cercles ayant pour coordonnées

$$(0, -\sin B, \sin C), \quad (-\sin A, 0, \sin C), \quad (\sin A, -\sin B, 0),$$

les droites SM, SN, SP seront représentées par

$$-\alpha(2\sin B\sin C - \sin A\sqrt{3}) + \beta(\sin A - \cos A\sqrt{3})\sin C + \gamma(\sin A - \cos A\sqrt{3})\sin A = 0, \tag{5}$$

$$\alpha(\sin B - \cos B\sqrt{3})\sin C - \beta(2\sin A\sin C - \sin B\sqrt{3}) + \gamma(\sin B - \cos B\sqrt{3})\sin A = 0, \tag{6}$$

$$\alpha(\sin C - \cos C\sqrt{3})\sin B + \beta(\sin C - \cos C\sqrt{3})\sin A - \gamma(2\sin A\sin B - \sin C\sqrt{3}) = 0. \tag{7}$$

Mais on sait que les bissectrices des angles de deux droites

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \quad l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$$

ont pour équations

$$\frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2ln\cos B - 2lm\cos C}} = \pm \frac{l'\alpha + m'\beta + n'\gamma}{\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2 - 2m'n'\cos A - 2l'n'\cos B - 2l'm'\cos C}} \tag{8}$$

Or, si l'on cherche les bissectrices des angles formés par les droites SM, SN par exemple, on trouve que les deux radicaux de la formule (8) sont égaux; les bissectrices de l'angle MSN sont donc représentées par :

$$-\alpha(2\sin B\sin C - \sin A\sqrt{3}) + \beta(\sin A - \cos A\sqrt{3})\sin C + \gamma(\sin A - \cos A\sqrt{3})\sin B \pm [(\alpha\sin B - \cos B\sqrt{3})\sin C - \beta(2\sin A\sin C - \sin B\sqrt{3}) + \gamma(\sin B - \cos B\sqrt{3})\sin A] = 0.$$

En prenant le signe positif, on retrouve l'équation (7), SP est donc la bissectrice extérieure de l'angle MSN; de même SM est la bissectrice de l'angle NSP.

Soit donc $MSN = \theta$, la droite SP fera avec SM un angle égal à $\frac{1}{2}(180^\circ - \theta)$ et puisque $NSM = MSP$ on aura $\theta = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$, d'où $\theta = 60^\circ$ et $NSP = 120^\circ$. C'est d'ailleurs le même angle sous lequel les tangentes aux cercles M, N, P se coupent deux à deux.

Question 1353.

(Voir *Mathesis*, (3), II, p. 32.)

A une ellipse donnée par ses axes AA', BB', *inscrire un triangle* MNP *dont les côtés soient parallèles aux côtés d'un triangle donné* M'N'P'.

Solution par G. Verheugen. L'ellipse correspondra à une circonférence de même centre C, et de diamètre AA' dans l'homologie par affinité dont AA' est l'axe et $\frac{AA'}{BB'}$, le coefficient. Dans cette homologie, il correspondra au triangle M'N'P' un triangle $M_1'N_1'P_1'$. Soit O_1 le centre du cercle circonscrit à $M_1'N_1'P_1'$. Menons les rayons CM_1, CN_1, CP_1 respectivement parallèles à O_1M_1', O_1N_1', O_1P_1'; le triangle correspondant au triangle $M_1N_1P_1$ dans l'homologie par affinité, dont AA' est l'axe et $\frac{BB'}{AA'}$ le coefficient, est le triangle MNP demandé, car M, N, P se trouvent sur l'ellipse, et le triangle MNP correspond à $M_1N_1P_1$, parallèle à $M_1'N_1'P_1'$, qui correspond à M'N'P'.

Solution analogue par M. Déprez.

×Question 1366.

(Voir *Mathesis* (3), II, p. 104.)

On pense un nombre moindre que 1000; *on le divise par* 42, *par* 48, *par* 56 *et par* 63, *et on multiplie les restes respectivement par* 96, *par* 21, *par* 90 *et par* 800; *enfin on fait la somme des quatre produits. Connaissant cette somme, donner une règle générale pour trouver le nombre pensé.*

(E. Gelin.)

Solution par Verheugen. Soient x le nombre pensé; m_1, m_2, m_3, m_4 les

quotients successifs, et r_1, r_2, r_3, r_4 les restes successifs, et S la somme connue, on aura,

$$\begin{aligned}
96x &= 96 \times 42m_1 + 96r_1 = 1008 \times 4m_1 + 96r_1 \\
21x &= 21 \times 48m_2 + 21r_2 = 1008 \times m_2 + 21r_2 \\
90x &= 90 \times 56m_3 + 90r_3 = 1008 \times 5m_3 + 90r_3 \\
800x &= 800 \times 63m_4 + 800r_4 = 1008 \times 50m_4 + 800r_4
\end{aligned}$$

d'où, par addition,

$$1007x = 1008\,(4m_1 + m_2 + 5m_3 + 50m_4) + S,$$

ou encore

$$1008\,(x - 4m_1 - m_2 - 5m_3 - 50m_4) = S + x.$$

Il faut donc que $S + x$ soit multiple de 1008, et puisque $x < 1000$, on peut conclure que le nombre cherché est l'excès du nombre 1008 sur le reste de la division de S par 1008.

Même solution par M. Emmerich et Rose. Cette solution se trouve dans l'édition de 1902 du *Traité d'Arithmétique élémentaire* de M. Gelin, n° 698. Autre solution par M. Otto Drechsel.

---

*QUESTIONS D'EXAMEN.

1053. La sixième puissance d'un nombre entier quelconque augmentée de 16 fois le carré du nombre triangulaire formé par les deux nombres suivants, est toujours décomposable en une somme de deux carrés. (E. N. Barisien.)

Cette propriété est la conséquence de l'identité

$$n^6 + 16\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 = (n^3 - 6n - 4)^2 + (4n^2 + 4n)^2.$$

1054. Les milieux de deux cordes rectangulaires d'une hyperbole équilatère sont vus du centre de l'hyperbole sous un angle droit.

(E. N. Barisien.)

A déduire de ce que deux diamètres conjugués sont symétriques par rapport à une asymptote.

1055. Quand deux paraboles se coupent ayant leurs axes perpendiculaires, le centre du cercle qui passe par leurs points d'intersection est situé à la distance de l'axe de l'une des paraboles, égale au demi-paramètre de la seconde. (E. N. Barisien.)

Equations des deux courbes :

$$y^2 = 2px,\ (x - \alpha)^2 = 2p'(y - \beta);$$

faisons leur somme :

$$(y - p')^2 + (x - p - \alpha)^2 = p'^2 + p^2 - 2p'\beta, \text{ etc}$$

1056. On considère quatre droites parallèles AA', BB', CC', DD'; soient A'', B'', C'', D'' leurs milieux. Démontrer que la somme des volumes des tétraèdres ABCD, A'B'C'D' est égale à deux fois le volume A''B''C''D''. (DÉPREZ).

Si l'on rapporte la figure à trois axes rectangulaires dont l'une OZ est parallèle à AA', et dont les deux autres OX, OY sont dans un plan perpendiculaire à AA', la formule du volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées des sommets donne une démonstration immédiate du théorème. La proposition s'étend facilement à deux polyèdres ABCD..., A'B'C'D'... tels que les droites AA', BB', CC', DD', ... sont parallèles.

1057. Résoudre le système

$$x + ay = b, \quad y + az = b, \quad z + ax = b.$$

1058. Résoudre le système

$$x + ay = b, \quad y + az = b', \quad z + ax = b''.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

***1873.** Trouver sur la hauteur d'un triangle isoscèle le point dont le triangle podaire a le plus petit périmètre. (SOONS.)

1874. Soient A le point de rebroussement d'une cissoïde droite, B la projection de A sur l'asymptote. On prolonge BA de $AB' = \frac{1}{3}BA$. Montrer que les podaires des deux points B et B' par rapport à la cissoïde ont même aire. (E. N. BARISIEN.)

***1875.** Étant donnés n nombres complexes $a, b, c, \ldots$, on considère les 2^{n-1} modules différents des nombres compris dans la formule $\pm a \pm b \pm c \pm \ldots$. Démontrer que la moyenne arithmétique de leurs carrés est égale à la somme des carrés des modules des n nombres donnés. (E. CESÁRO).

1876. Soit AB un diamètre fixe d'une circonférence donnée O. D'un point quelconque P de cette courbe comme centre on décrit une circonférence qui touche la droite AB. Trouver analytiquement et géométriquement le lieu des points de rencontre de la circonférence P avec la droite OP. (RETALI).

SUR LES QUADRANGLES ET LES QUADRILATÈRES PARALOGIQUES;

par M. J. Neuberg.

Le sujet que je vais traiter n'est pas entièrement nouveau. Cependant la manière dont il est présenté et aussi quelques développements que je crois inédits, peuvent donner au présent article un certain intérêt.

1. Un *quadrangle complet* est la figure déterminée par quatre points A, B, C, D dont trois ne sont pas en ligne droite; il a trois couples de *côtés opposés*, savoir BC et AD, CA et BD, AB et CD. Il est souvent avantageux de considérer la même figure comme composée d'un triangle, ABC par exemple, et de trois *vecteurs* AD, BD, CD. Les côtés du triangle ABC seront désignés par a, b, c, et les vecteurs par a_1, b_1, c_1 (fig. 1).

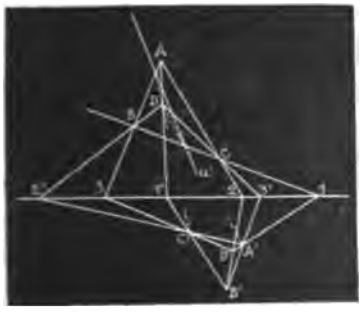


Fig. 1.

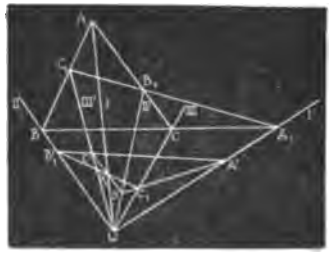


Fig. 2.

2. Un *quadrilatère complet* est la figure déterminée par quatre droites a, b, c, d dont trois ne passent pas par un même point; il a trois couples de sommets opposés, savoir $bc \equiv A$ et $ad \equiv A_1$, $ca \equiv B$ et $bd \equiv B_1$, $ab = C$ et $cd \equiv C_1$. On peut considérer la même figure comme composée d'un *trilatère abc* et de trois *points transversaux* A_1, B_1, C_1 (fig. 2).

3. Soient 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′ les points où une transversale s coupe les côtés BC, CA, AB, AD, BD, CD d'un quadrangle complet; on sait que les couples 11′, 22′, 33′ appartiennent à une même involution (fig. 1).

Réciproquement, étant donnés trois couples de points 11′, 22′, 33′ d'une involution, si les côtés BC, CA, AC d'un triangle passent respectivement par les points 1, 2, 3, les droites A1′, B2′, C3′ concourent en un même point.

On tire de là cette double proposition :

Soient 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′ *les points où une transversale u rencontre les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle et trois vecteurs* AD, BD, CD.

1° *Si les côtés* B′C′, C′A′, A′B′ *d'un second triangle passent respectivement par les points* 1, 2, 3, *les droites* A′1′, B′2′, C′3′ *concourent en un même point* D′.

2° *Si les côtés* B′C′, C′A′, A′B′ *d'un second triangle passent respectivement par les points* 1′, 2′, 3′, *les droites* A′1 B′2 C′3 *concourent en un même point* D′ (fig. 1).

Dans le premier cas, les droites AA′, BB′, CC′, DD′ passent par un même point, et les deux quadrangles ABCD, A′B′C′D′ sont *homologiques*.

Dans le second cas, ce sont les *côtés opposés* BC et A′D′, CA et B′D′, ..., qui se coupent sur *u*. Je dirai maintenant que les deux quadrangles ABCD, A′B′C′D′ sont *paralogiques* et que *u* en est *l'axe de paralogie*.

4. Joignons les sommets d'un quadrilatère complet *abcd* à un même point U par les droites I, II, III, I′, II′, III′; nous aurons ainsi trois couples de rayons d'une involution (fig. 2).

Réciproquement, étant donnés trois couples de rayons, (I, I′), (II, II′), (III, III′) d'une involution, si les sommets A, B, C d'un trilatère *abc* sont situés respectivement sur les rayons I, II, III, les côtés *a*, *b*, *c* sont rencontrés respectivement par les autres rayons I′, II′, III′ en trois points A_1, B_1, C_1, qui sont sur une même droite *d*.

Il résulte de là cette double proposition :

Soient I, II, III, I′, II′, III′ *les droites joignant un même point* U *aux sommets* A, B, C *d'un trilatère abc et aux points* A_1, B_1, C_1 *où les côtés sont rencontrés par une transversale d.*

1° *Si les sommets* A′, B′, C′ *d'un second trilatère a′b′c′ sont situés respectivement sur les droites* I, II, III, *les côtés a′, b′, c′ sont rencontrés par les droites* I′, II′, III′ *en trois points* A'_1, B'_1, C'_1 *qui sont sur une même droite d′.*

2° *Si les sommets d'un second trilatère sont situés sur les droites* I′, II′, III′, *les côtés sont rencontrés par les droites* I, II, III *en trois points* A'_1, B'_1, C'_1, *qui appartiennent à une même droite d′* (fig. 2).

Dans le premier cas, les deux quadrilatères *abcd*, *a′b′c′d′* sont *homologiques*; les côtés correspondants *a* et *a′*, *b* et *b′*, ... se coupent sur une même droite.

Dans le second cas, ce sont les *sommets opposés* A et A'_1, B et B'_1, ...

qui sont alignés sur un même point U. Je dirai maintenant que les deux quadrilatères *abcd*, *a'b'c'd'* sont *paralogiques* et que U en est le *centre de paralogie*.

5. Etant donnés deux triangles ABC, A'B'C', que nous considérerons aussi comme deux trilatères *abc*, *a'b'c'*, on peut se proposer de trouver deux points D, D' tels que les quadrangles ABCD, A'B'C'D' soient paralogiques, ou deux droites *d*, *d'* telles que les quadrilatères *abcd*, *a'b'c'd'* soient paralogiques.

Ces deux problèmes, qui sont étroitement liés l'un à l'autre, ne font qu'énoncer sous une nouvelle forme des questions classiques.

Le premier problème revient à trouver trois vecteurs AD, BD, CD du triangle ABC qui rencontrent les côtés du trilatère *a'b'c'* en trois points 1', 2', 3' situés sur une même droite u (fig. 1). Il admet une infinité de solutions : le lieu de D est une cubique de Σ et l'enveloppe de u est une courbe Σ' de la troisième classe(*).

Pour établir ces propositions et en développer quelques conséquences, introduisons les notations suivantes :

$$aa' \equiv F, \quad bb' \equiv G, \quad cc' \equiv H;$$
$$AA' \equiv f, \quad BB' \equiv g, \quad CC' \equiv h;$$
$$(BC', B'C) \equiv X, \quad (CA', C'A) \equiv Y, \quad (AB', A'B) \equiv Z;$$
$$(bc', b'c) \equiv x, \quad (ca', c'a) \equiv y, \quad (ab', a'b) \equiv z.$$

Cela posé, soient 1' un point quelconque de *a'*, P et Q les points où une droite quelconque menée par 1' rencontre *b'* et *c'*; les droites BP, CQ se coupent sur une conique déterminée K_u. Les deux points d'intersection de K_u avec la droite A1' sont évidemment des positions de D, et les droites correspondantes u passent par 1'. Lorsqu'on place 1' à l'intersection X' de *a'* avec x, x est une position correspondante de u, et les droites BD, CD, AD se confondent avec BA, CA, AX'. Ainsi, toute droite A1' menée par A contient trois points D; il en résulte que le lieu de D est une cubique Σ qui touche en A la droite AX'. On voit en

(*) Ce mode de génération des courbes du troisième degré (ordre ou classe) est dû à Grassmann (Voir CLEBSCH-LINDEMANN, *Géométrie*, p. 548).

Si l'on prend pour A', B', C' les points à l'infini sur les hauteurs du triangle ABC, D est un point quelconque de la circonférence ABC, et u la droite de Simson de D. (Voir dans *Mathesis*, (1), II, p. 106 un article de M. Barbarin *Sur la droite de Simson* et la note de la page 108).

même temps que par un point quelconque 1′ de a' il passe deux droites u, autres que la droite a' elle-même qui a pour point associé D le point X; par conséquent, l'enveloppe de u est une courbe Σ' de la troisième classe qui touche a' au point de rencontre avec AX′.

On arrive aux mêmes conclusions en joignant les points B, C à un point mobile sur la droite A1′ et en observant que les droites ainsi menées rencontrent b', c' en des points P′, Q′ tels que la droite P′Q′ enveloppe une conique K'_a; les tangentes menées de 1′ à cette courbe sont des positions de u. Comme a' est également une position de u, l'enveloppe de u est de la troisième classe.

6. Quel que soit le point 1′ sur a', K_a passe par quatre points fixes, savoir les centres B, C des faisceaux générateurs B (P) et C (Q), les points X et A′. Le faisceau des coniques K_a étant projectif avec le faisceau A (1′), on retrouve la génération de Σ par la méthode de Chasles.

Semblablement, K_a touche quatre droites fixes, qui sont les supports b', c' des ponctuelles (P′) et (Q′), les droites x et a. Le faisceau tangentiel des coniques K'_a étant projectif avec la ponctuelle (1′), la courbe Σ' admet un mode de génération qui correspond corrélativement à celui de Σ par le procédé de Chasles.

7. La courbe Σ' est l'enveloppe des axes de paralogie des quadrangles ABCD, A′B′C′D′. On peut aussi le définir comme l'enveloppe des droites qui rencontrent les couples aa', bb', cc' en trois couples 11′, 22′, 33′ d'une involution. Cette propriété assigne aux deux trilatères abc, $a'b'c'$ des rôles symétriques et montre que les couples de trilatères $(a'bc, a'bc)$, $(ab'c, a'bc')$, $(abc', a'b'c)$ conduisent à la même courbe Σ'.

La courbe Σ est le lieu des points à partir desquels les couples AA′, BB′, CC′ sont projetés par trois couples de rayons d'une involution. En effet, les droites DA et DA′, DB et DB′, DC et DC′ passent par les couples de sommets opposés du quadrilatère complet $a'b'c'u$. De cette propriété on conclut que les droites DA′, DB′, DC′ rencontrent a, b, c en trois points situés sur une même droite u', de sorte que les quadrilatères $abcu'$, $a'b'c'u$ sont paralogiques. Σ' est l'enveloppe des quatrièmes côtés variables u', u de tels quadrilatères dérivés des mêmes trilatères abc, $a'b'c'$, et Σ est le lieu des centres de paralogie.

A une même tangente u de Σ' correspondent deux points D, D′ de Σ, qu'on obtient en joignant A, B, C aux points de rencontre de u avec a', b', c' ou A′, B′, C′ aux points de rencontre de u avec a, b, c.

Semblablement, à un point D de Σ correspondent deux droites u, u' dont l'une passe par les points de rencontre de a', b', c' avec DA, DB, DC, et dont l'autre passe par les points de rencontre de a, b, c avec DA′, DB′, DC′ : u est l'axe de paralogie de ABCD et A′B′C′D′, u' celui de ABCD′ et A′B′C′D; D est le centre de paralogie de $abcu'$ et $a'b'c'u$, D′ celui de $abcu$ et $a'b'c'u'$.

Je dirai que u, u', D, D′ sont des *éléments associés* par rapport aux courbes Σ′ et Σ.

Les trois droites u, u', DD′ concourent en un même point. En effet, étant donnés deux ternes de rayons de deux faisceaux abc et $a'b'c'$, les droites $(ab', a'b)$, $(bc', b'c)$, $(ca', c'a)$ concourent en un même point. Si l'on applique ce théorème aux ternes A (BDD′), C′ (B′D′D), on trouve la propriété énoncée.

Remarquons les éléments associés des deux courbes Σ, Σ′ :

$$(A, A', \alpha, f), \quad (B, B', \gamma, g), \quad (C, C', \varepsilon, h),$$
$$(a, a', F, X), \quad (b, b', G, Y), \quad (c, c', H, Z),$$

ce qui donne douze points de Σ et douze tangentes de Σ′.

8. Si ABCD, A′B′C′D′ sont deux quadrangles paralogiques, la courbe Σ relative aux triangles ABD, A′B′D′ ne diffère pas de celle qui est relative aux triangles ABC, A′B′C′; car les deux lignes ont en commun les points A, B, C, D, A′, B′, C′, D′, Z et H. On en conclut que les droites AD et A′D′, BD et B′D′, CD et C′D′, BD′ et B′D, AD′ et A′D se coupent sur Σ. Plus généralement, si MM′, NN′, PP′ sont trois positions du couple DD′, la courbe Σ peut être définie par les deux triangles MNP, M′N′P′.

Nous voyons ainsi apparaître des couples de points MM′, NN′ de Σ, tels que les points (MN, M′N′), (MN′, M′N) forment un nouveau couple de la même espèce. Il est intéressant de remarquer que les droites qui projettent ces couples à partir d'un même point quelconque de Σ sont des couples de rayons d'une même involution ; que deux rayons conjugués coupent de nouveau Σ en deux points formant un couple. En particulier, les tangentes menées en deux points d'un couple se rencontrent sur Σ.

On retrouve ainsi les *pôles conjugués* de Schröter.

La courbe Σ′ jouit de propriétés corrélatives analogues.

9. Soient ABC, A′B′C′ deux triangles tels que les parallèles menées de A, B, C à B′C′, C′A′, A′B′ concourent en un point D; alors les

parallèles menées de A', B', C' à BC, CA, AB concourent en un point D'. Les deux quadrangles ABCD, A'B'C'D' sont paralogiques, l'axe de paralogie étant la droite de l'infini ; on peut les appeler *métaparallèles* (*) et appliquer le même qualificatif aux triangles ABC, A'B'C'; D et D' sont les deux *métapôles*. L'axe de paralogie des quadrangles ABCD', A'B'C'D est parallèle à la droite DD' (n° 7).

Si le triangle ABC est métaparallèle à A'B'C' et à B'C'A', il est également métaparallèle à C'A'B'; le triangle DD_1D_2 des trois métapôles et le triangle ABC sont inscrits à une même ellipse qui a pour centre leur centre de gravité commun. J'ai proposé cette propriété dans *Mathesis* ((1) III, p. 216 et (1) IV, p. 134) et en ai donné une démonstration intuitive dans l'article *Sur le point de Steiner*, J. M. S, 1886. p. 51.

1°. Deux quadrangles ABCD, A'B'C'D' qui, par un déplacement convenable, peuvent devenir métaparallèles, ont été appelés *métapolaires*. On peut se donner arbitrairement les triangles ABC, A'B'C', en menant par A, B, C des parallèles à B'C', C'A', A'B', se coupant deux à deux aux points A'', B'', C''; les circonférences circonscrites aux trois triangles BCA'', CAB'', ABC'' se coupent au point D, *premier métapôle* de ABC par rapport à A'B'C'. Si l'on combine de la même manière ABC avec un triangle symétriquement semblable à A'B'C', on obtient le *second métapôle*.

Pour la théorie des quadrangles métapolaires, on peut consulter la Note *Sur la Géométrie récente* insérée dans le traité de Géométrie par Rouche et de Comberousse ou le *Mémoire sur les foyers de Steiner d'un triangle*, par Neuberg et Gob (Annuaire de l'AFAS, Paris, 1889).

(*) Voir *Mathesis*, (1) 4, p. 144 et (1) IV, p. 86 et les mémoires de M. Fuhrmann (*Programme de Königsberg*, 1902) et de M. Ripert (*Congrès d'Ajaccio*, 1901)

*CONSTRUIRE UN TRIANGLE CONNAISSANT UNE BISSECTRICE DE CHACUN DES TROIS ANGLES;

par M. J. Delitala, professeur à l'Institut technique de Sassari (Sardaigne).(*)

« Jamais mieux qu'en creusant à fond cette question si
« délicate et difficile, dont l'énoncé est cependant bien
« trompeur, je n'ai senti ce qu'il y a de vrai et d'encoura-
« geant dans cette parole bien connue de d'Alembert :
« *Allez en avant et la foi vous viendra* ».

P. Barbarin (*Mathesis*, 1896, p. 143).

Ce célèbre problème a exercé la sagacité d'un grand nombre de mathématiciens. La solution la plus complète me paraît être celle de M. Barbarin (*loc. cit.*). Ce géomètre trouve que la question dépend d'une équation du 14e degré lorsqu'on donne trois bissectrices concourantes, d'une équation du 16e degré lorsqu'on connaît trois bissectrices non concourantes; ces équations sont *irréductibles* dans le cas général, mais peut-être susceptibles d'abaissement dans des cas particuliers.

1. La solution que je vais développer, mérite peut-être l'attention des géomètres. Elle est fondée sur le théorème suivant :

Dans tout triangle ABC, *les bissectrices internes* (externes) *sont inversement proportionnelles aux projections des côtés opposés sur les bissectrices externes* (internes) *correspondantes*.

En effet, soient A', A'', B', B'', C', C'' les pieds des bissectrices. La surface S du triangle ABC, somme des triangles ABA', ACA' est égale au demi-produit de AA' par la somme des perpendiculaires abaissées de B et C sur AA'; cette somme est égale à la projection de BC sur AA'', etc.

Désignons par d_a, d'_a, d_b, d'_b, d_c, d'_c les longueurs des bissectrices AA', AA'', ...; par λ, μ, ν, les angles AA'C, BB'A, CC'B. On a

$$\lambda = \frac{A}{2} + B, \quad \mu = \frac{B}{2} + C, \quad \nu = \frac{C}{2} + A;$$

les angles supplémentaires sont

$$AA'B = \frac{A}{2} + C, \quad BB'C = \frac{B}{2} + A, \quad CC'A = \frac{C}{2} + B.$$

(*) La solution de M. Delitala est-elle nouvelle? Quoi qu'il en soit, nous la publions pour ramener l'attention des géomètres sur un problème célèbre, dont la discussion présente de grandes difficultés. (*Rédaction*).

La proposition rappelée ci-dessus donne les relations

$$\left.\begin{aligned} d_a : d_b : d_c &= \frac{1}{a\sin\lambda} : \frac{1}{b\sin\mu} : \frac{1}{c\sin\nu} \\ &= \frac{1}{\sin A\sin\lambda} : \frac{1}{\sin B\sin\mu} : \frac{1}{\sin C\sin\nu}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} d'_a : d'_b : d'_c &= \frac{1}{a\cos\lambda} : \frac{1}{b\cos\mu} : \frac{1}{c\cos\nu} \\ &= \frac{1}{\sin A\cos\lambda} : \frac{1}{\sin B\cos\mu} : \frac{1}{\sin C\cos\nu}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Les égalités (2) attribuent des signes aux bissectrices extérieures; nous supposerons $a < b < c$, ce qui entraîne $\lambda < \frac{\pi}{2}, \mu > \frac{\pi}{2}, \nu < \frac{\pi}{2}$.

2. Le problème proposé présente quatre cas différents; on peut donner

$$d_a, d_b, d_c; \quad d'_a, d'_b, d'_c; \quad d'_a, d'_b, d_c; \quad d_a, d_b, d'_c.$$

Premier cas. On donne d_a, d_b, d_c. Des relations (1), on tire

$$\frac{d_a}{d_c} = \frac{\sin C\sin\left(\frac{C}{2}+A\right)}{\sin A\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)}, \quad \frac{d_b}{d_c} = \frac{\sin C\sin\left(\frac{C}{2}+A\right)}{\sin B\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)}.$$

Prenons pour inconnues auxiliaires

$$B+A=x, \quad B-A=y;$$

alors

$$B=\frac{x+y}{2}, \quad A=\frac{x-y}{2}, \quad \frac{A}{2}+B=\frac{3x+y}{4}, \ldots,$$

et les équations du problème deviennent

$$\frac{d_a}{d_c} = \frac{\sin x\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{3x+y}{4}}, \quad \frac{d_b}{d_c} = \frac{\sin x\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{3x-y}{4}}.$$

On passe de la première à la seconde en changeant y en $-y$.

Posons encore

$$\operatorname{tg}\frac{x}{4} = u, \quad \operatorname{tg}\frac{y}{4} = v;$$

nous aurons

$$\sin\frac{x}{4}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\quad \cos\frac{x}{4}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos\frac{x}{2}=\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\sin\frac{3x+y}{4}=\left(3\sin\frac{x}{4}-\sin^3\frac{x}{4}\right)\cos\frac{y}{4}-\left(3\cos\frac{x}{4}-4\cos^3\frac{x}{4}\right)\sin\frac{y}{4},\text{ etc.}$$

Par conséquent, la question est ramenée à la résolution du système

$$\frac{d_a}{d_c}=\frac{2u(1-u^2)(1-v^2)\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(u+v)(1-uv)[(1-u^2)(u+v)+2u(1-uv)]},$$

$$\frac{d_b}{d_c}=\frac{2u(1-u^2)(1-v^2)\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(u-v)(1+uv)[(1-u^2)(u-v)+2u(1+uv)]}.$$

3. *Deuxième cas.* On donne d'_a, d'_b, d'_c. Les équations du problème sont maintenant

$$\frac{d'_a}{d'_c}=\frac{\sin C\cos\left(\frac{C}{2}+A\right)}{\sin A\cos\left(\frac{A}{2}+B\right)},\quad \frac{d'_b}{d'_c}=-\frac{\sin C\cos\left(\frac{C}{2}+A\right)}{\sin B\cos\left(\frac{B}{2}+C\right)};$$

en les transformant comme dans le premier cas, on trouve

$$\frac{d'_a}{d'_c}=\frac{4uv(1-u^2)\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(u+v)(1-uv)[(1-u^2)(1-uv)-2u(u+v)]},$$

$$\frac{d'_b}{d'_c}=-\frac{4uv(1-u^2)\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(u-v)(1+uv)[(1-u^2)(1+uv)-2u(u-v)]}.$$

4. *Troisième cas.* On connaît d'_a, d'_b. d_c. Le cas précédent donne immédiatement l'équation

$$\frac{d'_a}{d'_b}=-\frac{(u-v)(1+uv)[(1-u^2)(1+uv)-(2u(u-v)]}{(u+v)(1-uv)[(1-u^2)(1-uv)-2u(u+v)]}.$$

Pour obtenir une seconde équation, observons que

$$\frac{d'_a}{d_c}=\frac{d_a\operatorname{tg}\lambda}{d_c}=\frac{d_a}{d_c}\operatorname{tg}\frac{3x+y}{4};$$

en remplaçant le rapport $\frac{d_a}{d_c}$ par sa valeur calculée dans le premier cas, nous aurons

$$\frac{d'_a}{d_c}=\frac{2u(1-u^2)(1-v^2)\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(u+v)(1-uv)[(1-u^2)(1-uv)-2u(u+v)]}$$

5° *Quatrième cas*. On donne d_a, d_b, d_c. La valeur du rapport $d_a : d_b$ est connue (voir premier cas); on a ensuite

$$\frac{d_a}{d_c} = \frac{d_a}{d_c \operatorname{tg} \nu},$$

où l'on remplace le rapport $d_a : d_c$ par sa valeur (n° 2).

Pour simplifier la résolution des deux équations auxquelles nous avons ramené les différents cas, on peut prendre pour inconnues $u + v = P$, $uv = Q$.

NOTES D'ARITHMÉTIQUE;

par M. G. DE ROCQUIGNY-ADANSON.

I.

Nous allons énoncer quelques propositions sur les nombres sommes de quatre carrés, analogues à celles que M. Catalan a données sur les nombres sommes de trois carrés, dans *Mathesis*, (1) I, p. 88.

1° Si $a \pm b = m \cdot 5$, ou $m \cdot 13$, etc., les nombres 5, 13, etc. étant de la forme $x^2 + y^2$, $a^2 + b^2$ est la somme de trois carrés. En effet,

$$a^2 + [m(x^2 + y^2) - a]^2 = (mx^2 - a)^2 + (my^2 - a)^2 + 2(mxy)^2.$$

2° Si $a \pm b = m \cdot 7$, ou $m \cdot 15$, etc., les nombres 7, 15, etc. étant de la forme $x^2 + y^2 + 2z^2$, $a^2 + b^2$ est la somme de quatre carrés.

Cette propriété résulte de l'identité

$$a^2 + [m(x^2 + y^2 + 2z^2) - a]^2 = [m(x^2 + y^2) - a]^2 + (2mz - a)^2 + (2mx)^2 + (2my)^2.$$

3° Plus généralement, si

$$a \pm b = m(x^2 + y^2 + z^2 + u^2),$$

$a^2 + b^2$ est la somme de quatre carrés. Car

$$a^2 + [m(x^2 + y^2 + z^2 + u^2) - a]^2 = [m(x^2 + y^2) - a]^2 + [m(z^2 + u^2) - a]^2 + m^2(xz \pm yu + xu \mp yz)^2 + m^2(xz \pm yu - xu \pm yz)^2.$$

Si $x = 0$ et $u = z$, on retrouve une proposition de M. Catalan (*loc. cit.*, p. 88, seconde note) :

$$a^2 + [m(y^2 + 2z^2) - a]^2 = (my^2 - a)^2 + (2mz^2 - a)^2 + (2myz)^2.$$

Si $u = 0$, on a

$$a^2 + [m(x^2 + y^2 + z^2) - a]^2 = [m(x^2 + y^2) - a]^2 + (mz^2 - a)^2 + m^2(xz + yz)^2 + m^2(xz - yz)^2.$$

Faisons encore $x = z$; il vient

$$a^2 + [m(y^2 + 2z^2) - a]^2 = [m(y^2 + z^2) - a]^2 + (mz^2 - a)^2 + m^2(z^2 + yz)^2 + m^2(z^2 - yz)^2.$$

II.

On fait penser un nombre N, dans la 3^{me} centaine par exemple, et l'on demande à la personne qui a pensé le nombre, de donner simplement les 3 restes fournis par la division de N par 3, 5, 7.

Soient r_3, r_5, r_7 ces trois restes.

On devine le nombre pensé, au moyen de la relation :

$$N = 2.5.7.r_3 + 3.7.r_5 + 3.5.r_7 \pm M.3.5.7.$$

Exemple. Supposons que 221 soit le nombre pensé. On nous donne seulement $r_3 = 2$, $r_5 = 1$, $r_7 = 4$. Écrivons

$$N = 2.5.7.2 + 3.7.1 + 3.5.4 \pm M.3.57 = 221 \pm M.105.$$

Comme je sais que le nombre pensé appartient à la troisième centaine, je fais $M = 0$ et $N = 221$, ce qui est bien le nombre pensé.

III.

La propriété résultant de la rotation de la bande en équerre énoncée dans *Mathesis*, (3) I. p. 219 et 220 se retrouve également dans le tableau général suivant :

a	$a+r$	$a+2r$	$\ldots$ $a+(n-1)r$	$\ldots$
a_1	a_1+r_1	a_1+2r_1	$\ldots$ $a_1+(n-1)r_1$	$\ldots$
a_2	a_2+r_2	a_2+2r_2	$\ldots$ $a_2+(n-1)r_2$	$\ldots$
. . . . .				
a_{n-1}	$a_{n-1}+r_{n-1}$	$a_{n-1}+2r_{n-1}$	$\ldots$ $a_{n-1}+(n-1)r_{n-1}$	$\ldots$

Pour la simplicité de l'écriture, nous avons représenté $a+r$, $a+2r$, $a+3r$,... par a_1, a_2, a_3,...; les raisons r, r_1, r_2,... des différentes progressions forment elles-mêmes une progression r, $r+\rho$, $r+2\rho$,...

La somme des nombres de la bande en équerre de rang n est égale à la somme des nombres de la bande en équerre définie par la portion de la diagonale principale allant de a à $a_{n-1}+(n-1)r_{n-1}$ et par la portion de la $(2n-1)$ diagonale secondaire allant de $a_{n-1}+(n-1)r_{n-1}$ à $a+(2n-2)r$.

La valeur commune de ces deux sommes est

$$S = (2n-1)a + [(n-1)(2n-1) + (n-1)^2]r + (n-1)^2\rho.$$

IV.

Considérons les deux suites indéfinies de progressions

(A)

1	3	5	7	9	...
1	4	7	10	13	...
1	5	9	13	17	...
1	6	11	16	21	...
1	7	13	19	25	...
1	8	15	22	29	...
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

(B)

1	3	5	7	9	...
1	5	9	13	17	...
1	7	13	19	25	...
1	9	17	25	33	...
1	11	21	31	41	. .
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Nous désignerons par $a_{p,q}$ le nombre qui, dans l'un de ces tableaux, figure dans la p^e ligne et la q^e colonne.

a) Si l'on trace un carré dont les sommets sont les éléments $a_{n,1}$, $a_{1,n}$, $a_{n,2n}$, $a_{2n,n}$ d'un même tableau, ce carré comprend $(n-1)^2+n^2$ nombres, dont la somme est, respectivement, pour (A) et pour (B),

$$S_1 = (n^2-n)^2+n^4$$
$$S_2 = [(n-1)^2+n^2]^2 = (2n-1)^2+(2n^2-2n)^2.$$

Pour $n=3$, ces carrés sont respectivement

(A)

		5			
	4	7	10		
1	5	9	13	17	
	6	11	16		
		13			

(B)

		5			
	5	9	13		
1	7	13	19	25	
	9	17	25		
		21			

b) On trace, dans chacun des tableaux (A), (B), un carré ayant pour sommets les nombres $a_{n,n}$, $a_{2n-1,2n-1}$, $a_{2n-2,n}$, $a_{2n-1,1}$. Un tel carré, composé de $(n-1)^2+n^2$ nombres, a, respectivement, pour somme

$$S_3 = [(n-1)^2+n^2]^2 = (2n-1)^2+(2n^2-2n)^2,$$
$$S_4 = (n-1)^2+(2n-1)^2+(2n^2-2n)^2+[(n-1)(2n-1)]^2$$
$$= (n-1)^2+[(n-1)^2+n^2]^2+[(n-1)(2n-1)]^2.$$

c) On trace, dans chacun des tableaux (A), (B), un carré ayant pour sommets les nombres $a_{n,n}$, $a_{2n-1,2n-1}$, $a_{n,2n-2}$, $a_{1,2n-1}$. Un tel carré, comprenant $(n-1)^2+n^2$ nombres, a respectivement pour somme

$$S_5 = (2n^2-n)^2-(n-1)^2,$$
$$S_6 = (2n-1)^2[(n-1)^2+n^2] = \frac{(2n-1)^2[(2n-1)^2+1]}{2}.$$

d) Dans le tableau (A), la droite qui joint les éléments $a_{1,1}$, $a_{1,2} = 6$ étant indéfiniment prolongée, tous les nombres rencontrés par cette ligne sont chacun la somme de trois carrés dont deux sont égaux. Ainsi l'élément $a_{1,n-2,n} = 2(n-1)^2 + n^2$.

Dans le tableau (B), la droite qui joint les éléments $a_{1,1}$, $a_{2,3}$ étant indéfiniment prolongée, tous les nombres rencontrés par cette ligne sont chacun la somme de 3 carrés dont deux consécutifs. Ainsi, $a_{n,2n-1} = (n-1)^2 + n^2 + (2n-2)^2$.

Le lecteur pourra chercher les propositions analogues concernant les tableaux (α) et (β) de notre article de *Mathesis*, (3), I, p. 219.

DÉTERMINATION DE QUELQUES CLASSES DE COURBES GAUCHES,

par M. A. Demoulin, professeur à l'Université de Gand.

(*Addition.*)

Dans la première partie de ce travail (*Mathesis*, juin 1902), je me suis proposé de déterminer toutes les courbes satisfaisant à la relation

$$\tau c''^2 = f\left(\frac{c}{c''}\right),$$

dans laquelle $f(\alpha)$ est une fonction donnée de α, et j'ai résolu ce problème pour trois formes particulières de $f(\alpha)$.

Voici, d'après une lettre que M. Darboux m'a fait l'honneur de m'écrire, la solution du même problème dans le cas général.

Il s'agit, en somme, d'effectuer les trois quadratures

$$\int \beta f(\alpha)\, d\alpha, \quad \int \alpha\beta f'(\alpha)\, d\alpha, \quad \int \beta f'(\alpha)\, d\alpha.$$

Or, si l'on pose

$$\int \beta f'(\alpha)\, d\alpha = \varphi'(\alpha),$$

d'où

$$\beta = \frac{\varphi''(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

la deuxième intégrale s'obtient sans difficulté et la première devient

$$\int \varphi''(\alpha) \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\, d\alpha.$$

Deux intégrations par parties successives permettent d'écrire

$$\int \varphi''(\alpha) \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\, d\alpha = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \varphi'(\alpha) - \left[\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right]' \varphi(\alpha) + \int \varphi(\alpha) \left[\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right]'' d\alpha,$$

et il suffit de poser

$$\int \varphi(\alpha)\left[\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right]'' d\alpha = \psi(\alpha),$$

d'où

$$\varphi(\alpha) = \frac{\psi'(\alpha)}{\left[\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right]''},$$

pour faire disparaître le signe de quadrature qui figure au second membre. Les trois intégrales se trouvent dès lors exprimées au moyen de la fonction arbitraire $\psi(\alpha)$ et de ses dérivées première et seconde.

Pour achever de résoudre le problème, il faudra encore effectuer la quadrature $\int f(\alpha)\, d\alpha$ qui donne la valeur de y et au sujet de laquelle il n'y a rien de particulier à dire, le signe d'intégration portant sur une fonction déterminée de α.

En terminant, je ferai observer que dans le cas où $f(\alpha)$ est la dérivée d'une fonction algébrique de α, on obtiendra toutes les courbes algébriques répondant à la question en prenant pour $\psi(\alpha)$ la fonction algébrique de α la plus générale.

On le démontrera en raisonnant comme je l'ai fait à propos d'un cas particulier dans la note citée.

NOTES MATHÉMATIQUES.

15. *Sur la question d'examen* 1050. — La formule de M. E. Hain donnée sans démonstration dans *Mathesis*, mai 1902, *question d'examen* n° 1050, doit être $\frac{(b-c)r}{2m_a}$ au lieu de $\frac{(b-c)r}{m_a}$. Soient, en effet, M le milieu de BC, D le point de contact du cercle inscrit de centre I avec BC, x la distance du centre I à la médiane AM. On sait que la droite MI passe par le milieu N de AD, ce qui prouve que les triangles AIM et DIM sont équivalents; les produits de leur base par leur hauteur sont donc égaux, et, partant, l'on a

$$x \cdot \mathrm{AM} = \mathrm{DM} \cdot \mathrm{DI},$$

d'où, puisque

$$\mathrm{DM} = \frac{b-c}{2},$$

$$x = \frac{r(b-c)}{2m_a}$$ (Cl. Thiry).

Note. M. Plakhovo nous a signalé la même erreur (erreur de transcription) et a démontré la formule exacte par la trigonométrie.

16. ***Valeur approchée d'une somme algébrique de quantités connues avec une approximation donnée.*** Soient $x, y, z, \ldots, u, n$ quantités connues approximativement, l'erreur maxima dont elles sont affectées chacune étant E. La somme algébrique

$$ax + by + cz + \ldots + gu$$

est affectée d'une erreur maxima

$$E\{|a| + |b| + |c| + \ldots + |g|\}.$$

Or,

$$\{|a| + |b| + |c| + \ldots + |g|\}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + g^2 + 2|ab| + 2|ac| + \text{etc.}$$

Mais

$$2|ab| \leqslant a^2 + b^2, \quad 2|ac| \leqslant a^2 + c^2, \ \ldots$$

Par suite

$$\{|a| + |b| + |c| + \ldots + |g|\}^2 \leqslant n(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + g^2)$$

et $ax + by + cz + \ldots + gu$ est affectée d'une erreur tout au plus égale à

$$E\sqrt{n(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + g^2)}.$$

(Communiqué par M. E. G.)

17. ***A propos de la ligne de terre.*** La distance entre deux points déterminés par leurs projections est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont la distance des projections horizontales et la différence des hauteurs. Or, ces côtés ne changent pas quand la ligne de terre se déplace sur l'épure pourvu qu'elle ne change pas de direction ; il est donc inutile de tracer la ligne de terre sur une épure, il suffit d'en indiquer la direction par les lignes de rappel (AD. MINEUR).

VARIÉTÉS.

Un enfant prodige : Joseph Bertrand.

M. DARBOUX a lu à la séance publique de l'Académie des sciences 1901, un admirable éloge historique de Joseph Bertrand (1822-1900). Nous en extrayons les pages suivantes sur la jeunesse de l'illustre savant (*) :

(*) Dans son *Blaise Pascal*, Bertrand a détruit la légende d'après laquelle cet autre enfant prodige aurait retrouvé avant douze ans les trente deux premières propositions d'Euclide. Bertrand savait par expérience comment les enfants prodiges apprennent ce qu'on ne leur enseigne pas. »

« La jeunesse du célèbre mathématicien a donné lieu à bien des légendes. Mais lui-même, lorsqu'en 1884 il fut élu à l'Académie Française, rédigea pour son ami Pasteur, qui devait le recevoir, des notes qui ont été conservées:

« Tendrement aimé, nous dit-il, par des parents qui pourraient être comptés parmi les hommes éminents de leur temps, j'ai reçu d'eux, pour mes premières études, la direction la moins faite pour développer chez moi l'habitude du travail et l'amour de la science.

« On ne croyait pas que je fusse destiné à vivre jusqu'à l'âge d'homme. Les études dès lors, pour moi, étaient traitées comme un passe-temps inutile et, si j'y prenais trop de goût, dangereux.

« A l'âge de 16 ans, lorsque je fus reçu à l'École Polytechnique, je ne savais conjuguer aucun verbe en aucune langue. J'étais prodigieusement ignorant, j'en ai dit la raison. Il faut dire aussi pourquoi j'étais, en même temps, prodigieusement instruit pour mon âge. »

« J'ai appris à lire pendant une longue maladie, en entendant donner à mon frère des leçons, dans la chambre où j'étais alité. Je connaissais les lettres, et rien de plus. Les entendant répéter, B, A, BA, C, R, O, CRO, je gravais toutes les combinaisons dans ma mémoire. J'ai le souvenir très distinct de la stupéfaction de mes parents lorsque, m'apportant pendant ma convalescence un livre d'histoire naturelle pour me montrer les images, ils m'entendirent lire le texte couramment. Je lus sans épeler, je me le rappelle, *La Brebis et le Chien loup*.

« Mon père, effrayé, m'arracha le livre et défendit que, sous aucun prétexte, on me fît travailler. Je n'avais pas encore cinq ans.

« Mon père m'empêchait d'étudier; mon instruction cependant était sa plus chère préoccupation. Je ne le quittais pas; à pied ou en voiture, il ne sortait jamais sans mener avec lui son fidèle Joseph. Il me parlait sur tous les sujets, toujours en latin. Je le comprenais. Je l'ai perdu pendant ma neuvième année. Il m'avait prédit que je serais reçu le premier à l'École Polytechnique et membre de l'Académie des Sciences. Je n'en doutais pas et, pendant mon enfance, ma mère n'en faisait non plus aucun doute.

« Lorsque, à l'âge de 9 ans, j'eus le grand malheur de perdre mon père, j'avais appris par surprise, en quelque sorte, les éléments de la géométrie et la partie élémentaire de l'algèbre. Voici comment: mon père, dans la dernière partie de sa vie, demeurait chez mon oncle M. Duhamel, qui dirigeait alors une institution préparatoire à l'École Polytechnique. Les élèves, dont les plus jeunes avaient le double de mon âge, m'aimaient beaucoup et je me trouvais très heureux au milieu d'eux.

« Assidu à leurs récréations, je les suivis bientôt dans les classes. Les maîtres me regardaient avec étonnement et ne s'occupaient guère de moi. Les élèves s'aperçurent que je comprenais; et, quand une démonstration semblait difficile, le premier qui m'apercevait courait après moi, m'emportait dans ses bras, me faisait monter sur une chaise pour que je pusse atteindre le tableau, et me faisait répéter.

« La même année, M. Duhamel demanda pour moi l'autorisation de suivre les cours de Polytechnique. Le directeur des études, M. Dulong, exigea que je subisse un examen; et M. Lefébure de Fourcy, après m'avoir interrogé pendant une heure, déclara qu'il m'aurait classé le second de sa liste. C'était au mois d'août 1833; j'avais alors onze ans et cinq mois.

« A partir de cette époque, on me laissa seul diriger mes lectures.

« Je suivais les cours de l'École Polytechnique quand cela me plaisait; j'allais à la bibliothèque de l'Institut, où l'excellent M. Feuillet, bibliothécaire de l'Institut, me prêtait des livres; je suivais le cours de Gay-Lussac, au Jardin des Plantes, celui de Saint-Marc Girardin à la Sarbonne, de Lerminier au Collège de France, sans aucune sanction et sans qu'on s'informât jamais du profit que j'en tirais.

« Mon père m'avait appris un peu de latin, en me parlant sur tous les sujets et en me racontant l'histoire universelle, presque toujours en latin. Depuis l'âge de neuf ans, on ne songeait plus à entretenir ce que j'avais pu apprendre de la sorte. J'avais lu cependant et compris toute l'*Enéide* en m'aidant d'une traduction. »

Tel est le récit que nous devons à M. Bertrand des premières études de son enfance.

Bachelier ès lettres et ès sciences à seize ans, licencié ès sciences deux mois après, docteur ès sciences l'année suivante, il était la même année reçu premier à l'École Polytechnique.

Il nous a laissé des détails sur les examens qu'il passa avec Bourdon et Auguste Comte :

« J'ai le souvenir de l'étonnement de M. Bourdon qui, sachant que j'étais docteur ès-sciences, m'avait fait un examen difficile. A la suite de je ne sais quelle réponse, il me dit : « Vous n'avez donc jamais ouvert une table de logarithmes? — Je lui répondis : Non, Monsieur, jamais ». Il prit cela pour une impertinence; c'était la pure vérité. Je n'avais fait alors aucun devoir scientifique ou littéraire, jamais aucun calcul demandé par aucun maître.

A l'École Polytechnique, j'étais un problème pour mes camarades. Reçu le premier et gardant le premier rang dans toutes les épreuves, je les étonnais de temps en temps par une ignorance scandaleuse sur des notions qu'on enseigne en septième. Beaucoup d'entre eux croyaient à une ignoranc affectée; j'en étais très honteux au contraire. J'ignorais complètement, par exemple, quelle sorte de mots les grammairiens désignent par le terme d'adverbes. »

Hâtons-nous de dire que ce jeune monstre de science aimait les poètes Sa mémoire était prodigieuse. Il savait par cœur tout Musset, une grande partie de Victor Hugo, beaucoup de Lamartine, et il n'oubliait jamais rien. Cinquante ans après être sorti de l'École, se trouvant à une soirée de l'Observatoire où l'on récitait une des *Nuits* de Musset, il disait à Tisserand: « Si M^me^ Bartet avait une défaillance de mémoire, je pourrais lui souffler le vers exact. »

Il aimait beaucoup la poésie et en sentait vivement le rythme. Un vers faux

le faisait souffrir. Jusqu'à la fin de sa vie, il a retenu sans effort tout ce qu'il voulait apprendre. Dans un des dîners de promotion auxquels il ait assisté, un de ses camarades ayant récité une pièce de vers assez longue qu'il avait composée pour la circonstance, Bertrand, voulant l'intriguer, lui dit: « Mais ce morceau n'est pas de toi, je le connais depuis longtemps, et la preuve, c'est que je vais te le réciter ». Et il le fit comme il l'avait promis.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1188bis.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 239.)

On donne un triangle ABC *et une transversale variable* Δ *tournant autour d'un point fixe* P *et coupant* BC, CA, AB *en* A', B', C'. *On considère le quadrilatère déterminé par ces quatre droites.* 1° *Quelle est l'enveloppe de toutes les droites de Newton (droites passant par les milieux de* AA', BB', CC')? 2° *Le lieu des points de Monge (intersection des circonférences de diamètres* AA', BB', CC') *est une quartique bicirculaire qui, lorsque le point* P *coïncide avec le centre du cercle circonscrit à* ABC, *dégénère en deux cercles, le cercle circonscrit à* ABC *et son cercle des neuf points.* (A. Droz Farny).

Solution par M. R. Buysens. Les milieux de AA', BB', CC' décrivent des ponctuelles projectives au faisceau (Δ), la droite qui joint ces points enveloppe donc une conique inscrite au triangle complémentaire de ABC.

Le cercle Σ_a décrit sur AA' comme diamètre passe par la projection A_1 de A sur BC et engendre un faisceau projectif à la ponctuelle (A'); le cercle Σ_b de diamè re BB' engendre un faisceau projectif à la ponctuelle (B') et, par suite, au premier faisceau de cercles; ce qui démontre la première partie du 2°.

Le cercle Σ_a rencontre pour la seconde fois le cercle circonscrit (O) en M et la seconde extrémité A_2 du diamètre AO appartient à la droite A'M, car l'angle AMA' est droit. Lorsque P est quelconque, les faisceaux projectifs A_2 (A') et B_2 (B') engendrent une conique et ce sera évidemment quand cette conique coïncidera avec le cercle circonscrit que celui-ci fera partie du lieu des points de Monge. On voit que cette coïncidence aura lieu lorsque P est en O, en examinant ce qui arrive dans ce cas pour les positions OA, OB, OC de la sécante. Les axes radicaux des cercles Σ_a, Σ_b et ABA_1B_1 concourent au point H, orthocentre

du triangle. Il en résulte que, dans le cas spécial, la droite MH rencontre de nouveau le cercle Σ_a au second point de Monge M'. Prolongeons AH et MH jusqu'aux points A_1 et N où ces droites coupent pour la seconde fois le cercle(O). Les droites A_1M' et A_2N sont parallèles parce que les angles HA_1M', HA_2N sont égaux au même angle AMH, et comme A_1 est le milieu de HA_2, M' est le milieu de HN et appartient au cercle des neuf points de ABC.

Solution par M. Déprez. 1° Soit, en coordonnées barycentriques,

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0 \qquad (1)$$

l'équation de Δ par rapport au triangle de référence ABC. L'équation de la newtonienne Δ' de Δ par rapport au triangle ayant pour sommets les milieux de BC, CA, AB, est

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} + \frac{z}{\nu} = 0, \qquad (2)$$

car les côtés du second triangle sont divisés par Δ' dans les rapports inverses de ceux dans lesquels les côtés du ABC sont partagés par Δ.

Considérons, dans l'équation (1), α, β, γ comme les coordonnées du point donné P. Pour obtenir l'enveloppe de Δ' on peut éliminer x entre (1) et (2) et égaler à zéro le discriminant de l'équation quadratique ainsi obtenue en λ et μ; on trouve

$$\sqrt{\alpha x} + \sqrt{\beta y} + \sqrt{\gamma z} = 0.$$

Par conséquent, Δ' enveloppe une conique inscrite au triangle complémentaire de ABC.

2° Prenons pour axes des coordonnées les côtés CB, CA du triangle ABC, et posons

$$CA = b, \quad CB = a. \quad CA' = \alpha, \quad CB' = \beta,$$
$$S = x^2 + y^2 + 2xy\cos C - ax - by.$$

L'équation du cercle ABC est $S = 0$. Pour celles des cercles décrits sur les droites AA', BB' comme diamètres, on trouve facilement

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos C - (\alpha + b\cos C)x - (b + \alpha\cos C)y + b\alpha\cos C = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos C - (a + \beta\cos C)x - (\beta + a\cos C)y + a\beta\cos C = 0.$$

On a aussi la relation

$$\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} = 1,$$

où p, q, désignent les coordonnées du point P. L'équation du lieu des

points de Monge s'obtient par l'élimination de α et β entre les trois dernières égalités ; elle est donc

$$\frac{p(x+y\cos C-b\cos C)}{S+cx\cos B}+\frac{q(y+x\cos C-a\cos C)}{S+cy\cos A}=1.$$

3° Ce lieu est du quatrième ordre.

Si P est confondu avec le centre O du cercle ABC, les distances de O à CB et CA étant R cos A et R cos B, on a

$$p=\frac{R\cos A}{\sin C},\quad q=\frac{R\cos B}{\sin C},$$

et l'équation du lieu, ordonnée par rapport à S, devient

$$S^2\sin C+MS+N=0,$$

où

$$\begin{aligned}M&=c\sin C(x\cos B+y\cos A)-R\cos B(x+y\cos C-b\cos C)\\&\quad-R\cos A(y+x\cos C-a\cos C)\\&=-R\sin C[x\sin(B-C)+y\sin(A-C)-R\cos(A-B)\cos C],\\N&=c^2\sin C\cos A\cos B\,xy-Rcy\cos A\cos B(x+y\cos C-b\cos C)\\&\quad-Rcx\cos A\cos B(y+x\cos C-a\cos C)\\&=-2R^2S\sin C\cos A\cos B\cos C.\end{aligned}$$

Par suite, l'équation demandée est

$$S[S-Rx\sin(R-c)-Ry\sin(A-C)+2R^2\sin A\sin B\cos C]=0;$$

il en résulte que le lieu se compose du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

4° Pour démontrer géométriquement la dernière propriété, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Si l'on joint un point quelconque M de la circonférence (O) circonscrite à un triangle ABC, aux points A″, B″, C″ diamétralement opposés à A, B, C sur cette ligne, les droites MA″, MB″, MC″ rencontrent respectivement BC, CA, AB en des points A′, B′, C′ qui sont en ligne droite avec le centre O.

Ce lemme se déduit facilement de ce que dans l'hexagone inscrit A C B B″ MA″ les côtés opposés AC et MB″, CB et MA″, BB″ et A″A se coupent en trois points B′, A′, O qui sont en ligne droite.

Réciproquement, si un diamètre du cercle O coupe BC, CA, AB en A′, B′, C′, les droites A′A″, B′B″, C′C″ concourent en un point M de la circonférence, ou, ce qui revient au même, *les circonférences décrites sur* AA′, BB′, CC′ *comme diamètres ont un point commun* M *situé sur la circonférence* (O).

Appelons M′ le second point de rencontre des cercles (AA′), (BB′), (CC′) et soient H l'orthocentre du triangle ABC, A_1, B_1, C_1 les pieds des hauteurs, A_2 et S les seconds points de rencontre de la circonférence (O) avec la hauteur AA_1 et la droite MM′.

La droite MM′ passe par H; car c'est l'axe radical des cercles (AA′), (BB′) qui passent respectivement par A_1, B_1, et on sait que $HA.HA_1 = HB.HB_1$. Des groupes concycliques AA_1MM', AA_2MS, on conclut

$$HA.HA_1 = HM.HM',\quad HA.HA_2 = HM.HS,$$

d'où, à cause de $HA_2 = 2HA_1$, $HS = 2HM'$. Par conséquent, le point M′ décrit le cercle des neuf points de ABC.

5° Si la droite Δ se déplace parallèlement à elle-même, Δ′ enveloppe une parabole, et les points M, M′ décrivent une cubique.

M. Rosz a résolu la même question en prenant pour axes CB, CA.

×Question 1194.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 263).

Les diagonales AC, BD *d'un quadrilatère inscriptible* ABCD *se coupant en* O, *appelons* T_1, T_2, T_3, T_4 *les triangles* OAB, OCD, OBC, ODA, *et* V_i, H_i, G_i *le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le barycentre dans le triangle* T_i. *Cela posé* :

1° *Les figures* $V_1V_2V_3V_4$, $G_1G_2G_3G_4$, $H_1H_2H_3H_4$ *sont des parallélogrammes*;

2° *Les droites* V_1H_2, V_2H_1, V_3H_4, V_4H_3 *concourent en* O;

3° *Les droites* V_1H_1, V_2H_2, V_3H_3, V_4H_4 *se coupent en un point* O′.

(E. Lemoine).

Solution par M. Emmerich. 1° V_1V_3, V_2V_4, H_1H_4, H_2H_3, perpendiculaires à BD, sont parallèles. De même V_1V_4, V_2V_3, H_1H_3, H_2H_4 sont parallèles parce qu'elles sont perpendiculaires à AC. Les figures $V_1V_3V_2V_4$, $H_1H_3H_2H_4$ sont donc des parallélogrammes. G_1G_4, G_2G_3 étant parallèles à BD, et G_1G_3, G_2G_4 étant parallèles à AC, la figure $G_1G_3G_2G_4$ est aussi un parallélogramme.

2° Les droites OV_3, OH_3, de même que OV_4, OH_4 étant isogonales par rapport à AC et BD, on tire de la similitude des triangles T_3, T_4 que l'angle $H_3OB = V_4OD$, ce qui montre que la droite H_3V_4 passe par O. Il en est de même de H_4V_3, H_1V_2, H_2V_1.

3° Appelons O′ le point de concours de V_3H_3 et V_4H_4. Les droites d'Euler H_3V_3, H_4V_4 des triangles semblables T_3, T_4 forment des angles égaux avec les hauteurs correspondantes, l'angle $H_3V_3O = H_4V_4O$, ce qui démontre la similitude des triangles $O'V_3H_4$, $O'V_4H_3$. Pour la même raison, l'angle $H_3V_3V_2 = H_4V_4V_2$, ou $O'V_3V_2 = O'V_4V_2$, $H_3V_3V_1 = H_4V_4V_1$, ou bien $O'H_3H_2 = O'H_4H_2$. Donc, si l'on abaisse les perpendiculaires O′P, O′Q, O′R, O′S sur les côtés du parallélogramme formé par les droites V_2V_3, V_2V_4, H_2H_4, H_2H_3, on aura deux autres couples de triangles semblables : $V_3O'P$ et $V_4O'Q$, $H_4O'R$ et $H_3O'S$.

De $O'P : O'Q = O'V_3 : O'V_4 = O'H_4 : O'H_3 = O'R : O'S$,

on conclut alors que les angles égaux $V_3V_2V_4$, $H_4H_2H_3$ sont divisés par $O'V_2$, $O'H_2$ en des parties respectivement égales. Par conséquent, angle $V_2O'Q = H_2OS'$, et comme Q, O′, S sont en ligne droite, il en est de même de V_2, O′, H_2. D'une manière analogue, on démontre que la droite V_1H_1 passe également par O′.

Note. MM. Déprez et Soons ont résolu la même question.

Désignons par M_1, M_2, M_3, M_4 les milieux des côtés AB, CD, BC, DA ; par A′, B′, C′, D′ les milieux des droites OA, OB, OC, OD ; par θ l'angle AOB supposé aigu ; par a, b les longueurs des diagonales AC, BD.

Les parallélogrammes $G_1G_3G_2G_4$, $M_1M_3M_2M_4$ sont homothétiques par rapport à O.

A′C′ étant la projection de V_1V_3, V_4V_2 sur AC, on a

$$V_1V_3 = V_2V_4 = \frac{a}{2\sin\theta}, \quad V_3V_2 = V_1V_4 = \frac{b}{2\sin\theta}.$$

Les parallélogrammes $M_1M_3M_2M_4$, $V_3V_1V_4V_2$ sont donc symétriquement semblables. H_1H_4 et BD ayant la même projection sur AC, on a $b\cos\theta = H_1H_4\sin\theta$; ainsi

$$H_1H_4 = H_3H_2 = b\cot\theta, \quad H_2H_3 = H_1H_4 = a\cot\theta.$$

Les parallélogrammes $V_1V_3V_2V_4$, $H_1H_4H_2H_3$ sont alors inversement semblables ; mais ils ne sont pas homothétiques, car les côtés parallèles sont inversement proportionnels.

On a les relations

$$OV_1 = \frac{AB}{2\sin\theta}, \quad OV_2 = \frac{BC}{2\sin\theta}, \quad OV_3 = \frac{CD}{2\sin\theta}, \quad OV_4 = \frac{DA}{2\sin\theta},$$

$$OH_1 = AB\cot\theta, \quad OH_2 = BC\cot\theta, \quad OH_3 = CD\cot\theta, \quad OH_4 = DA\cot\theta,$$

$$OH_1 = 2OV_1\cos\theta, \quad OH_2 = 2OV_2\cos\theta, \quad OH_3 = 2OV_3\cos\theta,$$

$$OH_4 = 2OV_4\cos\theta.$$

M. Déprez établit le n° 3 de la question en cherchant les équations des droites V_1H_1, V_2H_2, V_3H_3, V_4H_4 par rapport aux axes coordonnés AC, BD. Il énonce encore les propriétés suivantes de la figure :

1° Si M, N sont les isotomiques du point O sur les droites AC, BD, le point O' est également situé sur la droite d'Euler du triangle OMN.

2° Les points H_1, V_1, V_2, H_2 sont concycliques, de même que les points H_3, V_3, V_4, H_4.

3° Si les cordes AC, BD tournent autour du point O en faisant toujours le même angle, les côtés du parallélogramme $V_1V_2V_3V_4$ enveloppent une ellipse qui a pour foyers le point O et le centre O_1 du cercle donné. Les droites V_1V_2, V_3V_4 tournent autour du milieu de OO_1.

×Question 1336.

(Voir *Mathesis* (3), I, p. 152.)

On projette le point de Steiner S *d'un triangle* A, B, C *en* A', B', C' *sur les parallèles menées par* A, B, C *aux côtés* BC, CA *et* AB. *Démontrer que les tangentes menées en* A', B', C' *respectivement aux cercles* ASA', BSB', CSC' *concourent en un même point.* (G. Gérard).

Solution par M. Emmerich. En prolongeant A'S, B'S, C'S jusqu'à la rencontre avec les côtés BC, CA, AB en A'', B'', C'', on obtient la droite de Simson du point S. Comme

$$AS : BS : CS = a(c^2 - b^2) : b(a^2 - c^2) : c(b^2 - a^2),$$

on tire, des pentagones inscriptibles

$$ASA'B''C'', \quad BSB'C''A'', \quad CSC'A''B'',$$

$$B''C'' = a^2(c^2 - b^2)\lambda, \quad C''A'' = b^2(a^2 - c^2)\lambda, \quad A''B'' = c^2(b^2 - a^2)\lambda.$$

Les mêmes polygones font voir que les triangles A'B''C'', A''B'C'', A''B''C' sont semblables au triangle ABC. On en conclut que les tangentes en A', B', C' divisent B''C'', C''A'', A''B'' extérieurement dans les rapports $c^2 : b^2$, $a^2 : c^2$, $b^2 : a^2$. Soit U le point de rencontre de la tangente en A' avec A''B''C''. De

$$B''U : C''U = c^2 : b^2, \quad B''U - C''U = a^2(c^2 - b^2)\lambda, \quad A''U = C''U - C''A'',$$

il résulte

$$A''U = b^2c^2\lambda, \quad B''U = c^2a^2\lambda, \quad C''U = a^2b^2\lambda.$$

En partant d'une autre tangente, on obtient les mêmes valeurs, ce qui démontre la proposition.

Question 1335.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 216.)

En supposant fixes deux sommets B *et* C *d'un triangle* ABC, *si l'on fait correspondre au point de Lemoine du triangle les deux sommets* A, A', *on établit une transformation plane double du deuxième ordre, identique à celle qui sert à passer de la géométrie non euclidienne (hyperbolique) à la géométrie euclidienne.* (V. Retali).

Solution géométrique par M. Droz-Farny. Soit à construire le troisième sommet A d'un triangle dont on connaît la base BC et le point de Lemoine K. Soient M le milieu de BC et G le centre de gravité du triangle ABC. Les points K et G étant conjugués isogonaux, l'angle GBA = KBC = β et GCA = KCB = γ. Si par le sommet A, on mène des parallèles AL à GB et AN à GC qui rencontrent le côté BC prolongé respectivement en L et N, on aura évidemment MG : GA = MB : BL = 1 : 2, donc LB = BC = CN = a et angle LAB = ABG = β; angle CAN = GCA = γ.

Il suffira donc de construire sur les droites LB et CN deux segments de cercle capables respectivement des angles β et γ; les arcs se couperont en deux points A et A' qui fournissent les deux solutions possibles ABC et A'BC.

Comme MB . ML = MC . MN, le point M est d'égale puissance par rapport à ces deux cercles; l'axe radical AA' passe donc par M et l'on a $MA \cdot MA' = MB \cdot ML = \frac{3a^2}{4}$.

A et A' sont conjugués harmoniques par rapport au cercle de centre M et de rayon $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, et à chacun d'eux pris individuellement ne correspond que le seul et même point K. La dépendance entre A et A' étant en outre involutive, on a donc bien entre K et [A, A'] une correspondance plane double.

Si les deux circonférences sont tangentes, on a :

$$\overline{MA}^2 = MB \cdot MC = \frac{3a^2}{4};$$

donc la courbe double ou courbe des points A et A' unis est le cercle de rayon $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ et de centre M.

Prenons BC comme axe des X et M comme origine et désignons les coordonnées de A par (ζ, η), celles de K par (x, y); alors

$$x = \frac{a^2\zeta}{\zeta^2+\eta^2+\frac{3a^2}{4}}, \quad y = \frac{\frac{a^2}{2}\eta}{\zeta^2+\eta^2+\frac{3a^2}{4}}.$$

Si

$$\zeta^2+\eta^2 = \frac{3a^2}{4}, \quad \text{on a } x = \frac{2}{3}\zeta, \quad y = \frac{\eta}{3}$$

et par suite

$$\frac{3x^2}{a^2}+\frac{12y^2}{a^2} = 1.$$

La courbe limite est une ellipse de foyers B et C et dont les demi-axes sont $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Il resterait à établir la finale de la question. La première partie a déjà été traitée par M. Schoute, dans les *Wiskundige opgaven*.

---

*Question 1341.

(Voir *Mathesis*, (3) I, p. 240).

Un cercle O *et deux droites fixes* d *et* d' *étant donnés dans un plan, mener une droite* x *parallèle à une droite donnée* e, *rencontrant la circonférence* O *en* A *et* A', *et les deux droites données* d, d' *en* B *et* B', *de manière que* AA' *et* BB' *soient dans un rapport donné.*

(M. Stuyvaert).

Solution par M. L. Collette. Soit C le point où se coupent les droites d, d'; supposons que la parallèle menée par le centre O à la droite e rencontre les droites d, d' aux points M, N, et les droites CA, CA' en D, D'; enfin, désignons par F et E les points où la droite x et sa parallèle menée par C rencontrent la perpendiculaire abaissée de O.

La proportion

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{DD'}{MN}$$

montre que DD' est une longueur connue.

Si H désigne le point d'intersection des droites EA et MN, on a les égalités

$$\frac{AA'}{DD'} = \frac{EF}{EO} = \frac{AF}{HO};$$

or, AA′ vaut le double de AF, de sorte que HO est la moitié de DD′.

Ayant construit la longueur DD′, il suffira donc de porter OH égale à la moitié de DD′ et de joindre HE pour obtenir le point A par lequel passe la droite x.

Solution analogue par M. Van Cauwenberghe.

Solution par M. Emmerich. Si le cercle O se meut de manière que son centre parcourre une parallèle OO_0 à e, le rapport $AA' : BB' = m : n$ reste le même sur la droite x, puisque la corde AA′ transportée en A_0A_0' conserve sa longueur. O_0, P_0 étant les pieds des perpendiculaires abaissées du point de concours S de d et d' sur OO_0 et x, on a $A_0P_0 : BB' = \frac{1}{2}m : n$ ce qui détermine la direction SA_0.

Construction. Menez une droite $QQ' = n$ parallèle à e et limitée à d et d', puis abaissez SR perpendiculaire à QQ′ et portez $RT = \frac{1}{2}m$ sur RQ. SR rencontrant la parallèle par O à e en O_0 décrivez le cercle O_0 égal au cercle donné et menez ST qui rencontre le cercle O_0 en A_0. La parallèle par A_0 à e répond à la question.

Solution par M. J. Déprez. Soient α, β les angles de d, d' avec la direction perpendiculaire à e; M la projection de O sur une parallèle BB′, à e; O_1 la projection du point de rencontre de d, d' sur OM, k le rapport de BB′ à AA′.

Prenons sur BMB′ un point A tel que l'on ait $\frac{BB'}{AM} = 2k$, et cherchons le lieu de A lorsque BB′ se déplace parallèlement à e. On a

$$BB' = O_1M(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta), \quad \text{d'où} \quad \frac{AM}{MO_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2k} = \textit{constante},$$

et le point A décrit une droite Δ passant par O_1.

La droite Δ coupe le cercle (O) en deux points A, A_1 par lesquels on mènera des parallèles à e; ces deux parallèles sont les droites x, x_1 que l'on cherche.

Si δ est la distance de la projection de O sur Δ, au point O_1 il y aura deux solutions, une solution ou pas de solution, suivant que $\delta \lessgtr \frac{2kr}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$, r étant le rayon du cercle O.

Solution analytique par MM. Rose, Barisien.

×Question 1858.

(Voir *Mathesis*, (3), II, p. 56.)

Deux cercles A *et* B ***se coupent au point*** C. ***Un diamètre quelconque du premier coupe le second aux points*** D, E; ***les droites*** CD, CE ***rencontrent le premier aux points*** D', E'. ***Démontrer que*** D'E' ***fait un angle constant avec la droite*** DE ***et passe par un point fixe.***

Solution analytique par M. P. Thonet. Prenons comme axes coordonnés la parallèle et la perpendiculaire menée par C à la ligne des centres AB. Les équations des cercles sont alors

$$y^2 + x^2 - by - ax = 0, \tag{1}$$
$$y^2 + x^2 - by - a'x = 0. \tag{2}$$

Soient

$$y + mx + p = 0, \tag{3}$$
$$y + m'x + p' = 0, \tag{4}$$

respectivement les équations de ED et de E'D'. Rendons ces équations homogènes, puis éliminons z entre (1) et (3), ensuite entre (2) et (4); nous aurons d'une part l'équation du couple (CD, CE), d'autre part celle du couple (CD', CE) :

$$y^2(p + b) + x^2(p + ma) + xy(a + mb) = 0.$$
$$y^2(p' + b) + x^2(p' + m'a') + xy(a' + m'b) = 0.$$

En identifiant ces deux équations, nous aurons

$$p + b = \lambda(p' + b) \tag{5}$$
$$p + ma = \lambda(p' + m'a') \tag{6}$$
$$a + mb = \lambda(a' + m'b). \tag{7}$$

Entre (5) et (6) éliminons $p - \lambda p'$, ce qui donne :

$$(b - ma) = \lambda(b - m'a'), \tag{8}$$

éliminons encore λ entre (7) et (8) et on trouve entre m et m' la relation

$$\frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{a'b - ab}{aa' - b^2},$$

ce qui démontre le 1° de l'énoncé, même pour une droite DE quelconque.

Exprimons maintenant que DE passe en $A\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$:

$$b + am + 2p = 0. \tag{9}$$

Enfin, éliminons entre les équations (5), (6), (7), (9) linéaires en p, m et λ, ces 3 paramètres; nous aurons

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 & b \\ 0 & 1 & p'+b & b \\ a & 1 & p'+m'a' & 0 \\ b & 0 & a'+m'b & a \end{vmatrix} = 0,$$

relation linéaire entre m' et p'; donc la droite $y+m'x+p'=0$ passe par un point fixe.

Solution analogue par M A. D. (Malonne).

Solution géométrique par MM. Thonet et Claeys. Lorsque la sécante DE tourne autour de A, on sait que les couples de rayons CD, CE sont en involution.

Dès lors. C appartenant aussi à la circonférence A et CD', CE' étant les rayons correspondants d'une involution, on sait que D'E' passe par un point fixe. La 2me partie de l'énoncé subsiste pour deux coniques quelconques, DE tournant autour d'un point fixe quelconque.

Si α est l'angle de DE et D'E', on a

$$\alpha = \text{D'E'C} + \text{DEC} = \text{D'C'C} + \text{DC'C} = \text{DC'D'}.$$

Or, l'angle DC'D' est le supplément de la somme des angles C'DC, C'D'C qui sont constants dans toutes les positions de D et D' sur les deux circonférences.

Question 1362.

(Voir *Mathesis* (3), II, p. 80).

Trouver une courbe telle que la normale en un point M *rencontrant les axes rectangulaires* OX, OY *en* N *et* N', *le rayon vecteur* OM *soit une moyenne harmonique entre* MN *et* MN'. (Boutin).

Solution par J. Rose. Si x, y sont les coordonnées du point M, les coordonnées des points N et N' sont $(yy'+x, 0)$, $\left(0, y+\frac{x}{y'}\right)$.

L'équation de condition, $\frac{2}{\text{OM}} = \frac{1}{\text{MN}} + \frac{1}{\text{MN'}}$, peut donc s'écrire

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} + \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}$$

ou

$$y^2(y^2-3x^2)y'^2+2xy(x^2+y^2)y'+x^2(x^2-3y^2)=0,$$

d'où deux valeurs rationnelles de y' :

$$y'=\frac{x(3y^2-x^2)}{y(3x^2-y^2)},\quad y'=\frac{x}{y}.$$

La dernière donne immédiatement $x^2-y^2=C$; elle représente une série d'hyperboles équilatères. Pour la valeur particulière $C=0$, l'équation représente les deux bissectrices des angles des axes. La première valeur peut s'écrire en posant $y=xz$,

$$\frac{dx}{x}+\frac{z(3-z^2)}{1-z^4}dz=0,$$

ou

$$\frac{dx}{x}-\frac{dz}{2(1+z)}+\frac{dz}{2(1-z)}+\frac{2zdz}{1+z^2}=0;$$

on trouve en intégrant

$$lx-\tfrac{1}{2}l(1+z)-\tfrac{1}{2}l(1-z)+l(1+z^2)=l\alpha$$

ou

$$(x^2+y^2)^2-\alpha^2(x^2-y^2)=0.$$

Pour $\alpha=0$ et $\alpha=\infty$, cette équation représente les droites isotropes issues de l'origine et les bissectrices des angles des axes. Dans le cas général, cette équation représente une lemniscate de Bernoulli.

Comparer ci-après la solution de la question 1369, qui conduit à une équation analogue. Les mêmes remarques sont applicables.

Question 1369.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 128).

Trouver une courbe telle que la tangente en un point M *rencontrant les axes rectangulaires* OX, OY *en* T, T', *le rayon vecteur* OM *soit une moyenne harmonique entre* MT *et* MT'. (Boutin).

Solution par MM. V. Retali et Rose. On a

$$MT'=x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},\quad MT=y\frac{dx}{dy}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

La relation proposée,

$$\frac{1}{OM}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{MT}+\frac{1}{MT'}\right),$$

devient donc

$$2xy\sqrt{1+y'^2} = (xy'+y)\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1)$$

équation différentielle linéaire du premier ordre de la courbe cherchée. Pour l'intégrer, on l'écrit sous la forme

$$(xy'-y)[x(x^2-3y^2)y'+y(3x^2-y^2)] = 0 : \qquad (2)$$

l'intégrale de l'équation $xy'-y=0$ est $y=cx$, qui donne les droites menées par l'origine, comme on pouvait le prévoir. L'autre équation différentielle,

$$x(x^2-3y^2)\,dy + y(3x^2-y^2)\,dx = 0,$$

dont le premier membre est une différentielle exacte, a pour intégrale générale $xy(x^2-y^2) = \text{const.}$

NOTE. Si l'on a égard aux doubles signes des radicaux dans les valeurs de MT et MT', on peut écrire $y \pm xy'$ au lieu de $(y+xy')$, dans l'équation (1), ce qui donne, outre l'équation (2),

$$xy'+y=0, \quad x(x^2-3y^2)y'-y(3x^2-y^2)=0.$$

L'équation $xy'+y=0$ a pour intégrale $xy=C$; la seconde équation s'intègre facilement en coordonnées polaires. On trouve ainsi les deux courbes indiquées ci-après par M. Cesáro. Si dans la notation de M. Césaro on affecte les valeurs de MT et MT' du double signe $\pm$, on obtient également les courbes de MM. Retali et Rose.

Solution par M. E. CESÁRO. Soient r, θ, les coordonnées polaires de M, et φ l'angle de la tangente en M avec le rayon vecteur. On a

$$MT = \frac{r\sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)}, \quad MT' = \frac{-r\cos\theta}{\cos(\theta+\varphi)},$$

et l'on doit avoir

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{MT} + \frac{1}{MT'} = \frac{2\sin\varphi}{r\sin 2\theta}.$$

Donc $\sin\varphi = \sin 2\theta$; puis

$$r\frac{d\theta}{dr} = \operatorname{tg}\varphi = \pm\operatorname{tg} 2\theta,$$

d'où $r^2 = a^2\sin 2\theta$, ou bien $r^2\sin 2\theta = a^2$. Dans ce dernier cas (*hyperbole équilatère*) on a $MT = MT' = r$. On peut donc considérer la première courbe (*lemniscate de Bernoulli*) comme répondant seule à la question, d'une manière générale.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Concours d'admission en 1902. — Composition de mathématiques.

Etant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et un point P de coordonnées a, b, c, on considère les droites s'appuyant sur Oz et sur le cercle

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0, \quad z = 0.$$

1° Former l'équation du lieu des projections de P sur les droites considérées. Montrer qu'il se compose d'une sphère et d'une surface du 4e ordre (S).

2° Trouver les sections de (S) par des plans passant par Oz. Lieu du centre de ces sections quand le plan pivote autour de Oz.

3° Trouver entre quelles limites doivent varier les plans parallèles à xOy pour couper (S) en des points réels. Sections de (S) par le plan passant par P et parallèle à zOy, et le plan xOy.

N. B. **Il sera tenu compte aux candidats des remarques géométriques qu'ils pourront faire.**

QUESTIONS D'EXAMEN.

1059. 1° Calculer le quotient et le reste de la division

$$(6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2) : (x^2 - x + m).$$

2° Déterminer a et m de manière que le reste s'annule quel que soit x. 3° Remplacer a et m par les valeurs ainsi déterminées et mettre le polynome dividende sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

1060. Un cercle étant donné par les traces de son plan et la position qu'il occupe après le rabattement de ce plan sur le plan horizontal autour de la trace de même nom, construire les projections d'un point de ce cercle satisfaisant à la condition que les distances de ce point au plan vertical et au plan horizontal soient entre elles dans le rapport 1 : 2.

1061. Soit T le point où la tangente menée en un point variable M d'une conique rencontre la tangente menée en un point fixe N ; la parallèle par T au diamètre conjugué avec NT coupe en I la corde NM.

Trouver le lieu du point I. (G. Petit-Bois).

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1377**. Etant donnés deux triangles ABC, A'B'C', désignons par A (B'C') ... les triangles ayant pour côtés (CA, AB, B'C'), ... Démontrer que si ABC et A'B'C' sont métaparallèles (question 1368, 1902, p. 104) : 1° les médianes des sommets A, B, C dans les triangles A (B'C'), B (C'A'), C (A'B') coupent les côtés BC, CA, AB en trois points collinéaires; 2° la même propriété existe pour les symédianes des mêmes sommets dans les mêmes triangles. (L. RIPERT).

1378. Trouver en nombres entiers les solutions de l'équation

$$19x^7 = 29y^2 - 10 \qquad \text{(PAULMIER)}.$$

×**1379**. Trouver sur les côtés AB, BC d'un triangle ABC des points C', A' tels que

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC}, \quad CC' = AA'.$$

Cette question peut se traiter directement ou comme cas particulier du problème plus général de trouver des segments égaux MN, M'N' où M' et N' sont les premiers isobariques de M, N par rapport au triangle ABC. (J. N.)

1380. Par les sommets d'un tétraèdre ABCD et un même point P on mène des droites qui percent les faces opposées aux points A_1, B_1, C_1, D_1. Soient A_2, B_2, C_2, D_2 les points qui divisent les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 dans des rapports donnés a, b, c, d.

1° Sur quelle surface doit se mouvoir le point P pour que le tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ ait un volume donné? 2° Quelle est cette surface, lorsque les points A_2, B_2, C_2, D_2 sont dans un même plan? Montrer qu'elle se compose du plan de l'infini et d'une surface cubique si a, b, c, d vérifient une certaine relation. Si P se meut sur cette surface cubique, le plan $A_2B_2C_2D_2$ tourne autour d'un point fixe. (C. DÉPREZ).

1381. Trouver le lieu du centre d'un cercle tangent à la fois à une conique donnée et à l'un de ses axes. Cas où la conique est : 1° une parabole; 2° un cercle. (E. N. BARISIEN).

1382. On donne deux trièdres quelconques SABC, S'A'B'C'. Trouver l'enveloppe des plans qui les coupent suivant deux triangles homologiques, et le lieu des centres d'homologie. (J. NEUBERG).

DÉMONSTRATION DES FORMULES D'EULER ET D'OLINDE RODRIGUES,

par M. A. Demoulin, Professeur à l'Université de Gand.

Considérons un corps solide Σ mobile autour d'un point fixe O, origine d'un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Donnons arbitrairement à ce solide deux positions particulières S et S', et soient $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$ les positions correspondantes d'un quelconque des points qui lui sont invariablement attachés. Les formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues permettent de calculer x', y', z' connaissant x, y, z. En voici une démonstration rapide (*).

On peut amener le solide Σ de la position S à la position S' par une rotation autour d'un axe d passant par le point O. Soient a, b, c les cosinus directeurs de cet axe et θ l'amplitude de la rotation. Projetons les points M et M' en H sur l'axe d, et le point O en A sur la droite MM'.

En exprimant que MM' est perpendiculaire à d et que OM = OM', on a

$$a(x-x') + b(y-y') + c(z-z') = 0, \qquad (1)$$
$$(x+x')(x-x') + (y+y')(y-y') + (z+z')(z-z') = 0,$$

d'où

$$k(x-x') = (y+y')\,c - (z+z')\,b,$$
$$k(y-y') = (z+z')\,a - (x+x')\,c,$$
$$k(z-z') = (x+x')\,b - (y+y')\,a,$$

k désignant un facteur convenablement choisi.

Pour le déterminer, additionnons ces égalités après les avoir élevées au carré; il viendra, en appliquant l'identité de Lagrange et appelant α l'angle de d et de OA,

$$k^2 \cdot \overline{MM'}^2 = 4\overline{OA}^2 - 4\overline{OA}^2 \cos^2\alpha = 4\overline{OA}^2 \sin^2\alpha,$$

d'où

$$k \cdot MM' = 2OA \sin\alpha.$$

Or,

$$OA \sin\alpha = AH = \frac{MM'}{2} \cot\frac{\theta}{2};$$

(*) Dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces* (IV^e^ Partie, p. 433 et suiv.), M. Darboux a établi fort simplement ces formules par des considérations de Cinématique.

donc

$$k = \cot\frac{\theta}{2},$$

et si l'on pose

$$a\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\lambda}{\rho}, \quad b\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\mu}{\rho}, \quad c\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\nu}{\rho},$$

les formules ci-dessus deviennent

$$\left.\begin{aligned} \rho(x - x') &= (y + y')\nu - (z + z')\mu, \\ \rho(y - y') &= (z + z')\lambda - (x + x')\nu, \\ \rho(z - z') &= (x + x')\mu - (y + y')\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ou

$$\begin{aligned} \rho x' + \nu y' - \mu z' &= \rho x - \nu y + \mu z, \\ -\nu x' + \rho y' + \lambda z' &= \nu x + \rho y - \lambda z, \\ \mu x' - \lambda y' + \rho z' &= -\mu x + \lambda y + \rho z. \end{aligned}$$

A ces équations, adjoignons l'équation (1) qui peut s'écrire

$$\lambda x' + \mu y' + \nu z' = \lambda x + \mu y + \nu z.$$

Pour obtenir les valeurs de x', y', z' par la méthode la plus élégante, il faudra, comme l'a indiqué M. Darboux (*loc. cit.*), additionner les quatre équations précédentes après les avoir multipliées respectivement par des facteurs $\pm\lambda$, $\pm\mu$, $\pm\nu$, $\pm\rho$ tels que le coefficient de l'inconnue cherchée devienne égal à

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = \mathrm{B}.$$

On trouvera ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{B}x' &= (\rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)x + 2(\lambda\mu - \nu\rho)y + 2(\lambda\nu + \mu\rho)z, \\ \mathrm{B}y' &= 2(\lambda\mu + \nu\rho)x + (\rho^2 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2)y + 2(\mu\nu - \lambda\rho)z, \\ \mathrm{B}z' &= 2(\lambda\nu - \mu\rho)x + 2(\mu\nu + \lambda\rho)y + (\rho^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2)z. \end{aligned}$$

Telles sont les formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues. Pour en déduire les expressions de x, y, z en fonction de x', y', z', il suffira de changer le signe de ρ et d'échanger x et x', y et y', z et z' ; cela résulte des relations (2).

En terminant, je rappellerai une autre interprétation des formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues. Imprimons au trièdre $Oxyz$ la rotation qui fait passer Σ de S en S′ et soit $Ox'y'z'$ la nouvelle position de ce trièdre. Les relations ci-dessus sont celles qui existent entre les coordonnées $(x'\ y'\ z')$ d'un point quelconque rapporté au trièdre $Oxyz$ et les coordonnées (x, y, z) du même point rapporté au trièdre $Ox'y'z'$.

BILATÈRES ET TRILATÈRES EN METAGÉOMÉTRIE;

par M. BARBARIN, professeur au lycée de Bordeaux.

BILATÈRES.

Nous appelons *bilatère* la figure formée par deux droites situées dans le même plan. En Géométrie riemannienne, (GR), cette figure détermine toujours un angle et une perpendiculaire commune; en géométrie lobatschefskienne, (GL), les deux droites peuvent former un angle, ou être parallèles, ou avoir une normale commune. Donc les différentes droites associées au bilatère peuvent présenter plusieurs cas. Nous nous occuperons de la plus simple, la bissectrice.

DÉFINITION. *La bissectrice d'un bilatère est le lieu géométrique des points équidistants des deux côtés.* Nous prouverons que ce lieu est une droite.

a. Quand les droites se coupent, la proposition est évidente comme en géométrie usuelle, à cause de l'égalité de deux triangles rectangles; il y a du reste deux angles supplémentaires et deux bissectrices perpendiculaires entre elles.

b. Supposons les droites AB, CD parallèles, et soit M un point équidistant. ME parallèle à AB est aussi parallèle à CD (*); prenons sur ME un point M′ et abaissons MP, MQ, M′P′, M′Q′ perpendiculaires sur les droites AB, CD; les angles PME, QME sont égaux comme angles de parallélisme répondant à MP = MQ; donc en faisant tourner la figure autour de ME, MP et PP′ viennent s'appliquer sur MQ et QQ′, donc enfin M′P′ = M′Q′.

c. Supposons enfin que AB et CD aient une perpendiculaire commune AC; d'un point M supposé équidistant tirons ME perpendiculaire sur AC, et prenons sur cette ligne un autre point quelconque M′. Les perpendiculaires MP, MQ, M′P′, M′Q′ abaissées de M et M′ sur AB et CD déterminent deux groupes de quadrilatères trirectangles, MPAE, MQCE d'une part, et M′P′AE, M′Q′CE d'autre part; les deux premiers sont égaux comme ayant deux côtés égaux respectivement (**), savoir :

(*) LOBATSCHEFSKY. *Etudes géométriques*, prop. 25. Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Deux quadrilatères trirectangles qui ont deux côtés respectivement égaux sont égaux. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette proposition sous les quatre aspects qu'elle présente (côtés adjacents ou opposés).

MP = MQ et ME commun, donc E est au milieu de AC, et les deux autres quadrilatères sont aussi égaux, ce qui prouve que M'P' = M'Q'.

PROBLÈME. *Par un point donné* P *de la bissectrice d'un bilatère, mener une sécante* APB *de longueur minimum.*

Nous admettons qu'il existe des sécantes passant par P et rencontrant les deux lignes du bilatère; c'est alors seulement qu'il y a un minimum, et nous allons prouver que ce minimum est obtenu par la sécante APB perpendiculaire à la bissectrice du bilatère. Soit CPD une sécante quelconque. Prenons sur DB prolongé BE = AC, tirons PE, et joignons P au milieu M de DE; enfin abaissons PN perpendiculaire sur BD (fig. 1).

Si l'on avait PD = PE, le triangle PDE étant isoscèle, les trois lignes PB, PM, PN se confondraient, PB étant la bissectrice de l'angle DPE; or, dans ce cas particulier, AB perpendiculaire commune aux deux droites du bilatère est évidemment moindre que CPD.

Supposons donc que PD soit inférieure à PE, et prolongeons PM d'une longueur MQ égale à PM, puis tirons EQ. Dans le triangle PEQ l'angle EPQ est moindre que l'angle EQP, donc EPM est plus petit que MPD, et, par suite, nous avons :

$$\text{EPM} < \text{EPB} = \frac{\text{EPD}}{2}, \quad \text{MPD} > \text{BPD} = \frac{\text{EPD}}{2}.$$

Mais l'angle DBP est aigu, car s'il était droit ou obtus, la perpendiculaire à PB menée en B se confondrait avec DE ou couperait PE et le prolongement de PD; donc PE serait égale ou inférieure à PD, ce qui est contre l'hypothèse; donc les trois points E, B, N sont placés dans l'ordre indiqué, et l'on a

$$\text{PN} < \text{PB} < \text{PM} = \frac{\text{PQ}}{2} < \frac{\text{PE} + \text{EQ}}{2} = \frac{\text{CD}}{2};$$

donc enfin

$$\text{AB} < \text{CD}.$$

TRILATÈRES.

Nous appelons *trilatère* la figure formée par trois droites situées dans le même plan. En GR, un trilatère est aussi un triangle, et a par conséquent trois sommets, trois angles, trois côtés(*). Mais en GL il y a une

(*) En réalité, un trilatère riemannien est la juxtaposition de huit triangles; on pourra se borner à considérer un seul d'entre eux pour la démonstration de leurs propriétés générales.

plus grande variété de cas, puisque chacun des bilatères de la figure peut, indépendamment des deux autres, se présenter sous trois aspects ; on s'assure aisément que le nombre total des cas peut s'élever jusqu'à dix.

Nous nous proposons de démontrer les propriétés les plus simples des lignes fondamentales du trilatère, à savoir : bissectrices, médiatrices, hauteurs.

Bissectrices. *Dans un trilatère, les bissectrices des trois bilatères sont concourantes.*

Deux quelconques d'entre elles se coupant par hypothèse, leur point de concours est équidistant des trois lignes du trilatère et appartient à la troisième bissectrice.

Le trilatère riemannien et le triangle lobatschefskien offrent ainsi en général quatre points de concours distincts, centres des quatre cercles tritangents au trilatère (*), mais dans les autres variétés lobatschefskiennes, le nombre des points de concours est inférieur à quatre et peut se réduire à un. Ainsi dans le trilatère obtenu en coupant deux parallèles par une sécante, nous n'en trouvons évidemment que deux, et trois parallèles deux à deux, ou trois lignes ayant deux à deux trois perpendiculaires communes n'en offrent plus qu'un.

Médiatrices. Les côtés d'un triangle se définissent d'eux mêmes. Quand les trois bilatères offrent des perpendiculaires communes, nous dirons que les *côtés du trilatère* sont les segments compris entre ces perpendiculaires. Dans tous les autres trilatères les côtés n'ont pas de longueurs définies. Les médiatrices d'un trilatère sont les perpendiculaires élevées sur ses côtés en leurs milieux.

Dans tout trilatère, les médiatrices sont concourantes. S'il s'agit d'un triangle, le point de concours de deux d'entre elles est équidistant des trois sommets, et appartient à la troisième. D'ailleurs, si deux d'entre elles sont parallèles ou ont une perpendiculaire commune, la troisième médiatrice est parallèle aux deux premières ou normale également à leur perpendiculaire ; le cercle circonscrit au triangle devient un horicycle dans le premier cas, un hypercycle dans le second (**).

(*) Si, en GL, deux bissectrices sont parallèles ou ont une perpendiculaire commune, la troisième leur est parallèle ou est normale à la même perpendiculaire ; le cercle tritangent est alors un horicycle ou un hypercycle.

(**) Voir notre opuscule *La Géométrie non Euclidienne* (Scientia), pp. 35-36.

Effectivement, soit DE la perpendiculaire commune aux médiatrices des côtés AB et AC du triangle ABC (fig. 2). Tirons Aa, Bb et Cc perpendiculaires sur DE. De ce que $Aa = Bb = Cc$, il faut conclure que DE est aussi perpendiculaire à la médiatrice du côté BC. Ceci posé, si les médiatrices des côtés AB et AC sont parallèles, celle du côté BC ne peut en couper une ni avoir avec elle une normale commune, donc elle leur est aussi parallèle.

Examinons maintenant le cas du trilatère dont les côtés ont deux à deux trois normales communes; ses médiatrices sont aussi évidemment les bissectrices du trilatère formé par les normales; leur point de concours est par suite le centre de la circonférence tritangente à ces normales.

Nous ne citons que pour mémoire le cas du trilatère composé de trois bilatères à lignes parallèles, qui n'est autre que le triangle équilatéral à côtés infinis. Ses médiatrices sont trois perpendiculaires convergentes quelconques.

Hauteurs. La hauteur correspondant à une ligne du trilatère sera par définition, la perpendiculaire à cette ligne issue du sommet opposé, parallèle aux lignes du bilatère opposé, ou perpendiculaire à leur normale commune, selon que ces lignes se rencontrent, sont parallèles, ou ont une normale.

Lemme I. *Dans tout trilatère à côtés définis, la ligne qui joint les milieux de deux côtés est perpendiculaire à la médiatrice du troisième.*

a. Soit d'abord le triangle ABC. Abaissons Aa, Bb, Cc perpendiculaires sur la ligne B'C' qui joint les milieux B'C' de AB et AC(*). Les égalités de triangles rectangles AaB' et BbB', AaC' et CcC' donnent $Aa = Bb = Cc$; donc $BCcb$ est un quadrilatère birectangle et isoscèle où la médiatrice de bc est aussi celle de BC.

b. Soit maintenant le trilatère $A_1BB_1CC_1A$ (fig. 3) dans lequel AA_1, BB_1, CC_1 sont les normales communes, et les côtés ont pour longueurs définies A_1B, B_1C et C_1A. Tirons la ligne B'C' qui joint les milieux de A_1B et AC_1, puis menons aa', bb' et cc' perpendiculaires communes à B'C' et à AA_1, BB_1, CC_1 respectivement. Les quadrilatères trirectangles $A_1B'aa'$ et $BB'bb'$ sont égaux comme ayant un côté égal, $A_1B = BB'$, et l'angle adjacent non droit aussi égal, ou $BB'b = A_1B'a$;

(*) Le lecteur est prié de faire la figure. Voir aussi *Géométrie non Euclidienne*, page 34.

donc $bb' = aa'$; de même $cc' = aa'$; alors le pentagone $bcc'CB_1b'$ a tous ses angles droits et la médiatrice de bc est évidemment aussi celle de B_1C.

Lemme II (Réciproque). *La perpendiculaire menée par le milieu* B' *d'un côté d'un trilatère, sur la médiatrice d'un second côté passe par le milieu* C' *du troisième.*

Cette proposition résulte immédiatement de la précédente.

Lemme III. *Si par les sommets* ABC *d'un triangle on mène des perpendiculaires à ses hauteurs, on forme un trilatère à côtés définis dont les médiatrices sont ces mêmes hauteurs.*

a. Supposons d'abord que les perpendiculaires menées par B et C aux hauteurs BB_1, CC_1 se coupent au point A'. Prenons $BC' = BA'$ et $CB' = CA'$. Je dis que les trois points B', A, C' sont sur une même droite qui a son milieu en A(*).

En effet, dans le triangle A'B'C', BB_1 est la médiatrice du côté A'C'; donc en vertu du lemme II, CA passe par le milieu de B'C'; il en est de même de BA, donc A est le milieu de B'C'.

b. Supposons maintenant que les perpendiculaires menées en B et C aient une normale commune aa_1 (fig. 4); prenons $Ba_1 = Ba$, élevons b_1b perpendiculaire sur Bb_1 et abaissons Ab perpendiculaire sur bb_1; tirons de même Cc, cc_1 et Ac_1. Je dis que les trois points b, A, c_1 sont sur une même droite de milieu A. En effet, dans le trilatère formé par ab_1, a_1c et la normale commune à bb_1 et cc_1, les droites BB_1 et CC_1 sont des médiatrices; donc BA et CA passent par le milieu de la normale commune considérée, ce qui prouve la proposition énoncée.

Si les perpendiculaires menées en B et C étaient parallèles, la parallèle menée à l'une par A devrait être aussi parallèle à l'autre, et l'on aurait un trilatère à côtés infinis auquel la proposition est encore susceptible de s'appliquer.

Théorème. *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes, parallèles ou normales à une même droite.*

Car, d'après les lemmes I, II, III, ces hauteurs sont les médiatrices d'un trilatère à côtés définis ensemble ou infinis ensemble.

Théorème. *Les hauteurs d'un trilatère quelconque sont concourantes, parallèles, ou normales à une même droite.*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure, qui est celle de la géométrie usuelle.

Considérons, par exemple, le trilatère formé par deux parallèles et une sécante AB. Si les hauteurs issues de A et B se rencontrent au point H, l'on envisagera le triangle ABH où les trois hauteurs sont parallèles ; mais la troisième est perpendiculaire à AB et passe par H, et c'est également la troisième hauteur du trilatère donné.

Si les hauteurs issues de A et B sont parallèles, la parallèle commune à ces hauteurs et aux deux côtés du trilatère forme un nouveau trilatère dans lequel AB est évidemment bissectrice et hauteur.

Il resterait à considérer le cas où les deux hauteurs ont une normale commune hh' ; on serait ainsi ramené à prouver la proposition dans le trilatère particulier formé par AB et ces deux hauteurs ; en GR la proposition est vraie ; en effet, puisque hh' est la droite qui a pour centre le point de rencontre réel H des hauteurs, et qu'il suffit d'envisager le triangle HAB ; la troisième hauteur est alors la normale commune à AB et hh' qui passe par H. En GL, H doit être considéré comme idéal, et nous admettrons que le théorème subsiste par induction.

Problème. *Construire la perpendiculaire commune à deux droites non sécantes ni parallèles.*

Nous avons donné : *Constructions Sphériques* (*Mathesis*, tome IX, page 60) et *Etudes de géométrie analytique non euclidienne*, page 10, une construction basée sur le quadrilatère trirectangle. Le théorème des hauteurs nous en offre une autre plus simple. De deux points A, B de la première droite abaissons des perpendiculaires sur la seconde, Aa et Bb, puis menons AA′ perpendiculaire sur Bb et BB′ perpendiculaire sur Aa ; on peut choisir A et B de façon à ce que Aa et Bb soient peu différentes de longueur, c'est-à-dire de façon à ce que AA′ et BB′ se coupent ; soit ω leur point de concours ; la perpendiculaire menée de ω sur l'une des droites satisfait à la question.

Problème. *Construire un trilatère à côtés définis connaissant les milieux de ses côtés.*

Les côtés inconnus sont perpendiculaires aux hauteurs du triangle qui a les points milieux pour sommets.

Théorème. *Les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices du nouveau triangle formé par leurs pieds.*

Pour plus de simplicité, nous supposerons que le triangle n'a que des angles aigus. Si nous construisons les symétriques D_1, D_2 d'un point D

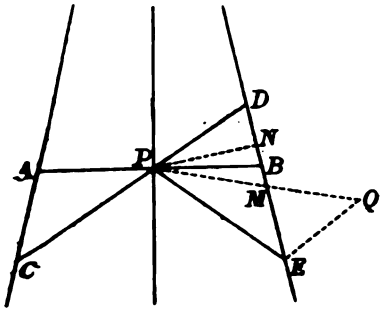


Fig. 1.

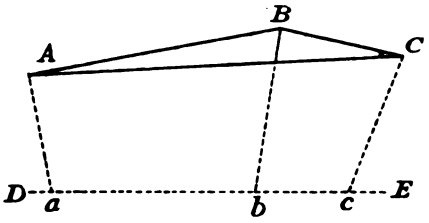


Fig. 2.

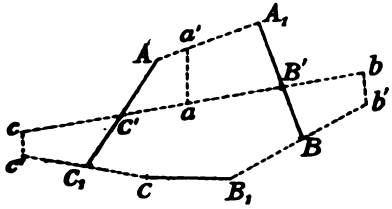


Fig. 3

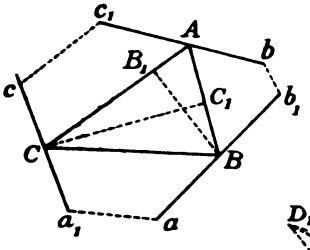


Fig. 4.

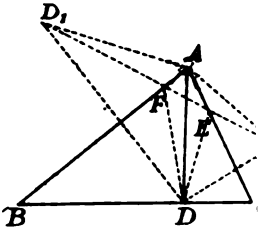


Fig. 5

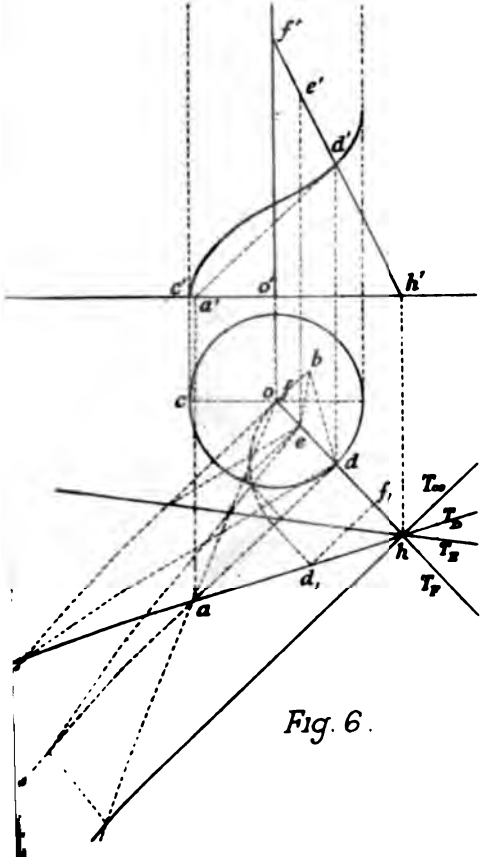


Fig. 6.

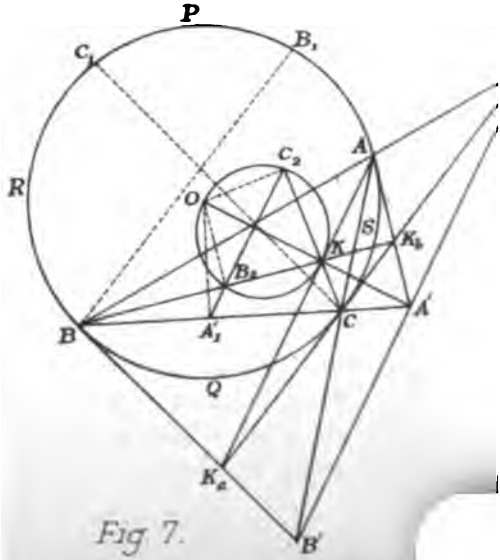


Fig. 7.

de BC par rapport à AB et AC (fig. 5), la ligne D_1D_2 coupe AB et AC en E et F, et le périmètre DE + EF + FD égal à D_1D_2 est le plus petit possible si AD est hauteur du sommet A ; en ce cas, AD est bissectrice évidente de l'angle EDF.

Or, si l'on recommence le raisonnement en partant du point E de AC, on voit que le triangle DEF qui précède a un périmètre supérieur ou au moins égal à celui que l'on obtiendrait en supposant que E est le pied de la hauteur BE, donc puisque de tous les triangles inscrits à ABC, DEF est minimum, BE et CF sont les deux autres hauteurs, ce qui prouve le théorème énoncé.

Quand le triangle proposé a des angles obtus, les hauteurs sont l'une, bissectrice interne, et les deux autres, bissectrices externes du triangle pédal.

Nous déduisons de là, comme en géométrie usuelle, la solution de ce problème : *Construire un triangle connaissant les pieds de ses hauteurs.*

Médianes. Le procédé élémentaire que nous avons suivi précédemment ne peut plus s'appliquer aux médianes d'un trilatère. C'est qu'en effet la démonstration donnée en géométrie usuelle *au premier livre* dépend *réellement du troisième*. On y prouve que deux médianes coupent la troisième dans le même rapport $\frac{1}{2}$. Au fond, c'est le théorème de Ménélaus appliqué dans un des cas les plus simples. Donc, en métagéométrie, le théorème des médianes dépend aussi du théorème de Ménélaus généralisé, et en effet, à ce point de vue, il est parfaitement évident. Nous avons vainement cherché un raisonnement purement géométrique ; les considérations précédentes nous confirment dans l'idée qu'il sera probablement malaisé d'y parvenir sans faire appel à des notions de mécanique, ou sans sortir du plan.

CONSTRUCTION DU PLAN TANGENT A UNE SURFACE RÉGLÉE GAUCHE,

par M. A. Claeys, répétiteur à l'Université de Gand.

Le théorème de Chasles : *le faisceau des plans tangents le long d'une génératrice de surface réglée gauche est projectif à la ponctuelle des points de contact* permet de retrouver les constructions des plans tangents que donnent les méthodes classiques et ouvre la voie à bien des constructions nouvelles et très simples.

Les faisceaux des traces soit horizontales soit verticales de ces plans et les ponctuelles des projections soit horizontales soit verticales des points de contact sont autant de formes projectives. La projectivité est déterminée puisque le mouvement d'une génératrice est assujetti à trois conditions; on peut donc construire directement les plans tangents en trois points.

Prenons par exemple l'hélicoïde gauche (Fig. 6). Soient DF une génératrice qui s'appuie sur l'hélice directrice (CD) en D (*dd'* sur la figure) et sur l'axe OF en F (*ff'*); H (*hh'*) sa trace horizontale; DA la tangente à l'hélice en D.

Le cône directeur étant de révolution autour d'un axe vertical, DF est une ligne de plus grande pente du plan asymptote; la ponctuelle (DF ∞...) est projective au faisceau ($T_D T_F T_\infty$...) des traces horizontales des plans tangents.

Pour trouver la trace T_E correspondant à un point quelconque E(*ee'*) de la génératrice, on peut mener une droite qui coupe le faisceau ($T_D T_F T_\infty$...), suivant une ponctuelle projective à la ponctuelle (*df*$_\infty$...) et sur laquelle on cherche l'homologue de *e*, ou bien projeter la ponctuelle (*df*$_\infty$...) d'un certain point suivant un faisceau de rayons; alors on cherche dans le faisceau ($T_D T_F T_\infty$...) l'homologue du rayon projetant de *e*.

Du choix de la sécante ou du centre de projection dépendent la facilité et l'élégance des constructions. Examinons notamment les suivantes :

1° La sécante est *da;* les ponctuelles sont semblables et la construction est la même que celle qui résulte de la considération des hélices suivant lesquelles la surface est coupée par des cylindres concentriques à celui qui porte l'hélice directrice; par ce dernier procédé on n'arrive cependant à la dite construction que moyennant une démonstration. On peut y aboutir également par un paraboloïde de raccordement ayant pour directrices OF, AD et la droite à l'infini du plan asymptote.

2° La sécante est encore parallèle à T_∞ et telle que le segment $d_1 f_1$ compris entre T_D et T_F soit égal à *df*; les ponctuelles sont égales et en reportant alors au compas les points de *df* sur $d_1 f_1$, et en les joignant à H on obtient les traces des plans tangents correspondants.

3° La sécante est une droite quelconque passant par *f*, *fa* par exemple, les ponctuelles sont alors perspectives. Si elle est de plus parallèle à

T_∞, les ponctuelles sont sections d'un même faisceau de rayons parallèles (ces constructions sont indiquées sans lettres sur la figure).

On peut aussi projeter la ponctuelle (df_∞...) d'un point convenablement choisi.

4° Si db et fb sont respectivement perpendiculaires à T_p et T_r et que l'on prenne b comme centre de projection, le faisceau b (df_∞...) a ses éléments respectivement perpendiculaires à ceux qui leur correspondent dans le faisceau ($T_pT_rT_\infty$...). La construction qui en résulte s'identifie avec celle que donne soit la considération des spirales d'Archimède suivant lesquelles l'hélicoïde gauche est coupé par des plans normaux à l'axe, soit le paraboloïde des normales à la surface le long de DF.

5° Si T_x était connu, on pourrait prendre un centre de projection sur T_x et les deux faisceaux seraient perspectifs. Ainsi, pour le conoïde soit droit soit oblique dont la directrice curviligne se trouve dans le plan vertical de projection, on construit d'abord trois rayons du faisceau des traces verticales des plans tangents; l'un de ces rayons T'_v se rapporte à la trace verticale V de la génératrice; en prenant le centre de projection sur T'_v on aura des faisceaux perspectifs; en le choisissant convenablement les deux faisceaux auront leurs éléments correspondants parallèles.

Quant à l'hélicoïde gauche, on peut se servir de cette méthode si on remplace le faisceau ($T_pT_rT_\infty$...) par le faisceau parallèle ($t_pt_rt_\infty$...) dont le centre est d. On prend alors le centre de projection sur t_p, de préférence à l'infini pour réduire le nombre des droites à tracer (cette construction n'est pas indiquée sur la figure).

S'il arrive que les deux ponctuelles ou les deux faisceaux de rayons sur lesquels est basée la solution du problème n'ont d'autre relation que la simple projectivité, on doit appliquer les constructions connues de la géométrie projective, et même dans ce cas on reconnaît la supériorité du procédé sur celui des surfaces de raccordement au point de vue de la facilité d'application.

×BIBLIOGRAPHIE.

Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung von Dr E. Bardey. Funfte Auflage bearbeitet von Fr. Pietzker. Leipzig, Teubner, 1902. (Gr. in 8° de XIV — 420 p.). Prix : 8 marcs.

Ce recueil d'exercices sur les équations algébriques du second degré, dont la première édition remonte à 1868, jouit à juste titre d'une grande vogue en Allemagne. Les améliorations et les additions introduites par M. Pietzker ne peuvent que maintenir cette réputation. Nous recommandons volontiers aux professeurs et aux élèves un ouvrage auquel *Mathesis* a fait de nombreux emprunts pour les questions proposées ou d'examen.

La table des matières, que nous allons transcrire, suffira pour donner une idée de l'importance de l'ouvrage de Bardey :

I. Equations à une seule inconnue. A. Equations quadratiques pures (n° 1-83). B. Equations complètes (n°s 84-190). C. Equations d'un degré supérieur, ayant une racine facile à reconnaître (n°s 191-244). D. Equations quadratiques (suite), équations $Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$ (n°s 245-364$_2$). E. Equations biquadratiques qui se ramènent au second degré (n°s 365-492).

II. Equations à deux inconnues. A et B. Equations d'un caractère homogène n°s 1-181 et 182-314). C. Equations de forme particulière (n°s 315-394).

III. Equations à trois (n°s 1-77) et à quatre inconnues (n°s 78-114). En tout 900 questions. (J. N.).

Lehrbuch der Vermessungskunde von Dr A. Baule, Professor an der Forstakademie zu Hann, Munden. Zweite erweiterte und umgearbeitete Auflage. Leipzig et Berlin, Teubner, 1901 (VIII et 471 p., gr. in-8°, avec 280 figures dans le texte). Prix : 8 marcs 80.

Sommaire. Introduction. I. La théorie des instruments. A. Les éléments constitutifs des instruments. B. Moyens de marquer les stations. C. Instruments pour mesurer les angles. D. Instruments pour mesurer les longueurs. E. Instruments pour mesurer les hauteurs. F. Instruments pour mesurer les vitesses des courants d'eau. G. Conservation des instruments. II. Théorie des opérations. A. Mesures horizontales. B. Mesures verticales. III. Tracé des plans.

Ce traité de *géodésie élémentaire* a été très favorablement apprécié dans les revues scientifiques allemandes. Voici le jugement porté par *Prometheus* : « L'ouvrage contient des solutions détaillées de tous les problèmes de géodésie inférieure, dans un ordre se rapprochant de celui du grand traité de Bauernfeind. La description des instruments usuels est très claire et bien détaillée. L'auteur traite avec soin les intégrateurs mécaniques et l'exécution des plans ou cartes. L'ouvrage se recommande par l'abondance des figures et les explications complètes du texte ».

Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. Auf Veranlassung der kaiserl. Inspektion des Bildungswesens der Marine bearbeitet von Dr B. Sellenthin, Oberlehrer an der Kaiserl. Marineschule zu Kiel. Leipzig und Berlin, Teubner, 1902 (XI-450 p. gr. in-8°). Prix : 8 marcs 40.

Cet ouvrage est destiné à servir de *manuel* dans l'enseignement des mathématiques aux écoles navales; le programme des mathématiques, dit l'auteur, est réduit au minimum nécessaire à la compréhension des calculs nautiques, cependant les développements sont suffisamment complets pour qu'ils puissent suffire même aux autodidactes.

Sommaire. A. Arithmétique. Nombres entiers (positifs ou négatifs). Fractions ordinaires, décimales. Equations du premier degré à une inconnue. Rapports et proportions. Puissances. Racines. Logarithmes. Équations à deux inconnues, équations quadratiques. B. Géométrie. Droites et angles. Triangles. Quadrilatère. Cercle. Problèmes fondamentaux. Mesure des aires planes et égalité des figures. Similitude. Lieux géométriques. Polygones réguliers; mesure de la circonférence et du cercle. C. Trigonométrie plane. Formules goniométriques. Résolution des triangles. D. Stéréométrie. Droites et plans. Angles solides. Polyèdres. Corps ronds (cylindre, cône, sphère). Applications de la stéréométrie au globe terrestre et à la sphère céleste. E. Trigonométrie sphérique. Triangles rectangles. Triangles obliquangles. Applications au globe terrestre et à la sphère céleste.

Ce qui donne un caractère particulier à cet ouvrage, ce sont les applications des mathématiques aux problèmes nautiques.

Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie nebst Anwendungen auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Physik, Technik, Volkswirthschaftslehre für die oberen Klassen höherer Schulen von A. Schülke, Professor am Gymnasium zu Osterode. Leipzig et Berlin, Teubner, 1902 (In 8 cart. de X-194 p.). Prix : 2 marcs 20.

Cet ouvrage contient environ 6000 exercices de *calcul* pour les classes supérieures des gymnases (de *Unter secunda* à *Oberprima*). Ces calculs sont supposés faits systématiquement avec quatre chiffres (cinq pour les calculs d'intérêts): les angles sont comptés en degrés et centièmes de degré. Les exercices sont sévèrement gradués de manière que l'élève n'ait jamais à surmonter deux difficultés à la fois. Un grand nombre de problèmes se rapportent aux mathématiques appliquées.

Sommaire. Arithmétique et algèbre. I. Opérations fondamentales : puissances, racines, logarithmes, progressions, permutations, arrangements, combinaisons, binomes. II. Equations du second, du troisième, du $n^{ième}$ degré; équations transcendantes; équations indéterminées. III Représentation graphique des fonctions. Maxima et minima. Développements en série.

Géométrie plane. I. Rapports, théorème de Pythagore, figures inscrites et circonscrites, polygones réguliers, cercles, etc. II. Géométrie analytique : droite, parabole, cercle, ellipse, hyperbole, coordonnées polaires.

Trigonométrie. I. Triangles rectangles. II. Triangles quelconques. III. Fonctions circulaires.

Géométrie de l'espace. Cube, prisme et cylindre, pyramide et cônes ; sphère ; problèmes trigonométriques ; pyramides et cônes tronqués ; triangles sphériques.

Applications. I. Interpolation. 2. Nombres complexes. 3. Arithmétique politique. 4. Géodesie. 5. Géographie et astronomie. 6. Nautique. 7. Physique. 8. Stabilité des constructions. 9. Cristallographie. 10. Maxima et minima. 11. Limites des erreurs commises.

Sechstellige Tafel der Werthe Log.. $\frac{1+x}{1-x}$ für jeden Wert des Arguments Log x von 3.0 — 10 bis 9,99000 — 10, von Dr. E. Hammer, Professor an der K. technischen Hochschule Stuttgart. Leipzig, Teubner, 1902 (Gr. in-8 de IV-73 p. cartonné). Prix : 3 marcs 60.

On a remarqué maintes fois qu'il serait utile de pouvoir déduire le logarithme de $z = (1+x) : (1-x)$ de celui de x, ou celui de $x = (z-1) : (z+1)$ du logarithme de z. L'auteur a construit ces tables à six décimales dans l'intervalle indiqué dans le titre, à cinq décimales au delà jusque 9,99700 — 10, enfin de là jusque 9,99990 — 10 à 4. Les treize dernières pages du livre indiquent comment les tables ont été calculées et quel en est l'usage.

Ernest Pascal, Ordentlicher Professor an der Universität Pavia. **Repertorium der höheren Mathematik** (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur) Autorisirte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp, Oberlieutenant a. d. zu Wiesbaden II. Theil : Die Geometrie. Leipzig, Teubner, 1902 (Cartonné, in-12 de IX-712 p.). Prix : 12 marcs.

Nous ne pouvons que répéter ce que nous avons dit de la première partie de ce précieux recueil (*Mathesis*, 1901, pp. 26-27) : « Le Répertoire de M. E. Pascal a sa place marquée dans la bibliothèque des professeurs et des aspirants au doctorat qui ont besoin de retrouver rapidement sans recourir aux Traités, à la *Synopsis* de Hagen ou à l'*Encyclopédie mathématique*, une définition, une formule, un théorème, un renseignement bibliographique. C'est le vade-mecum du géomètre, un vade-mecum très bien fait, auquel on peut prédire, sans crainte de se tromper, une grande diffusion et de nombreuses éditions ».

Sommaire. 1-2 Géométrie des figures continues et des figures discontinues (Principes de géométrie métrique et projective, y compris les deux trigonométries, la géométrie analytiqne de la droite et du plan et la géométrie moderne du triangle). 3. Coniques. 4. Quadriques. 5. Théorie générale des courbes planes algébriques. 6. Les connexes dans le plan. 7. Cubiques planes. 8. Courbes planes du quatrième ordre. 9. Théorie générale des surfaces algébriques et des courbes algébriques dans l'espace. 10. Courbes sur les quadriques. Courbes gauches du 3e, 4e, 5e, 6e ordre, rationnelles. 11. Surfaces du troisième ordre.

12. Surfaces du quatrième ordre. 13. Surfaces d'ordre supérieur. Surfaces réglées. 14. Géométrie pluckérienne ; géométrie avec la sphère pour élément. 15. Géométrie énumérative. 16. Propriétés infinitésimales des courbes et des surfaces. 17. Principales générations métriques spéciales et transformation des courbes et des surfaces. Géométrie des courbes spéciales. 18. Analysis situs ou topologie. Théorie des polyèdres. Connexion des surfaces de Riemann. 19. Géométrie projective dans un espace R_n à plus de trois dimensions. 20. Géométrie infinitésimale et géométrie intrinsèque d'un R_n linéaire ou à courbure constante. 21. Géométrie absolue et en particulier géométrie non euclidienne dans le plan et dans l'espace.

L'ouvrage se termine par trois tables : une table des noms (29 pages), une table alphabétique des matières (29 pages), une table des théorèmes, formules, courbes, surfaces portant le nom de tel ou tel géomètre (9 pages). Il y a ensuite 8 pages d'additions ou corrections (*) aux deux parties du répertoire.

(P. M.)

Arithmétique commerciale (Opérations en marchandises), à l'usage de l'enseignement et du haut commerce, par Th. Klompers, ancien élève de l'École normale des Sciences, Professeur à l'Athénée royal d'Anvers. — Anvers, Van Ishoven; Paris, Boyveau et Chevillet, 1902. (Grand in-8° de VIII-248 p.). Prix : 4 francs pour la Belgique, 5 francs pour la France.

Nous saluons avec plaisir l'apparition de cet ouvrage destiné aux écoles moyennes, aux collèges et athénées royaux, aux instituts et écoles supérieures de commerce, ainsi qu'aux universités. L'auteur, bien connu par sa compétence en matière d'enseignement commercial, y a développé tous ou presque tous les calculs qui se rencontrent dans les travaux d'un bureau commercial. Il s'est donc placé au point de vue des Affaires en marchandises et n'a oublié aucun des différents services; il a traité les calculs qui se rapportent au côté mercantile pur : ventes, achats, spéculations, aussi bien que ceux qui se rapportent au service financier : paiements et recouvrements.

Voici l'énumération des principales matières : *Première partie :* Diverses simplifications du calcul chiffré. Applications aux factures du commerce intérieur et au calcul des primes d'assurances maritimes et contre l'incendie. Encaissement des valeurs sur l'intérieur, par l'Administration des Postes, par

---

(*) Il est évidemment impossible que, dans un ouvrage aussi plein de choses que le Répertoire il ne se soit pas glissé quelques erreurs : on en laisse bien passer dans l'exposé de ses propres recherches, à fortiori, en échappe t-il dans le résumé de celles des autres. En voici une que nous avons rencontrée dans la seconde partie du Répertoire et dont nous sommes responsable, car elle est empruntée à notre petit mémoire sur la géométrie riemannienne. M. Pascal dit, p. 625, que, dans la géométrie riemannienne on n'admet *ni le postulat V ni le postulat VI* d'Euclide; il fallait dire simplement *le postulat VI.*

la Banque nationale de Belgique, la Banque de France et les banques privées. Méthodes commerciales pour le calcul de l'intérêt simple et des bordereaux d'escompte d'effets nationaux remis aux établissements cités plus haut. Échéance commune et moyenne. Calcul du montant exact d'une traite à créer. Mélanges et alliages. Comptes courants et d'intérêts à taux réciproques ou non, à taux constants ou variables. Nombres complexes et applications à l'établissement de bordereaux d'effets étrangers remis à l'escompte à la Banque nationale ou aux banques privées; applications au calcul du fret. Règle conjointe et applications à la construction des tables de grain et de fret.

Deuxième partie : Factures du commerce extérieur. Comptes de revient et rendement. Comptes de vente et nets produits. Comptes simulés et tables de parité.

Cette dernière partie (60 pages) se distingue par les renseignements précieux qu'elle contient pour le commerce d'importation et d'exportation relatif aux articles suivants : Cafés, Salaisons, Sucres, Huiles et Tourteaux, Pétrole, Bois du Nord, Cuirs, Céréales, Cotons et Laines.

A notre avis, ce livre est excellent et éminemment utile aux professeurs de commerce qui tiennent à donner un enseignement pratique et moderne. Nous ajouterons qu'il peut servir avantageusement de *vade-mecum* aux étudiants qui suivent les cours de bureau commercial d'une École supérieure de commerce.

E. Fagnart.

Autres ouvrages récents (*). 1. **Geometrie der Dynamen**. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie, bearbeitet von E. Study, ordentlichem Professor an der Universität Greifswald. Erste Lieferung. Leipzig, Teubner, 1901 (In-8°; pp. 1-241). Prix : 7 marcs 60.

2. **Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen**, von R. Fricke und F. Klein. Zweiter Band. Erste Lieferung : Engere Theorie der automorphen Functionen. Leipzig, Teubner, 1901 (In 8; pp. 1-282). Prix : 10 marcs.

3. **Linear Groups** with an Exposition of the Galois Field Theory by L. E. Dickson, Ph. Dr. Assistant Professor of Mathematics in the University of Chicago. Leipzig, Teubner, 1901 (X-312 p. in 8, cartonné). Prix : 12 marcs.

4. Galileo Ferraris. **Wissenschaftliche Grundlagen der Electrotechnik**, deutsch herausgegeben von Dr. L. Finzi. Leipzig, Teubner, 1901 (Cartonné de XII-358 p. in-8°, avec 161 figures dans le texte). Prix : 12 marcs.

5. **Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten** von W. Killing, Professor der Mathematik an der Kgl. Akademie zu Münster i. W. Paderborn, Schöningh, Erster Teil : Die ebene Geometrie, 1900 (XIII-220 p. in-8°). Zweiter Teil : Die Geometrie des Raumes, 1901 (VIII-361 p. in-8°). Prix : 4 marcs + 7 marcs.

(*) Nous signalons ainsi, sans les analyser, les ouvrages traitant de matières qui sont trop éloignées de celles dont s'occupe *Mathesis*.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1332.

(Voir *Mathesis*, (3), t. I, p. 215.)

Soit M *le point de la circonférence circonscrite au triangle* ABC, *ayant pour coordonnés normales* $(b-c)^{-1}$, $(c-a)^{-1}$, $(a-b)^{-1}$.

1° *Démontrer la relation*

$$MA + MC + MC = 0.$$

(MA *est positif si* MA *coupe* BC *hors du triangle, etc.*)

2° $$MA = \frac{R}{d}(b-c), \quad MB = \frac{R}{d}(c-a), \quad MC = \frac{R}{d}(a-b),$$

d désignant la distance OI *des centres des cercles circonscrit et inscrit.*

3° *Montrer par transformation continue* (*Mathesis*, 1892, p. 62) *quels sont les résultats analogues pour le point* M_a, *transformé continu de* A *de* M, *de coordonnées* $(b-c)^{-1}$, $(-c-a)^{-1}$, $(a+b)^{-1}$.

4° *Les droites* M_aM, M_bB, M_cC *coupent* BC, CA, AB *sur une parallèle à l'axe antiorthique et distante de cet axe de* $\frac{Rr}{d}$, *tiers de la distance du même axe au point* I; *cette parallèle est la polaire trilinéaire du point* $(b+c)^{-1}$, $(c+a)^{-1}$, $(a+b)^{-1}$. (E. Lemoine).

Solution par M. Emmerich. 1. Supposons $a > b > c$, ce qui place le point M sur l'arc CA. Si l'on abaisse les perpendiculaires MA', MB', MC' sur BC, CA, AB, des triangles semblables donnent

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} = \frac{b-c}{c-a}, \quad \frac{MB}{MC} = \frac{MC'}{MB'} = \frac{c-a}{a-b};$$

on conclut de ces proportions

$$MA = \lambda(b-c), \quad MB = \lambda(c-a), \quad MC = \lambda(a-b),$$

où λ est un facteur de proportionnalité. Il en résulte

$$MA + MB + MC = 0,$$

MB étant négatif.

2. Remplaçons, dans l'égalité

$$ABC = BCM + CAM + ABM,$$

les aires des triangles par les produits de leurs trois côtés qui leur sont proportionnels; en ayant égard aux signes on trouve

$$abc + \lambda^2[a(a-b)(c-a) + b(b-c)(a-b) + c(c-a)(b-c)] = 0.$$

En observant que

$$a(a-b)(c-a) = a^2(-a+b+c) - abc,$$
$$b(b-c)(a-b) + c(c-a)(b-c) = -(b-c)^2(-a+b+c),$$

on voit que

$$\lambda^2 = \frac{abc}{abc - (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Or,

$$\frac{abc}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \frac{R}{2r}.$$

Par conséquent

$$\lambda^2 = \frac{R}{R-2r} = \frac{R^2}{R^2-2Rr} = \frac{R^2}{d^2}, \quad \lambda = \frac{R}{d}.$$

3. Le point M_a appartient également à l'arc AC. On démontre comme ci-dessus que

$$M_aA = \lambda_a(b-c), \quad M_aB = -\lambda_a(c+a), \quad M_aC = \lambda_a(a+b),$$

λ_a étant un facteur de proportionnalité. Il en résulte

$$-M_aA + M_aB + M_aC = 0$$

où M_aB est négatif, de sorte que les longueurs absolues vérifient l'égalité $M_aC = M_aA + M_aB$.

La valeur de λ_a^2 se déduit de celle de λ^2 par le changement de R en $-R$ et de r en r_a, ce qui donne

$$\lambda_a^2 = \frac{R^2}{R^2+2Rr_a} = \frac{R^2}{d_a^2}, \quad \lambda_a = \frac{R}{d_a}.$$

Nous désignons par I_a, I_b, I_c les centres des trois cercles exinscrits, et par d_a, d_b, d_c les distances OI_a, OI_b, OI_c.

Au point M_a correspondent les deux points

$$M_b \cdots (b+c)^{-1}, \quad (c-a)^{-1}, \quad (-a-b)^{-1};$$
$$M_c \cdots (-b-c)^{-1}, \quad (c+a)^{-1}, \quad (a-b)^{-1}.$$

Les points M_b, M_c se trouvent sur l'arc BC, et l'on a

$$M_bC = M_bA + M_bB, \quad M_cB = M_cA + M_cC.$$

Notons aussi les relations

$$M_bA : M_cA = d_c : d_b, \quad MA : M_aA = d_a : d.$$

4. Soient N_a, N_b, N_c les points où les droites AM_a, BM_b, CM_c coupent les côtés opposés; ces points ont pour coordonnées

$$0, a+b, -c-a; \quad -a-b, 0, b+c; \quad c+a, -b-c, 0.$$

On voit qu'ils sont situés sur la droite

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0, \tag{1}$$

polaire trilinéaire du point $(b+c)^{-1}, (c+a)^{-1}, (a+b)^{-1}$.

En écrivant l'équation (1) ainsi :

$$(a+b+c)(x+y+z)-(ax+by+cz)=0,$$

on voit que la droite $N_aN_bN_c$ est parallèle à l'axe antiorthique $x+y+z=0$, qui passe par les pieds A_1, B_1, C_1 des bissectrices extérieures du triangle ABC.

Les distances du point I aux droites $N_aN_bN_c$, $A_1B_1C_1$ ont pour expressions

$$\frac{\Sigma(b+c)r}{\sqrt{\Sigma(b+c)^2-2\Sigma(a+b)(a+c)\cos A}}=\frac{2rR}{d},$$

$$\frac{3r}{\sqrt{3-2\Sigma\cos A}}=\frac{3rR}{d};$$

donc la distance de ces deux droites est égale à $\frac{rR}{d}$.

Remarques. I. Soit D le point où la circonférence BB_1C rencontre AC; la droite AM est parallèle à BD. En effet,

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AB.AC_1}{AC.AB_1}=\frac{bc^2}{a-b}:\frac{b^2c}{c-a}=\frac{A_2B}{A_2C},$$

A_2 étant le point de rencontre de AM avec BC.

2° Soient T_a, T_b, T_c les points de rencontre des côtés opposés du quadrangle complet $MM_aM_bM_c$.

a) Ces points sont sur les côtés du triangle ABC;

b) Les droites T_bT_c, T_cT_a, T_aT_b passent par les associés du point de Lemoine;

c) Les droites AT_a, BT_b, CT_c se coupent sur la circonférence ABC, au point de Steiner.

Note I. M. Déprez a résolu la même question; sa solution est accompagnée de la note suivante :

1° Nous avons démontré (*Mathesis*, (2) X, p. 237), que la droite de Simson du point M est parallèle à OI.

De là, la construction suivante du point M : Par A mener une parallèle à OI, qui coupe la circonférence ABC en A', de A' abaisser une perpendiculaire sur BC; cette perpendiculaire passe par M.

2° Les droites de Simson des points M_a, M_b, M_c sont respectivement parallèles aux droites OI_a, OI_b, OI_c; ce qui permet de construire ces points.

3° Soient T le point de Gergonne de ABC, et T_a, T_b, T_c ses associés. Le lieu d'un point tel que les parallèles menées par ce point aux droites AT, BT, CT rencontrent BC, CA, AB en trois points collinéaires est la conique $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$; M est un point de ce lieu.

Les points M_a, M_b, M_c jouissent d'une propriété analogue par rapport aux points F_a, F_b, F_c.

4° Désignons les points de rencontre de AM, BM, CM avec BC, CA, AB par α, β, γ, et soient K_a, K_b, K_c les associés du point de Lemoine.

Les quatre points α, β, I_c, K_c sont collinéaires;

» » α, γ, I_b, K_b » »

» » β, γ, I_a, K_a » »

D'où une autre construction du point M. (Déprez.)

II. Dans les *Archives de Grunert-Hoppe*, 1886, p. 437, M. Godts se propose de déterminer, sur la circonférence circonscrite à un triangle ABC, un point M tel que l'une des distances MA, MB, MC soit égale à la somme des autres. Il trouve quatre points résolvant le problème et démontre que ces points sont les anti-complémentaires des points où le cercle de Feuerbach touche le cercle inscrit et les cercles exinscrits. (J. N.).

×Question 1845.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 264).

Soient O, R *le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC, *et* I, *r le centre et le rayon du cercle inscrit. Si l'on a*

$$AI = \sqrt{2Rr},$$

l'angle OIA *est droit, et* $2a = b + c$. (Walker).

Solution par M. EMMERICH. Soient D, E les points où les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A rencontrent la circonférence circonscrite. Si nous abaissons IF perpendiculaire à AB, les triangles semblables AIF, EDB donnent $AI : r = 2R : DB$. Comme $DB = DI$, on a $AI \cdot DI = 2Rr = AI^2$, donc $DI = AI$, ce qui montre que I est le milieu de la corde AD.

A_1 désignant le milieu de BC, on conclut de $BD = AI$ que les triangles semblables A_1BD, FAI sont égaux. On a donc $A_1B = AF$, $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(b + c - a)$, $2a = b + c$. Comme $A_1D = IF = r$ on voit aisément que BC passe par le milieu K de ID. On en conclut que K est aussi le milieu de AI_a, que $r_a = h_a = 3r$, que la droite joignant I au barycentre est parallèle à BC.

La même question a été résolue par MM. DROZ FARNY, FRANÇOIS, CL. THIRY, PLAKHOVO, BARISIEN, VERHEUGEN et ROSE.

La solution de M. Emmerich reproduit, dans sa première partie, la démonstration la plus simple de la formule d'Euler : $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$; car la puissance de I par rapport au cercle O est égale à $\overline{OI}^2 - R^2$ et aussi à $-2Rr$. Plusieurs correspondants sont partis de la formule d'Euler pour démontrer le théorème de Walker.

Le triangle particulier que l'on rencontre dans cette question, a été étudié par M. Droz Farny dans un article du J. M. E., année 1894, portant le titre : *Sur les triangles dont les côtés sont en progression arithmétique.* Voir aussi *Journal de Vuibert*, 1898-99, p. 86, question 4519, et 1897-98, p. 118, question 4314, ainsi que les formules de M. Couturier, dans *Mathesis*, (2) X, p 135. M. Plakhovo signale également la relation $r_a = h_a = 3r$.

×Question 1847.

(Voir *Mathesis*, (3) I, p. 280.)

Les tangentes menées en B ***et*** C ***au cercle circonscrit au triangle*** ABC ***rencontrent les côtés opposés en*** B′ ***et*** C′. ***Peut-on avoir*** $BB' = CC'$ ***sans que le triangle*** ABC ***soit isoscèle?***

Trouver d'autres propriétés remarquables d'un tel triangle.

Solution par M. V. CRISTESCO (Bucarest). Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle (Fig. 7); K_a le point d'intersection des tangentes menées en B et C; B_1, C_1 les points d'intersection de la circonférence O avec les parallèles, aux tangentes CK_a, BK_a, menées respectivement par les sommets B et C. Pour fixer les idées, supposons que le côté BC soit fixe ainsi que le centre O du cercle circonscrit. Alors si le sommet A

est situé sur l'arc B_1PC_1 ou sur l'arc BQC tels que les segments de cercle B_1PC, BQC ne renferment pas le centre O, les points B′, C′ tombent tous les deux respectivement au-dessus ou au dessous de BC. Dans les deux cas, les triangles K_aBC', K_aCB' ayant un angle commun compris entre côtés égaux, sont égaux ; par suite, l'angle K_aCB' est égal l'angle K_aBC', et comme l'angle K_aCB est égal l'angle K_aBC, on en conclut l'égalité des angles B et C du triangle. Donc, dans ces deux cas le triangle ABC est nécessairement isoscèle.

Supposons maintenant que le sommet A se trouve sur l'un des autres arcs B_1SC ou C_1RB. Dans ces deux cas, les points B′, C′ tombent de part et d'autre de BC et si la longueur BC et le rayon OB sont convenablement choisis, il peut arriver que l'on ait $BB' = CC'$.

Cherchons maintenant la relation qui doit exister entre les côtés d'un tel triangle. La longueur BB′ est égale à la moitié du segment déterminé sur le côté CA par les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle B, car B′ est le centre de la circonférence qui passe par B et par les pieds de ces bissectrices. Donc

$$BB' = \frac{abc}{c^2 - a^2}, \quad CC' = \frac{abc}{a^2 - b^2},$$

et, par suite, l'égalité $BB' = CC'$ donne

$$b^2 + c^2 = 2a^2. \tag{1}$$

Soient G, K, H, A'_1, B'_1, C'_1 le centre des médianes, le centre des symédianes, l'orthocentre et les milieux des côtés BC, CA, AB; $A_2B_2C_2$ le second triangle de Brocard du triangle ABC. Dans le *Traité de Géométrie* par *MM. Rouché et de Comberousse*, sixième édition, pag. 493, ex. 33, on trouve énoncées les propriétés suivantes du triangle dont les côtés sont liés par la relation (1) :

1° *Le triangle podaire* XYZ *de* K *est semblable à* ACB.

2° *La circonférence* $AB'_1C'_1$ *passe par G*; *les circonférences* AGB, AGC *touchent le côté* BC; *la circonférence* BGC *passe par* H.

3° OK *est perpendiculaire à* AK; GK *est parallèle à* BC.

4° $\overline{AK}^2 = BK.CK$, $2\overline{AH}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2$.

5° *Le triangle podaire de* G *est isoscèle.*

6° *Le cercle qui passe par* A *et les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle* BAC *passe par* G.

7° *Lorsque deux sommets du triangle* ABC *restent fixes, le troisième décrit une circonférence.*

A ces propriétés j'ajouterai, avec démonstration, les suivantes, dont quelques-unes se déduisent de celles que sont énoncées ci-dessus.

8° *La symédiane* AK *est parallèle à* B'C'. En effet, le triangle $C'BK_a$ coupé par la transversale AB' donne

$$K_aB'.CC'.AB = BB'.CK_a.AC',$$

or $BB' = CC'$, $BK_a = CK_a$, donc

$$\frac{K_aB}{K_aB'} = \frac{AB}{AC'},$$

ce qui prouve que AK est parallèle à B'C'. Il en résulte que OK est perpendiculaire à AK, car B'C' est la polaire de K.

9° *Le sommet* A_2 *du second triangle de Brocard coïncide avec* K, car les droites OA_2, OK sont perpendiculaires à AK, et, par suite, coïncident.

10° *L'intersection* A' *de la tangente en* A *avec* BC *est le milieu de* B'C'. En effet, A', B', C' étant collinéaires, le triangle AB'C' coupé par la transversale BC donne

$$\frac{CB'.A'C'.AB}{CA.A'B'.BC'} = 1;$$

or, AK_a étant parallèle à B'C', on a

$$\frac{AB}{BC'} = \frac{BK_a}{BB'} = \frac{CK_a}{CC'} = \frac{CA}{CB'},$$

donc $A'C' = A'B'$.

11° OK *passe par* A'. En effet, on a $OB' = OC'$, car les triangles rectangles OBB', OCC' sont égaux.

12° *Le triangle* KB_2C_2 *est isoscèle et a comme angles* A, A, $\pi - 2A$; *le côté* B_2C_2 *est parallèle à* AK. En effet, le point K coïncidant avec A_2 est situé sur les circonférences adjointes (BA), (CA); donc l'angle BKK_a = l'angle $CKK_a = A$. Il en résulte que le triangle podaire de G a comme angles A, A, $\pi - 2A$, car ses côtés sont perpendiculaires à AK, BK, CK; or, le triangle $A_2B_2C_2$ est semblable au triangle podaire de G.

13° *Le côté* B_2C_2 *passe par le milieu* A'_1 *de* BC. En effet, l'angle $BKC = 2A$ et par suite le quadrilatère BOKC est inscriptible. Il en résulte que $A'_1B_2C_2$ est la droite de Simson du triangle KBC par rapport à O.

Note. M. Emmerich a résolu la même question et renvoie pour d'autres propriétés du triangle *automédian* ABC à une étude détaillée

de M. Artzt (voir *Zeitschrift für math. Unterricht*, 1887, p. 198 et 589; 1889, p. 32 et 426), et à la question que nous avons proposée dans *Mathesis*, 1889, p. 102, qui a été résolue ibid., p. 261, et figure en partie comme exercice dans le *Traité de Géométrie* par MM. Rouché et de Comberousse. Nous ignorions complètement que M. Artzt s'était déjà occupé du même triangle.

Pour compléter ici l'énumération des propriétés, nous reproduisons les propositions déjà connues (*Mathesis*, 1889, p. 261) et extrayons d'une solution de M. Barisien quelques autres.

1° $a^2 = 2bc\cos A$, $2\cot A = \cot B + \cot C$.

2° α, β, γ désignant les médianes AA'_1, BB'_1, CC'_1, on a

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{c} = \frac{\gamma}{b} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

de sorte que le triangle dont les côtés sont équipollents à α, β, γ est semblable à ABC.

3° GA est l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse circonscrite à ABC et ayant pour centre G.

4° $S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg} A$. (Déprez).

5° Les circonférences AKB, AKC touchent respectivement les côtés AC, AB. (Jeřabek).

6° Si E est le pied de la symédiane AK, $BE = c^2 : 2a$, $CE = b^2 : 2a$; par suite, les circonférences $EA'_1B'_1$, $EA'_1C'_1$ touchent respectivement les côtés AC, AB. (Barisien).

7° $S = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - a^4} = \frac{1}{8}\sqrt{14b^2c^2 - b^4 - c^4}$.

(Barisien).

Question 1350.

(Voir *Mathesis*, (3) I, p. 280).

Une droite AB, *de longueur constante l, se meut entre deux droites fixes* Ox, Oy. *Pour une position donnée de* AB, *on considère en chaque point* M *de cette droite le cercle osculateur à l'ellipse décrite par* M *lorsque* AB *se déplace; trouver le lieu du centre et l'enveloppe de ce cercle, ainsi que le lieu de l'extrémité du diamètre conjugué avec* OM.

Solution par M. E. N. Barisien. Nous supposons les axes Ox, Oy

rectangulaires. Si on fait MB $= a$, MA $= b$, AB $= l$, angle BAO $= \varphi$ et que x, y désignent les coordonnées de M, on a

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi, \tag{1}$$

$$a + b = l. \tag{2}$$

I. Les coordonnées du centre du cercle osculateur en M sont

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi, \quad y = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3\varphi,$$

ou

$$x = \frac{l}{a}(a - b)\cos^3\varphi. \quad y = -\frac{l}{b}(a - b)\sin^3\varphi. \tag{3}$$

On aura le lieu de ce centre en éliminant a et b entre les équations (2) et (3). Or, les équations (3) s'écrivent

$$a(x - l\cos^3\varphi) = -lb\cos^3\varphi, \quad b(y - l\sin^3\varphi) = -la\sin^3\varphi;$$

d'où, par multiplication,

$$xy - lx\sin^3\varphi - ly\cos^3\varphi = 0.$$

Le lieu du centre est donc une hyperbole équilatère.

II. L'équation du cercle osculateur est

$$\left(x - \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi\right)^2 + \left(y + \frac{c^2}{b}\sin^3\varphi\right)^2 = \left(a\cos\varphi - \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi\right)^2 + \left(b\sin\varphi + \frac{c^2}{b}\sin^3\varphi\right)^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2l\left(1 - \frac{b}{a}\right)x\cos^3\varphi + 2l\left(\frac{a}{b} - 1\right)y\sin^3\varphi - (2b^2 - a^2)\cos^2\varphi - (2a^2 - b^2)\sin^2\varphi = 0.$$

Si l'on en désigne le premier membre par $F(a, b)$, le point du cercle qui appartient à l'enveloppe vérifie l'équation

$$F'_a + F'_b \cdot \frac{db}{da} = 0;$$

mais la relation (2) donne $\frac{db}{da} + 1 = 0$, donc pour ce point on a $F'_a - F'_b = 0$. L'équation de l'enveloppe résulte donc de l'élimination de a et b entre les trois équations

$$F(a, b) = 0, \quad F'_a - F'_b = 0, \quad a + b = l.$$

Le calcul ne paraît pas donner le résultat simple.

III. Les coordonnées d'une extrémité M' du diamètre conjugué avec OM sont

$$x = \mp a \sin\varphi, \quad y = \pm b \cos\varphi.$$

Le lieu de M' se compose donc des deux droites

$$-\frac{x}{\sin\varphi} + \frac{y}{\cos\varphi} = l,$$

perpendiculaires à AB.

Solution par M. Déprez. Nous supposons l'angle xOy quelconque. Soit C le point de rencontre des perpendiculaires Ox, Oy en A, B; on sait que MC est normale à l'ellipse en M et est la longueur du demi-diamètre OM', conjugué de OM. Désignons OC par p, la distance CD de C à AB par ∂, la projection de O sur CM par N, le centre du cercle de courbure de l'ellipse en M par ω, la distance Cω par ρ, les angles DCA et DCO par θ et α.

1° On a

$$M\omega = \frac{\overline{MC}^2}{MN}, \quad \rho = CM + M\omega = CM + \frac{\overline{MC}^2}{MN} = \frac{CM.CN}{MN},$$

$$CM = \frac{\partial}{\cos\theta}, \quad CN = p\cos(\theta - \alpha),$$

$$MN = p\cos(\theta - \alpha) - \frac{\partial}{\cos\theta};$$

l'équation du lieu de ω est donc

$$\rho = \frac{p\partial\cos(\theta - \alpha)}{p\cos\theta\cos(\theta - \alpha) - \partial}.$$

On voit que ce lieu est une conique passant par C.

2° L'enveloppe du cercle osculateur peut être définie ainsi :

On donne une conique (lieu de ω) *et une droite* (AB); *d'un point fixe* C *de la conique on mène une droite quelconque coupant cette courbe en* ω *et la droite en M. Trouver l'enveloppe du cercle de centre* ω *et de rayon* ωM.

La détermination analytique de cette enveloppe paraît donner lieu à des calculs compliqués.

3° La droite OM' étant égale et perpendiculaire à CM, et M parcourant une droite, le point M' décrit une droite perpendiculaire à AB.

Note. MM. Barisien et Déprez font les remarques suivantes :

1° La tangente à l'ellipse au point M enveloppe une parabole ayant C pour foyer et AB pour tangente au sommet.

2° La normale en M' passe par un point fixe C', et la tangente en ce point enveloppe une parabole.

La propriété du diamètre OM' peut s'établir comme suit :

Imprimons au quadrilatère OACB une translation mesurée par CO, puis une rotation de 90° autour de O; la droite AB, dans sa nouvelle position A'B', sera encore placée entre les axes Ox (ou Ox') et Oy (ou Oy'), et le point M occupera sur l'ellipse une position M' telle que OM' soit égale et perpendiculaire à la position primitive de CM.

D'après cela, la droite MM' marque sur deux droites fixes AB, A'B' des ponctuelles égales; il en résulte qu'elle enveloppe une parabole. M. Barisien a déterminé cette enveloppe par le calcul.

Question 1354.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 32).

On projette un point quelconque M *d'une ellipse en* N *et* P *sur les diamètres conjugués égaux. Démontrer que la normale en* M *passe au milieu* Q *de la distance* NP. (Steiner).

Trouver le lieu géométrique du point Q *lorsque* M *parcourt l'ellipse, ainsi que l'enveloppe de la droite* NP.

Solution par MM. Thonet et Jane. Prenons pour axes coordonnés les diamètres conjugués égaux : l'équation de l'ellipse sera

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées de M ; alors

$$\text{ON} = x_1 + y_1 \cos\theta, \quad \text{OP} = y_1 + x_1 \cos\theta, \tag{1}$$

θ étant l'angle des axes. Les coordonnées de Q seront

$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + y_1 \cos\theta), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + x_1 \cos\theta). \tag{2}$$

Le coefficient angulaire de la tangente en M étant $-\dfrac{x_1}{y_1}$, l'équation de la normale est

$$(y - y_1)(y_1 \cos\theta - x_1) - (x - x_1)(y_1 - x_1 \cos\theta) = 0 \tag{3}$$

Les valeurs (2) la réduisent à une identité.

Pour avoir le lieu de Q, il suffit d'éliminer x_1, y_1 entre les équations (2) et $x_1^2 + y_1^2 = a^2$; on trouve

$$(x - y\cos\theta)^2 + (y - x\cos\theta)^2 = \tfrac{1}{4} a^2 \sin^4\theta,$$

équation d'une ellipse concentrique à l'ellipse proposée.

L'équation de la droite NP étant mise sous la forme $ux + vy + 1 = 0$, u et v sont les coordonnées tangentielles de NP. On a

$$-\frac{1}{u} = x_1 + y_1 \cos\theta, \quad -\frac{1}{v} = y_1 + x_1 \cos\theta \tag{4}$$

En éliminant x_1, y_1 entre les équations (4) et $x_1^2 + y_1^2 = a^2$, on obtient l'équation *tangentielle*

$$(u\cos\theta - v)^2 + (v\cos\theta - u)^2 = u^2 v^2 a^2 \sin^4\theta.$$

On peut aussi trouver les équations paramétriques de l'enveloppe en coordonnées cartésiennes. En effet, l'équation de NP est

$$\frac{x}{x_1 + y_1\cos\theta} + \frac{y}{y_1 + x_1\cos\theta} - 1 = 0; \tag{5}$$

la condition $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ peut être remplacée par les formules $x_1 = a\cos\varphi$, $y_1 = a\sin\varphi$ où φ est un angle variable, de sorte que l'équation (5) devient

$$\frac{x}{\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta} + \frac{y}{\sin\varphi + \cos\varphi\cos\theta} = a. \tag{6}$$

En égalant à zéro la dérivée de (6) par rapport à φ et en tirant les valeurs de x et de y du résultat combiné avec (6) on obtient

$$x\sin^2\theta = a(\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta)^2(\cos\varphi - \sin\varphi\cos\theta),$$
$$y\sin^2\theta = a(\sin\varphi + \cos\varphi\cos\theta)^2(\sin\varphi - \cos\varphi\cos\theta).$$

Solution partielle analogue par M. Malengreau.

Solution par M. G. Verheugen. Prenons comme axes les axes de l'ellipse. Si x et y sont les coordonnées de M, on trouve aisément pour les coordonnées de P (X_1, Y_1), de N (X_2, Y_2) et de Q (X_3, Y_3) :

$$X_1 = \frac{a(ax + by)}{a^2 + b^2}, \quad Y_1 = \frac{b(ax + by)}{a^2 + b^2};$$

$$X_2 = \frac{a(ax - by)}{a^2 + b^2}, \quad Y_2 = \frac{b(by - ax)}{a^2 + b^2};$$

$$X_3 = \frac{a^2 x}{a^2 + b^2}, \qquad Y_3 = \frac{b^2 y}{a^2 + b^2}.$$

Le coefficient angulaire de MQ sera donc

$$\frac{Y_3 - y}{X_3 - x} = \frac{y(b^2 - a^2 - b^2)}{x(a^2 - a^2 - b^2)} = \frac{a^2 y}{b^2 x},$$

ce qui démontre le théorème.

Pour avoir le lieu décrit par Q (X_1, Y_1) il suffit d'éliminer x, y entre les trois équations

$$X = \frac{a^2 x}{a^2 + b^2}, \quad Y = \frac{b^2 y}{a^2 + b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

ce qui donne

$$\frac{X^2 (a^2 + b^2)^2}{a^6} + \frac{Y^2 (a^2 + b^2)^2}{b^6} = 1,$$

équation d'une ellipse concentrique à celle parcourue par M.

La droite NP ayant pour équation

$$Y - \frac{b^2 y}{a^2 + b^2} = \frac{x}{y}\left(X - \frac{a^2 x}{a^2 + b^2}\right)$$

les coordonnées tangentielles (u, v) de cette droite sont

$$u = -\frac{(a^2 + b^2)\, x}{a^2 x^2 - b^2 y^2}, \quad v = \frac{(a^2 + b^2)\, y}{a^2 x^2 - b^2 y^2}; \qquad (A)$$

d'où l'on tire successivement

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{b^2 u^2 + a^2 v^2}{v^2} = \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{y^2} = \frac{a^2 b^2}{y^2};$$

donc

$$y = \frac{abv}{\pm\sqrt{a^2 v^2 + b^2 u^2}}, \quad x = \frac{abu}{\mp\sqrt{a^2 v^2 + b^2 u^2}}.$$

Remplaçant ces valeurs dans l'une des équations (A), on aura l'équation tangentielle de l'enveloppe de NP,

$$a^2 b^2 (a^2 u^2 - b^2 v^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 (a^2 v^2 + b^2 u^2).$$

Note. MM. Barisien, Déprez et Rose ont résolu la même question. Nous extrayons de la solution de M. Déprez quelques remarques :

1° La projection du centre O de l'ellipse sur les droites NP décrit la sextique

$$(a^2 + b^2)^2 (x^2 + y^2)^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2) - a^2 b^2 (a^2 x^2 - b^2 y^2)^2 = 0.$$

2° Le théorème de Steiner admet la généralisation suivante :

Une circonférence quelconque passant par le centre O de l'ellipse et par un point M de la courbe coupe les diamètres conjugués égaux en M et P, les axes de symétrie en R et S ; si l'on désigne par α l'inclinaison de MN sur ON, les droites NP, RS se coupent en un point Q de la normale d'angle α menée à l'ellipse en M. Le point Q est le milieu de NP.

La solution de M. Barisien contient également des développements

intéressants : 1° Le point de contact de NP avec son enveloppe a pour coordonnées :

$$x = \frac{(2a^4 + b^4)\cos\varphi - (a^4 + b^4)\cos^5\varphi}{a(a^2 + b^2)},$$

$$y = \frac{(a^4 + 2b^4)\sin\varphi - (a^4 + b^4)\sin^5\varphi}{b(a^2 + b^2)};$$

elles sont de la forme

$$x = A\cos\varphi + B\cos^5\varphi, \quad y = A'\sin\varphi + B'\sin^5\varphi,$$

comme celles d'un point de la courbe de Talbot (antipodaire du centre d'une ellipse). L'aire de cette enveloppe est

$$\frac{\pi(a^8 + b^8 - 10\,a^4b^4)}{8ab(a^2 + b^2)^2}.$$

2° Si on projette un point M d'une ellipse sur deux droites fixes quelconques, en P et en N, le milieu de NP décrit une conique.

3° Soient, dans le cas de l'énoncé, N' et P' les points de rencontre des droites MN et MP avec le second des diamètres conjugués égaux; Q', le milieu de N'P'.

Les milieux des droites P'N', P'N, PN', PP', QQ', NN', MN, MN', MP', MQ, MQ' décrivent des ellipses, et les droites joignant deux de ces points milieux sont normales à des ellipses fixes. Etc.

×Question 1367.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 104.)

Si A, B, C *sont les angles d'un triangle, démontrer l'identité*

$$\Sigma\cos A\sin(B - C)\cos^2(\varphi - A)$$
$$= -\cos 2\varphi\sin(B - C)\sin(C - A)\sin(A - B).$$

(A. C.).

Solution par M. Emmerich. Désignons par P le premier membre. On a

$$P = \Sigma\cos A\sin(B - C)\frac{1 + \cos(2\varphi - 2A)}{2}.$$

Or, $\Sigma\cos A\sin(B - C) = 0$; donc

$$2P = \Sigma\cos A\sin(B - C)\cos(2\varphi - 2A)$$
$$= \cos 2\varphi\,\Sigma\cos A\sin(B - C)\cos 2A + \sin 2\varphi\,\Sigma\cos A\sin 2A\sin(B - C).$$

Le coefficient de sin 2φ a pour valeur

$$2\Sigma\cos^2 A\sin A\sin(B - C) = 2\Sigma(1 - \sin^2 A)\sin A\sin(B - C)$$
$$= 2\Sigma\sin A\sin(B - C) - 2\Sigma\sin^2 A\sin(B + C)\sin(B - C) = 0 - 0;$$

celui de $\cos 2\varphi$ peut prendre la forme

$$\Sigma \cos A \sin (B - C)(1 - 2\sin^2 A) =$$
$$\Sigma \cos A \sin (B - C) - \Sigma \sin 2A \sin (B + C) \sin (B - C)$$
$$= - \Sigma \sin 2A (\sin^2 B - \sin^2 C) = \tfrac{1}{2} \Sigma \sin 2A (\cos 2B - \cos 2C)$$
$$= \tfrac{1}{2} \Sigma \sin (2B - 2C).$$

Or, si trois angles α, β, γ ont une somme nulle,

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2};$$

en appliquant cette identité aux angles $2B - 2C$, $2C - 2A$, $2A - 2B$, on trouve

$$2P = - 2 \cos 2\varphi \sin (B - C) \sin (C - A) \sin (A - B).$$

L'identité proposée est donc démontrée.

MM. Malengreau, Audibert et Plakhovo, ont résolu la même question.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1062. Résoudre le système

$$ax + y + z + t = 1, \quad x + ay + z + t = a,$$
$$x + y + az + t = a^2, \quad x + y + z + at = a^3.$$

Cas d'indétermination ou d'impossibilité. (*J. de Vuibert.*)

1063. La tangente en un point quelconque M d'une circonférence O rencontre un diamètre fixe AA′ en T. La perpendiculaire élevée en T sur le diamètre AA′ rencontre la corde MA en M′. Démontrer que le point M′ décrit une hyperbole équilatère et que la tangente en ce point à l'hyperbole passe par la projection T′ de M sur AA′. (Petit-Bois.)

1064. Dans toute proportion, on peut remplacer le numérateur de chaque rapport par la moyenne arithmétique, géométrique ou harmonique des deux termes de ce rapport. (*J. de Vuibert.*)

1065. Démontrer que

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3(bcd + cda + dab + abc)$$

est divisible par $a + b + c + d$ et chercher le quotient. (*J. de Vuibert*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1383**. Résoudre l'équation

$$\cos 5x \cos^5 x + \sin 5x \sin^5 x = a.$$

(Déprez).

1384. Démontrer, par des considérations purement géométriques, que les centres isodynamiques d'un triangle et les foyers de la plus grande ellipse inscrite sont situés sur une même circonférence, et que les tangentes menées à celle-ci par les deux premiers points concourent sur le grand axe de l'ellipse. (E. Cesáro).

1385. Si x est un nombre impair ou une puissance de 2, l'équation

$$2(x+1)y - x^3 + y^3 = 0$$

est impossible en nombres entiers. (Paulmier).

1386. Soit le triangle ABC, coupée par la transversale A'B'C' harmoniquement associée au point M; A'', B'', C'', les symétriques de A, B, C, par rapport aux milieux respectifs des segments; B'C', A'C', A'B'. Démontrer les théorèmes suivants : 1° A'', B'', C'' sont situés sur une même ligne droite parallèle à la transversale réciproque $A_0B_0C_0$ de A'B'C'. 2° $B''C'' = B_0C_0$, $A''B'' = A_0B_0$, $A''C'' = A_0C_0$. 3° La distance du point de concours G des médianes de ABC à la droite A''B''C'' est double de la distance du même point à $A_0B_0C_0$. 4° Chercher les coordonnées du point d'intersection P de A'B'C' et de A''B''C'', et le lieu de P quand M varie. (A. Boutin).

×**1387**. Soient A', B', C' les pieds des bissectrices intérieures des angles d'un triangle ABC. Démontrer que le triangle A'B'C' peut être isoscèle sans que le triangle ABC soit isoscèle. (V. Cristesco.)

1388. Une courbe Δ étant rapportée à deux axes rectangulaires, soit M' le point où l'ordonnée MP d'un point quelconque M de Δ est rencontrée par la perpendiculaire élevée en O sur le rayon OM; le point M' décrit une seconde courbe Δ'. On demande de trouver la tangente en M', connaissant la tangente en M. (Petit-Bois).

Rectification. La question 1370, p. 128, est supprimée et sera remplacée par une autre.

SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ DES FIGURES SPHÉRIQUES;

par M. C. E. Wastrels*.

1. Soit S une figure quelconque tracée sur une sphère de centre O et de rayon R et proposons-nous de déterminer son centre de gravité G.

Circonscrivons à S une surface polyédrique P et soient U' l'aire de cette surface, G' son centre de gravité, Z' l'ordonnée normale de ce point par rapport à un plan quelconque xOy mené par O, u' l'aire d'une facette, z' l'ordonnée de son centre de gravité; on aura, S désignant un signe sommatoire,

$$U'Z' = S u'z'; \quad Z' = \frac{S u'z'}{U'}.$$

Si l'on suppose maintenant que le nombre des facettes augmente indéfiniment et qu'en même temps chacune d'elles décroisse indéfiniment en tous sens, on aura, en passant à la limite et en désignant respectivement par U l'aire de la figure S et par Z'' l'ordonnée de G,

$$Z'' = \frac{\lim S u'z'}{U},$$

ou encore

$$Z'' = \frac{\lim S u'z''}{U},$$

z'' étant l'ordonnée du point de contact de u'.

Projetons u' orthogonalement sur xOy; u'_1 représentant l'aire de la projection, on aura la proportion

$$u'_1 : u' = z'' : R; \quad \text{d'où} \quad u'z'' = u'_1 R.$$

(*) Plusieurs géomètres se sont occupés de cette question : citons spécialement Terquem (N. A. M., I, 278-280) et Schellbach (*Crelle*, XLV, 279-282), qui sont arrivés, par des méthodes différentes, à plusieurs propriétés remarquables relatives au centre de gravité des figures sphériques.

La démonstration des formules fondamentales (n° 1 du présent article) est, quant au fond, celle de Terquem; nous avons cru bien faire de la reproduire ici, afin de présenter aux lecteurs de *Mathesis* une théorie complète sur la matière.

Par suite, il vient

$$Z'' = \frac{\lim Su'_z R}{U} = \frac{R \lim Su'_z}{U},$$

ou

$$Z'' = \frac{R \lim U'_z}{U} = \frac{RU_z}{U},$$

U'_z et U_z étant respectivement la projection de U' et celle de U sur xOy.

Si l'on prend encore les moments par rapport à deux autres plans yOz et zOx, on aura pareillement, en employant des notations analogues aux précédentes,

$$X'' = \frac{RU_x}{U},$$

$$Y'' = \frac{RU_y}{U}.$$

Ces deux équations, jointes à

$$Z'' = \frac{RU_z}{U},$$

déterminent la position du centre de gravité G.

3. Cela étant, soit $Ox_1y_1z_1$ le trièdre polaire de $Oxyz$. Si X, Y, Z représentent les coordonnées de G par rapport à $Oxyz$ et U_{x_1}, U_{y_1}, U_{z_1} les aires des projections (coordonnées) de S par rapport au trièdre polaire, on voit sans peine que

$$Z'' = Z \cos zOz_1 \quad \text{et} \quad U_z = U_{z_1} \cos zOz_1;$$

par suite, on peut écrire

$$Z \cos zOz_1 = \frac{RU_{z_1} \cos zOz_1}{U},$$

ou

$$Z = \frac{RU_{z_1}}{U}.$$

On aura de même

$$X = \frac{RU_{x_1}}{U}$$

et

$$Y = \frac{RU_{y_1}}{U}.$$

Ces formules mettent en évidence la propriété suivante :

Les coordonnées du centre de gravité d'une figure sphérique par rapport à un trièdre quelconque ayant son sommet au centre de la

sphère sont proportionnelles aux projections-coordonnées de cette figure par rapport au trièdre polaire.

On retrouve ainsi le théorème de SCHELLBACH (*Crelle*, 1853, tome 45, pp. 279-282).

3. COROLLAIRE. Si les axes $Oxyz$ sont rectangulaires, ils coïncident avec $Ox_1y_1z_1$ et, par suite, on voit que *les coordonnées rectangulaires du centre de gravité d'une figure sphérique sont proportionnelles aux projections orthogonales de cette figure sur les plans coordonnés correspondants.*

4. Supposons que la figure S soit un polygone sphérique formé d'arcs de grand cercle a, b, c, ...; construisons la figure polaire $A_1B_1C_1$ ..., A_1, B_1, C_1, ... étant respectivement les pôles des côtés a, b, c, ... et portons sur les rayons OA_1, OB_1, OC_1, ... des longueurs OA', OB', OC', ... égales à $\frac{kRa}{2}$, $\frac{kRb}{2}$, $\frac{kRc}{2}$, ... (k sera déterminé dans la suite).

Or, on sait que U_z vaut la somme des projections algébriques des secteurs circulaires répondant aux arcs a, b, c, ... sur le plan Oxy; kU_z vaut donc k fois cette somme, ou, ce qui revient au même, la somme des projections de OA', OB', OC', ... sur l'axe Oz_1.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées de A' par rapport aux axes $Oxyz$, et par ξ_1, η_1, ζ_1, les projections orthogonales de OA' sur O_{x_1}, O_{y_1}, O_{z_1}. On aura

$$\zeta_1 = \zeta \cos zOz_1.$$

Par suite

$$kU_z = S\zeta_1 = S\zeta \cos zOz_1.$$

La formule

$$Z \cos zOz_1 = \frac{RU_z}{U}$$

peut donc s'écrire

$$Z \cos zOz_1 = \frac{R \cos zOz_1 \times S\zeta}{kU},$$

ou

$$Z = \frac{RS\zeta}{kU}.$$

On aura pareillement

$$X = \frac{RS\xi}{kU},$$

$$Y = \frac{RS\eta}{kU}.$$

Si n désigne le nombre des côtés du polygone S, déterminons k par la relation

$$\frac{R}{kU}=\frac{1}{n};\quad \text{d'où}\quad k=\frac{Rn}{U}.$$

Dans ce cas, les formules précédentes deviennent

$$X=\frac{S\xi}{n},\quad Y=\frac{S\eta}{n},\quad Z=\frac{S\zeta}{n}.$$

Or, ces formules sont précisément celles qui déterminent le centre des moyennes distances des points A′, B′, C′,....

Observons que les longueurs OA′, OB′, OC′,... valent

$$\frac{R^2n}{2U}a,\quad \frac{R^2n}{2U}b,\quad \frac{R^2n}{2U}c,....$$

De là résulte le théorème suivant :

Si l'on construit la figure polaire $A_1B_1C_1$.... *d'un polygone sphérique* S *de n côtés et que, sur les rayons* OA_1, OB_1, OC_1,... *respectivement perpendiculaires aux côtés* a, b, c,.... *de* S, *on porte des longueurs* OA′, OB′, OC′,... *égales à* λa, λb, λc.... $\left(\lambda=\frac{R^2n}{2U}\right)$, *le centre de gravité du polygone sphérique coïncidera avec le centre des moyennes distances des points* A′, B′, C′,....

5. Si la figure S est un triangle sphérique ABC, on peut conclure du théorème qui précède que son centre de gravité coïncide avec celui du triangle rectiligne A′B′C′ (On a ici $\lambda=\frac{3R^2}{2U}$, ou $\lambda=\frac{3R^2}{\pi R^2\cdot 2E}=\frac{3}{2\pi E}$, 2E désignant l'excès sphérique de ABC).

Le théorème du n° 2 se met sous une forme très simple si l'on prend pour axes coordonnés les droites OA′, OB′, OC′; le trièdre polaire $Ox_1y_1z_1$ n'est donc autre chose que le trièdre OABC.

Les projections de S dont il est question dans ce théorème sont précisément les secteurs circulaires OBC, OCA, OAB; elles sont donc proportionnelles aux côtés a, b, c.

Par conséquent, *les coordonnées du centre de gravité d'un triangle sphérique par rapport au trièdre déterminé par le triangle polaire sont proportionnelles aux côtés du triangle donné.*

Cette propriété a été également signalée par Schellbach dans l'article cité. (*A continuer.*)

SUR LE COMPLEXE DE GRASSMANN;

par M. J. Neuberg.

1. La génération des courbes planes du troisième degré (ordre ou classe) par la méthode de Grassmann (*Mathesis*, pp. 153-159) a son analogie dans la géométrie réglée. On rencontre ici un complexe que je propose d'appeler *complexe* de Grassmann.

Avant d'entrer en matière, il n'est peut-être pas inutile de rappeler brièvement les premières notions de la géométrie de Plucker.

Une droite, pour être déterminée dans l'espace, exige quatre conditions; c'est pourquoi on dit que l'espace contient ∞^4 droites, et que la géométrie réglée est à quatre dimensions.

Les droites qui satisfont à une condition commune, sont dites former un complexe; elles sont au nombre de ∞^3. Le *degré d'un complexe* algébrique est l'ordre du cône formé par les droites du complexe qui passent par un même point; un tel cône est appelé *cône du complexe*. Le degré, comme il est facile de le voir, est aussi égal à la classe de l'enveloppe des droites du complexe qui sont situées dans un même plan; cette enveloppe prend le nom de *courbe du complexe*.

Il peut arriver que toutes les droites passant par un point donné ou que toutes les droites situées dans un plan donné fassent partie du complexe; un tel point est un *point principal*, et un tel plan est un *plan principal*.

On appelle *congruence* la totalité des droites qui satisfont à deux conditions communes; ces éléments sont au nombre de ∞^2. L'ensemble des droites qui appartiennent à la fois à deux complexes constitue une congruence.

2. Soient donnés deux trièdres quelconques SABC, S'A'B'C'; leurs arêtes seront désignées par a, b, c, a', b', c' et leurs faces par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. Proposons-nous d'étudier le complexe des droites u qui rencontrent les plans α', β', γ' en des points 1', 2', 3' tels que les plans $a1'$, $b2'$, $c3'$ se coupent suivant une même droite v.

Menons par u un plan quelconque π, qui coupe les trièdres S, S' suivant deux triangles, que nous supposons être ABC, A'B'C'. Alors les traces, sur π, des plans $a1'$, $b2'$, $c3'$ sont les droites A1', B2', C3', elles concourent en un même point V, trace de la droite v. Le point V,

d'après le théorème de Grassmann, décrit une cubique Σ passant par A, B, C, A′, B′, C′, et par les points (BC, B′C′), (CA, C′A′), (AB, A′B′), (BC′, B′C), (CA′, C′A), (AB′, A′B); la droite u enveloppe une courbe Σ′ de la troisième classe qui touche les côtés des deux triangles ABC, A′B′C′ et les droites AA′, BB′, CC′, [(AB, B′C′), (A′B′, BC)], etc. On en conclut que le complexe de Grassmann est du troisième degré, et que toute droite située dans une face de l'un des trièdres S, S′ appartient au complexe, de sorte que $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ sont des plans principaux.

Le droite u coupe BC, CA, AB en des points 1, 2, 3. Comme les points 1, 1′, 2, 2′, 3, 3′ sont les intersections des côtés du quadrangle ABCV avec une même transversale, les couples 11′, 22′, 33′ sont en involution. Il en résulte que les droites A′1, B′2, C′3 concourent en un même point V′, ou que les plans $a'1$, $b'2$, $c'3$ se coupent suivant une même droite S′V′. Par conséquent, dans notre première définition du complexe, on peut intervertir les rôles des deux trièdres S, S′.

A une même droite v menée par S correspondent une infinité de droites u; celles-ci sont les génératrices d'un hyperboloïde. En effet, les trois plans av, bv, cv coupent respectivement les plans α', β', γ' suivant trois droites m, n, p (qui s'appuient sur v); on peut prendre pour u l'une quelconque des droites s'appuyant sur m, n, p.

Toute droite v' menée par S′ fait partie du complexe; car les plans $a1'$, $b2'$, $c3'$ se coupent maintenant suivant la droite SS′; par analogie, toute droite menée par S est une droite du complexe. Les points S, S′ sont donc des points principaux. Nous rencontrerons plus loin d'autres points principaux.

3. Le complexe de Grassmann peut encore être défini comme l'ensemble des droites u qui rencontrent les couples de plans $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ en trois couples de points 11′, 22′, 33′ d'une involution.

Cette seconde définition assigne un rôle symétrique aux deux trièdres S, S′ et montre que la première définition, appliquée aux couples de trièdres $(\alpha'\beta\gamma, \alpha\beta'\gamma')$, $(\alpha\beta'\gamma, \alpha'\beta\gamma')$, $(\alpha\beta\gamma', \alpha'\beta'\gamma)$, conduit au même complexe.

Examinons maintenant les cas où quelques-uns des points désignés par 1, 1′, 2, 2′, 3, 3′ ne sont pas distincts ou sont indéterminés.

Une droite quelconque du plan α rencontre généralement les autres plans α', β'... en des points déterminés et distincts; on peut prendre pour

le point 1 le conjugué de 1′ dans l'involution (22′, 33′); il résulte de là que α est un plan principal du complexe. Par analogie, les plans α', β, β', γ, γ' sont également des plans principaux.

Le cône du complexe qui a pour sommet un point M de la droite $\alpha\alpha'$, comprend les droites menées par M dans les plans α, α'; comme il est du troisième ordre, les autres droites du complexe passant par M sont également situées dans un même plan α''. Effectivement, les deux points 1, 1′ étant réunis, M est un point double de l'involution (22′, 33′) et a le même conjugué harmonique M′ par rapport aux deux couples 22′, 33′. Le point M′ se trouve donc à la fois dans les plans polaires de M par rapport aux deux dièdres $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$; ces plans polaires se coupent suivant une droite a''. Toute droite menée par M et s'appuyant sur a'' appartient au complexe.

Lorsque M parcourt la droite $\alpha\alpha'$, ses plans polaires par rapport aux dièdres $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ se correspondent dans deux faisceaux qui sont projectifs avec la ponctuelle (M); la droite a'', qui engendre un hyperboloïde, marque sur les droites $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ des ponctuelles projectives avec la ponctuelle (M). On en conclut que le plan α'' oscule une cubique gauche.

Soit N un point quelconque de la droite $\alpha\beta$. Pour une droite u du complexe qui passe par N, les points 1 et 2 sont confondus; il s'ensuit que les points 1′ et 2′ sont également confondus, et que u s'appuie sur la droite $\alpha'\beta'$. Le cône du complexe de sommet N se compose donc des trois plans α, β, (N, $\alpha'\beta'$). Les droites s'appuyant à la fois sur les deux droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, forment donc une congruence appartenant au complexe.

Toute droite menée par le point $\alpha\beta\gamma$ fait partie du complexe, car les points 1, 2, 3 étant réunis, on a une involution décomposable (11′, 22′, 33′). Il résulte de là que les points

$$\alpha\beta\gamma,\ \alpha'\beta'\gamma',\ \alpha'\beta\gamma,\ \alpha\beta'\gamma',\ \alpha\beta'\gamma,\ \alpha'\beta\gamma,\ \alpha\beta\gamma',\ \alpha'\beta'\gamma$$

sont des points principaux du complexe.

Le cône du complexe de sommet $\alpha\alpha'\beta$ comprend toutes les droites menées par ce sommet dans l'un des trois plans α, α', β; il n'en renferme pas d'autres, puisque les points 1, 1′, 2 seraient réunis, et différents de 2′, 3, 3′.

4. Le complexe de Grassmann est un cas particulier du complexe des droites qui sont coupées par trois quadriques en trois couples de points d'une même involution. Nous allons chercher, en employant les notations symboliques d'Aronhold, l'équation de ce complexe plus général.

Si x_1, x_2, x_3, x_4 désignent des coordonnées tétraédriques, soient

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0, \quad c_x^2 = 0,$$

les équations des trois quadriques. Représentons par (y_1, y_2, y_3, y_4), (z_1, z_2, z_3, z_4) les coordonnées de deux points X, Y d'une droite u; celles d'un troisième point de u seront $(my_1 + nz_1, \ldots)$. Les valeurs du rapport $m : n$ qui conviennent aux points de rencontre de u avec les quadriques, résultent des équations

$$a_{my+nz}^2 = 0, \quad b_{my+nz}^2 = 0, \quad c_{my+nz}^2 = 0$$

ou

$$m^2 a_y^2 + 2mna_y a_z + n^2 a_z^2 = 0,$$
$$m^2 b_y^2 + 2mnb_y b_z + n^2 b_z^2 = 0,$$
$$m^2 c_y^2 + 2mnc_y c_z + n^2 c_z^2 = 0.$$

Pour que les six points de rencontre soient en involution, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} a_y^2 & a_y a_z & a_z^2 \\ b_y^2 & b_y b_z & b_z^2 \\ c_y^2 & c_y c_z & c_z^2 \end{vmatrix} = 0,$$

équation qu'on peut écrire

$$(a_y b_z - a_z b_y)(b_y c_z - b_z c_y)(c_y a_z - c_z a_y) = 0.$$

Le facteur symbolique $a_y b_z - a_z b_y$ est égal au produit des systèmes rectangulaires

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & z_1 & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix},$$

ou égal à

$$\Sigma \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_3 & u_4 \\ v_3 & v_4 \end{vmatrix},$$

ou enfin égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix},$$

si l'on considère la droite u comme intersection de deux plans $u_x = 0$, $v_x = 0$. L'équation symbolique du complexe est donc

$$| a_1 \quad b_1 \quad u_1 \quad v_1 | \cdot | b_1 \quad c_1 \quad u_1 \quad v_1 | \cdot | c_1 \quad a_1 \quad u_1 \quad v_1 | = 0.$$

Soient

$$a_x = 0, \quad a'_x = 0, \quad b_x = 0, \quad b'_x = 0, \quad c_x = 0, \quad c'_x = 0,$$

les équations des plans α, α', β, β', γ, γ'. L'équation du complexe de Grassmann est

$$\begin{vmatrix} a_x a'_y & a_y a'_z + a'_y a_z & a_z a'_z \\ b_y b'_y & b_y b'_z + b'_y b_z & b_z b'_z \\ c_y c'_y & c_y c'_z + c'_y c_z & c_z c'_z \end{vmatrix} = 0;$$

ou

$$(a_y b'_z - a_z b'_y)(b_y c'_z - b_z c'_y)(c_y a'_z - c_z a'_y) + (a'_y b_z - a'_z b_y)(b'_y c_z - b'_z c_y)(c'_y a_z - c'_z a_y) = 0.$$

5. Etant donnés deux triangles quelconques ABC, A'B'C', non situés dans un même plan, on peut étudier le complexe des droites u, telles que les couples de plans (uA, uA'), (uB, uB'), (uC, uC') soient en involution.

Qu'il nous suffise d'indiquer ici ce second complexe.

BIBLIOGRAPHIE.

Compte rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens, tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Procès-verbaux et communications, publiés par E. Duporcq, Ingénieur des Télégraphes, Secrétaire général du Congrès. Paris, Gauthier-Villars, 1902 (gr. in-8° de 455 p. avec figures). Prix : 16 fr.

Le deuxième Congrès international des mathématiciens s'est tenu à Paris du 6 au 12 août 1900.

On trouvera ci-après, dans la Table des Matières, l'exposé des séances, conférences et communications, par lequel le lecteur se rendra compte aisément de l'importance et de l'étendue des questions traitées par chacun des auteurs. Nous publierons plus tard plusieurs extraits de ce volume.

Table des matières. I. Documents et procès-verbaux. Bureau du Congrès. Bureaux des Sections. Délégués officiels. Liste générale des Membres du Congrès. Emploi du temps. Compte rendu résumé du Congrès. Procès-verbaux. II. Conférences et Communications. *Conférences.* Sur l'historiographie des Mathématiques, par M. Cantor. Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'Analyse, par V. Volterra.

Sur les problèmes futurs des Mathématiques, par D. Hilbert. Du rôle de l'intuition et de la logique en Mathématiques, par H. Poincaré. Une page de la vie de Weierstrass, par G. Mittag-Leffler. *Communications.* I. *Arithmétique et Algèbre.* Sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire quaternaire régulier, par L. Autonne. Remarks on Kronecker's modular systems, by Harris Hancock. Sur la distribution des nombres premiers, par Helge von Koch. Sur le covariant résolvant de la forme binaire du cinquième ordre, par R. Perrin. The known systems of simple groups and their inter-isomorphism, by L.-E. Dickson. A method of computing the common logarithm of a number without making use of any logarithm but that of some power of 10, by A. Martin. A rigorous method of finding biquadrate numbers whose sum is a biquadrate, by A. Martin. Un nouveau système irréductible de postulats pour l'Algèbre, par Al. Padoa. Aperçu sur les développements récents de la théorie des fractions continues, par H. Padé. II. *Analyse.* Sur l'évanouissement des fonctions Θ de plusieurs variables, par Tikhomandritzky. Sur une extension de la série de Taylor, par Mittag-Leffler. Remarques relatives à la Communication de M. Mittag-Leffler, par E. Borel. Nouveaux systèmes orthogonaux pour les dérivées des fonctions Θ de deux arguments, par E. Jahnke. Sur les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles du second ordre, par J. Drach. III. *Géométrie.* Sur les transformations de contact entre les lignes droites et les sphères, par E.-O. Lovett. Sur les corps réguliers et semi-réguliers, par F.-J. Vaes. Application of space-analysis to curvilinear coordinates, by Prof. Al. Macfarlane. Coup d'œil sur les courbes algébriques au point de vue de la gonalité, par F. Amodeo. Orthogonal transformations in elliptic, or in hyperbolic space, by Irving Stringham. Sur le théorème de M. Salmon, concernant les cubiques planes, par V. Jamet. Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne, par A. Padoa. IV. *Mécanique.* Remarques sur le calcul des perturbations spéciales des petites planètes, par J. Boccardi. Sur les équations aux dérivées partielles, à caractéristiques réelles, par J. Hadamard. Sur les équations aux dérivées partielles, par V. Volterra. V. *Bibliographie et Histoire.* Note on the Mathematics of the old Japanese School, by R. Fujisawa. Les Mathématiques et la Biologie, par A. Gallardo. VI. *Enseignement et Méthodes.* Note sur la critique mathématique, par Z. G. de Galdeano. Le iperaritmetiche e l'indirizzo combinatorio dell'aritmetica ordinaria, par A. Capelli. Sur les divers modes d'application de la méthode graphique à l'art du calcul. Calcul graphique et calcul nomographique, par M. d'Ocagne. Sur l'utilité de la publication de certains renseignements bibliographiques en mathématiques, par Ed. Maillet. Sur la langue internationale auxiliaire de M. le Dr Zamenhof, connue sous le nom d'*Esperanto*, par Ch. Méray. Les postulats de la Géometrie dans l'enseignement, par G. Veronese.

Éléments de la théorie des fonctions Elliptiques, par J. TANNERY, Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure, et J. MOLK, Professeur à l'Université de Nancy. Tome IV : *Calcul intégral* (II[e] Partie) *et Applications*. Paris, Gauthier-Villars, 1902. (Gr. in-8° de IX-303 p.) Prix : 9 fr.

Sommaire. **Inversion** (suite). — CHAP. IX. *Évaluation des intégrales des différentielles* $(dz : Fz)$, *où* $(Fz)^2 = Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E$ *prises le long d'un chemin quelconque, dans le cas où* A, B, C, D, E *sont réels.* Évaluation des intégrales des différentielles $(dy : fy)$, où $(fy)^2 = 4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)$, prises le long d'un chemin quelconque, dans le cas où e_1, e_2, e_3 sont réels. Evaluation des intégrales de la même forme, prises le long d'un chemin quelconque, dans le cas où e_2 est un nombre réel et où e_1, e_3 sont des nombres imaginaires conjugués. Substitutions linéaires permettant de transformer ces deux intégrales l'une dans l'autre. Cas où A est nul. Cas où A n'est pas nul. Réduction à la forme de Legendre. Substitution quadratique. — CHAP. X. *Intégrales elliptiques.* Evaluation des intégrales elliptiques. Réduction de Legendre. Notations de Jacobi. Notations de Weierstrass. — CHAP. XI. *Substitutions birationnelles de Weierstrass.* — *Intégration de l'équation différentielle elliptique.* — CHAP. XII. *Équations aux dérivées partielles.* Tableau des formules du Calcul intégral. NOTE. Détermination de la fonction inverse de $p\,u$. — **Premières applications des fonctions elliptiques.** — CHAP. I. *Premières applications à la Géométrie et à la Mécanique.* Longueur d'un arc d'ellipse. Longueur d'un arc de lemniscate. Aire de l'ellipsoïde. Pendule simple. Pendule sphérique. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe dans le cas où il n'y a pas de force extérieure. — CHAP. II. *Premières applications à l'Algèbre et à l'Arithmétique.* Division des périodes par un nombre entier. Equations modulaires. Problème de la transformation. Division des périodes par 3. Equation modulaire correspondante. Division des périodes par 5. Equation modulaire correspondante. Division d'une boucle de lemniscate en 3, 4 ou 5 parties égales. Division de l'argument. Multiplication complexe. Décomposition d'un nombre entier en une somme de quatre carrés. NOTES. Sur la fonction du module définie par l'égalité qui donne le rapport des périodes en fonction de ce module et sur un théorème de M. Picard. Sur les suites arithmético géométriques de Gauss. Sur les covariants H et T d'une forme biquadratique. Sur une transformation du second ordre qui relie les deux cas où les invariants sont réels. Sur le sens de la variation des fonctions thêta pour des valeurs réelles de l'argument dans le cas normal. *Lettre de Ch. Hermite à M. Jules Tannery.* Introduction à cette Lettre. Lettre de Charles Hermite.

Le tome IV des *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* de MM. Tannery et Molk termine cet ouvrage, où non seulement les aspirants au doctorat, mais aussi les professeurs trouveront tout ce qu'il faut savoir, et même plus, pour étudier les recherches d'Abel, de Jacobi, de Weierstrass, de Hermite et de Kronecker.

E. Cesàro. **Lezioni di Geometria intrinseca**, Naples, 1896. Chez l'**auteur**, à l'Université de Naples (264 pages in-8°). Prix : 8 francs (Dédié à **MM.** P. Mansion et J. Neuberg).

E. Cesàro. **Vorlesungen über natürliche Geometrie**. Autorisirte **deutsche** Ausgabe von Dr Kowalewsky, Privat Dozent an der Universität zu **Leipzig**. Leipzig, Teubner, 1901 (VIII — 341 pages in 8°, cartonné). Prix : 12 **marcs** (Dédié au professeur Cerruti, de l'Université de Rome).

Pour étudier une figure géométrique (courbe, surface, congruence ou **complexe** de droites, etc.), on peut la rapporter soit à des axes fixes, à la **manière** de Descartes, soit à des axes mobiles. S'agit-il, par exemple, d'étudier, **par la** seconde méthode, une courbe de l'espace ? On considérera le trièdre $Oxyz$ **formé** par la tangente Ox, la normale principale Oy et la binormale Oz en un **point** variable O de la courbe, et l'on définira, par rapport à ces axes, les **éléments** infinitésimaux de la courbe relatifs au point O. Les relations entre ces éléments, c'est-à-dire les propriétés *intrinsèques* de la courbe, s'obtiendront **bien** plus facilement par cette méthode que par l'emploi d'axes fixes. De là le nom de *Géométrie intrinsèque*, donné par M. Cesàro à la méthode fondée sur l'**emploi** d'un trièdre mobile.

M. Darboux a fait de la Géométrie intrinsèque, dès 1867, dans un **cours** professé au Collège de France, et il a montré toute la fécondité de la **méthode** dans ses admirables *Leçons sur la théorie des surfaces* (4 vol. in-8° ; 1887-1896).

D'un autre côté, Ribaucour s'est servi de la méthode du trièdre mobile **dans** son *Mémoire sur les Elassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* couronné, **en** 1880, par l'Académie royale de Belgique et antérieurement dans son *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* couronné, en 1876, par l'Académie des Sciences de Paris et publié seulement en 1891, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Entré plus tard dans la carrière, M. Cesàro s'est montré fervent adepte de nouvelle méthode à une époque où elle n'avait guère reçu de publicité par l'impression, et il lui a consacré de nombreux mémoires. Le savant géomètre italien était donc particulièrement qualifié pour composer un ouvrage d'ensemble sur ce sujet. Les *Lezioni di Geometria intrinseca* renferment une exposition de la méthode du trièdre mobile et, comme applications, de nombreux travaux personnels de l'auteur et la démonstration des principaux résultats acquis à la Science dans l'étude des courbes, des surfaces et des congruences de droites. On sait les qualités éminentes dont M. Cesàro fait preuve dans ses ouvrages didactiques (*Analisi algebrica, Calcolo infinitesimale*, etc.). Les mêmes qualités se retrouvent dans la *Geometria intrinseca* et il serait superflu d'y insister.

Ce n'est pas en quelques lignes qu'on peut analyser un ouvrage aussi riche en développements intéressants que la *Geometria intrinseca* : aussi, me bornerai-je à donner les titres des dix-sept chapitres dont il se compose et des trois Notes qui le terminent :

I. Discussion intrinsèque des courbes planes. II. Formules fondamentales pour l'analyse intrinsèque des courbes planes. III. Courbes planes remarquables. IV. Contact et osculation. V. Les roulettes. VI. Les barycentres. VII. Analyse barycentrique. VIII. Systèmes de courbes planes. IX. Courbes gauches et surfaces réglées. X. Courbes gauches remarquables. XI. Théorie générale des surfaces. XII. Exercices sur les surfaces. XIII. Déformation infiniment petite des surfaces. XIV. Les congruences. XV. Les espaces à trois dimensions. XVI. Les courbes dans l'hyperespace. XVII. Les hyperespaces. *Notes.* I. Sur l'usage des nombres de Grassmann. II. Sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible. III. Sur les équations de l'élasticité dans les hyperespaces.

Puissent les lignes qui précèdent inspirer à nos jeunes géomètres le désir de lire l'ouvrage de M. Cesàro. Ils y puiseront une vive admiration pour la théorie du trièdre mobile et acquerront un instrument puissant qui leur permettra, j'en exprime l'espoir, d'apporter leur contribution aux théories si belles et déjà si riches de la Géométrie infinitésimale. A. Demoulin.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1851.

(Voir *Mathesis* (3), II, p. 32.)

Soient A, B, C *trois circonférences qui se touchent extérieurement deux à deux et telles qu'une tangente commune extérieure aux cercles* A *et* B *soit parallèle à une tangente commune extérieure aux cercles* A *et* C, *Démontrer qu'une tangente commune extérieure aux cercles* B *et* C, *limitée aux points de contact, est égale au rayon du cercle* A.

Déduire de là une solution du problème de Malfatti lorsque deux côtés du triangle fondamental deviennent parallèles. (E. N. Barisien).

Solution par M. Emmerich. 1° Soient a, b, c les rayons et x, y, z les tangentes communes extérieures des cercles, chacune limitée aux points de contact; la tangente y de A et C est supposée parallèle à la tangente z de A et B. On a

$$a^2 = (b+c)^2 - (b-c)^2 = 4bc;$$

de même

$$y^2 = 4ca,\ z^2 = 4ab.$$

Le triangle rectangle sur l'hypoténuse BC dont un côté est parallèle, l'autre perpendiculaire à y et z, donne successivement

$$(y-z)^2 + (2a-b-c)^2 = (b+c)^2,$$

$$4a^2 - 2yz = 4a(b+c) - y^2 - z^2 = 0,$$

$$4a^2 - y^2z^2 = 16a^2bc, \quad \text{donc} \quad a^2 = 4bc = x^2,\ x = a,$$

2° Soient B′, C′ les points de contact de x que nous supposons d'abord situés entre les parallèles données, et prolongeons B′C′, qui rencontre y et z respectivement en M et L.

En posant $LM = p$, $LB' = t$, $MC' = u$, on déduit, des triangles semblables LBB′, CMC′ :

$$t : b = c : u, \quad \text{donc} \quad tu = \tfrac{1}{4} a^2 ;$$

D étant le milieu de B′C′, on a aussi

$$LD.MD = (t + \tfrac{1}{2} a)(u + \tfrac{1}{2} a) = \tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{2} a (t + u) = \tfrac{1}{2} pa.$$

Or, $\frac{1}{2} pa$ représente l'aire du triangle rectangle LMN formé par LM et par les bissectrices des angles L et M ; de plus, le cercle inscrit à ce triangle et le cercle exinscrit dans l'angle LN′M touchent LM en deux points D, D_1 qui répondent à la condition $LD.MD = \frac{1}{2} pa$, car

$$LD.MD = LD_1.MD_1 = \tfrac{1}{4} (p + LN - MN)(p - LN + MN)$$
$$= \tfrac{1}{2} LN.MN = \tfrac{1}{2} pa.$$

On connaît donc successivement les points D, B′, C′, B, C, A. De là deux solutions, suivant qu'on part de D ou de D_1 ; dans la première, les trois cercles sont situés du même côté de LM ; dans la seconde, la droite LM est traversée par la circonférence A_1.

Les points D_2, D_3 où les deux autres cercles tritangents du triangle LMN touchent les prolongements de LM et ML respectivement répondent aussi à la condition $LD.MD = \frac{1}{2} pa$; car

$$LD_2.MD_2 = LD_3.MD_3 = \tfrac{1}{4} (p + LN + MN)(- p + LN + MN)$$
$$= \tfrac{1}{2} LN.MN = \tfrac{1}{2} pa.$$

Ces points donnent deux autres solutions qui se construisent de la même manière que les précédentes. Car si le cercle B touche, p. ex., le prolongement de LM en B_2' tandis que le cercle C touche LM en C_2', on a, en désignant le milieu de $B_2'C_2'$ par D_2 :

$$LD_2.MD_2 = (LB_2' - \tfrac{1}{2} a)(\tfrac{1}{2} a - MC_2') = \tfrac{1}{2} a (LB_2' + MC_2' - a) = \tfrac{1}{2} pa.$$

La droite LM est traversée par les circonférences A_2 et A_3.

Solution analogue par M. François (La Haye).

Note. M. Déprez résout la même question en se servant de la trigonométrie, et ajoute les développements suivants :

Soient DE un diamètre fixe d'un cercle A, DD_1 et EE_1 les tangentes en ses extrémités. On construit deux cercles variables B, C qui se touchent mutuellement en A_1, touchent le cercle A respectivement en B_1 et C_1 et les droites DD_1, EE_1 aux points D_1, E_1.

1. Les centres B, C décrivent deux paraboles ayant même foyer A et pour tangente au sommet respectivement DD_1 et EE_1.

2. Le centre O du cercle inscrit au triangle ABC décrit une ellipse ayant pour axe DE; le second axe $= \frac{3DE}{2\sqrt{2}}$.

3. La droite B_1C_1 enveloppe une ellipse dont un axe est DE; l'autre axe vaut $\frac{2DE\sqrt{2}}{3}$.

4. La droite AA_1 est perpendiculaire sur D_1E_1.

5. La droite D_1E_1 enveloppe une ellipse ayant pour axe DE; le second axe $= DE\sqrt{2}$.

A_1 parcourt la podaire de A par rapport à cette ellipse.

6. L'enveloppe du cercle inscrit du triangle ABC est une quartique ayant pour équation

$$2(x^2+y^2+r^2)^2 = r^2(8x^2+9y^2).$$

7. Entre les rayons r_a, r_b, r_c des cercles exinscrits au triangle ABC, on a la relation $4r_a^2 = r_b r_c$. (J. DÉPREZ).

Question 1355.

(Voir *Mathesis*, (3), t. II, p. 32.)

Deux coniques U, U' ***touchent les côtés d'un triangle*** ABC, ***la première en*** M, N, P, ***la seconde en*** M', N', P'. ***Soient*** A', B', C' ***les points d'intersection des côtés homologues des triangles*** MNP, M'N'P'. ***Démontrer que le triangle*** A'B'C' ***est circonscrit au triangle*** ABC ***et est autopolaire par rapport aux deux coniques*** U, U'; ***la quatrième tangente commune à ces courbes est l'axe d'homologie de ces triangles.***

Conclure de là que le cercle inscrit et les deux coniques touchant les côtés du triangle ABC ***soit aux pieds des hauteurs, soit aux pieds des bissectrices intérieures ont une quatrième tangente commune.***

Solution par M. G. VERHEUGEN (Gand). Soit ABC le triangle de référence et soient

$$\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}=0, \quad \sqrt{l'\alpha}+\sqrt{m'\beta}+\sqrt{n'\gamma}=0$$

les équations des coniques U et U' par rapport à ce triangle. Les côtés NP, MP, MN du triangle MNP auront respectivement pour équations

$$-l\alpha+m\beta+n\gamma=0, \quad l\alpha-m\beta+n\gamma=0, \quad l\alpha+m\beta-n\gamma=0.$$

Les équations des côtés N'P', M'P', M'N' du triangle N'P'M' sont

$$-l'\alpha+m'\beta+n'\gamma=0, \quad l'\alpha-m'\beta+n'\gamma=0,$$
$$l'\alpha+m'\beta-n'\gamma=0.$$

Cela étant, soient P, Q, R les mineurs respectivement des éléments p, q, r du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & q & r \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = Pp + Qq + Rr,$$

de sorte que

$$Pl + Qm + Rn = 0, \quad Pl' + Qm' + Rn' = 0. \tag{I}$$

Des équations des droites NP et N'P',... on conclut que les points A', B', C' vérifient respectivement les équations

$$\frac{\alpha}{P} = -\frac{\beta}{Q} = -\frac{\gamma}{R}, \quad -\frac{\alpha}{P} = \frac{\beta}{Q} = -\frac{\gamma}{R}, \quad -\frac{\alpha}{P} = -\frac{\beta}{Q} = \frac{\gamma}{R}.$$

D'où l'on déduit les équations, respectivement de A'B', B'C', C'A',

$$\alpha Q + \beta P = 0, \quad \beta R + \gamma Q = 0, \quad \gamma P + \alpha R = 0,$$

équations qui prouvent que A'B' passe par C, B'C' par A, et C'B' par B, et par conséquent le triangle A'B'C' est circonscrit au triangle ABC.

Passons du triangle de référence ABC au triangle A'B'C'; les formules de transformation sont

$$\alpha_1 = \beta R + \gamma Q, \quad \beta_1 = \gamma P + \alpha R, \quad \gamma_1 = \alpha Q + \beta P.$$

En éliminant α, β, γ entre ces formules et l'équation de U ou celle de U', on trouvera pour ces courbes

$$Pmn\alpha_1^2 + Qln\beta_1^2 + Rlm\gamma_1^2 = 0,$$
$$Pm'n'\alpha_1^2 + Ql'n'\beta_1^2 + Rl'm'\gamma_1^2 = 0.$$

Ces équations montrent que le triangle de référence A'B'C' est autopolaire par rapport aux deux coniques U et U'.

Reprenons comme triangle de référence ABC; les coordonnées de D, intersection de AB et A'B', sont données par

$$\gamma = 0, \quad \alpha Q + \beta P = 0;$$

celles de E, intersection de BC et B'C', par

$$\alpha = 0, \quad \beta R + \gamma Q = 0;$$

celles de F, intersection de CA et C'A', par

$$\beta = 0, \quad \gamma P + \alpha R = 0.$$

D'où l'on déduit l'équation de DE,

$$\frac{\alpha}{P} + \frac{\beta}{Q} + \frac{\gamma}{R} = 0;$$

ce qui démontre que DE passe par F; donc les triangles ABC et A'B'C' sont homologiques et la droite DEF est l'axe d'homologie. A cause des égalités I, on voit que cet axe est tangente commune aux coniques U et U'.

Si M, N, P sont les pieds des hauteurs, et M', N', P' les pieds des bissectrices intérieures, on a

$$l = \cos A, \quad m = \cos B, \quad n = \cos C; \quad l' = m' = n' = 1,$$

d'où

$$P = \cos B - \cos C, \quad Q = \cos C - \cos A, \quad R = \cos A - \cos B.$$

Dans ce cas particulier, DF aura pour équation

$$\frac{\alpha}{\cos B - \cos C} + \frac{\beta}{\cos C - \cos A} + \frac{\gamma}{\cos A - \cos B} = 0.$$

L'équation du cercle inscrit au triangle ABC étant

$$\cos\frac{A}{2}\sqrt{\alpha} + \cos\frac{B}{2}\sqrt{\beta} + \cos\frac{C}{2}\sqrt{\gamma} = 0,$$

la droite DF sera tangente à ce cercle si

$$\cos^2\frac{A}{2}(\cos B - \cos C) + \cos^2\frac{B}{2}(\cos C - \cos A) + \cos^2\frac{C}{2}(\cos A - \cos B) = 0;$$

or, si on exprime $\cos^2\frac{A}{2}$, $\cos^2\frac{B}{2}$, $\cos^2\frac{C}{2}$ respectivement en fonction de cos A, cos B, cos C, et qu'on développe ensuite, on constate que la condition est satisfaite.

Solution analogue par M. Rose.

Solution par M. A. Listray. Soient A_1, B_1, C_1, les points où la quatrième tangente commune rencontre BC, CA, AB et soit A'B'C' le triangle diagonal du quadrilatère complet formé par les quatre tangentes communes; ce sera le triangle autopolaire commun aux deux coniques.

En appliquant le théorème de Brianchon aux hexagones dégénérés B_1C_1PBCN, $B_1C_1P'BCN'$, B_1NABMA_1 ... etc., on voit facilement que les droites NP, N'P' se coupent en A', NM, N'M' en C' et MP, M'P' en B'.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, il suffit de faire voir que si N_1, N_2 sont les pieds des hauteurs h_b, h_c, P_1, P_2 les points de contact de AC, AB avec le cercle inscrit dans le triangle ABC et M_1, M_2

les pieds des bissectrices intérieures des angles B et C, les droites N_1N_2, P_1P_2, M_1M_2 sont concourantes; or, cela résulte de

$$(N_1P_1M_1A) = (N_2P_2M_2A) = \frac{p-a}{r}\operatorname{tg} A.$$

Voici encore une solution analytique. Soient $x=0$, $y=0$, $z=0$ les équations tangentielles des points A, B, C. U et U' auront des équations de la forme

$$ayz + bxz + cxy = 0,$$
$$a'yz + b'xz + c'xy = 0.$$

De là on déduit facilement les équations des points M, N, P, M', N', P', savoir :

$$cy + bz = 0, \quad cx + az = 0, \quad bx + ay = 0,$$
$$c'y + b'z = 0, \quad c'x + a'z = 0, \quad b'x + a'y = 0;$$

d'où l'on conclut les coordonnées des droites MN, MP, NP, M'N', M'P', N'P' :

$$(a, b, -c), \quad (a, -b, c), \quad (-a, b, c);$$
$$(a', b', -c'), \quad (a', -b', c'), \quad (-a', b', c').$$

Cela étant, les équations des points A', B', C', seront

$$-(bc')x + (ca')y + (ab')z = 0, \qquad (1)$$
$$(bc')x - (ca')y + (ab')z = 0, \qquad (2)$$
$$(bc')x + (ca')y - (ab')z = 0; \qquad (3)$$

en ajoutant et retranchant membre à membre les équations (1) et (2), nous obtenons

$$z = 0, \quad (bc')x - (ca')y = 0;$$

la première de ces équations nous montre que B'A' passe par C; la forme de la 2e montre qu'il s'agit de l'équation du point C_1.

Les équations de U et U' donnent pour les coordonnées de la 4e tangente commune

$$\frac{1}{(bc')}, \quad \frac{1}{(ca')}, \quad \frac{1}{(ba')};$$

on voit aisément que cette droite passe par C_1.

Les triangles ABC, A'B'C' sont donc homologiques et ont la quatrième tangente commune comme axe d'homologie; de plus, A'B'C'

n'étant autre chose que le triangle diagonal du quadrilatère complet formé par les quatre tangentes communes à U et U', il est le triangle autopolaire commun à U et U'.

Remarque. Tous les triangles formés par les tangentes communes jouissent évidemment des mêmes propriétés; il en résulte qu'un sommet tel que A' du triangle A'B'C' est le point de concours de six droites BB_1, CC_1, PN, P'N', QM et Q'M'.

L'hexagone N'NPMM'Q' a ses côtés opposés qui se coupent en trois points en ligne droite C, A' et B', il est donc inscriptible à une conique Σ; il en est de même de QQ'M'N'NP. Comme ce dernier hexagone a cinq sommets communs avec le précédent, le point Q est sur Σ. On verrait de même que P' est aussi sur Σ et nous retrouvons ce théorème bien connu :

Les huit points de contact des quatre tangentes communes menées à deux coniques U, U' sont sur une troisième conique.

MM. Thonet et Claeys se sont également servis des coordonnées tangentielles.

Solution par M. Déprez. 1° Soient A_1, B_1, C_1 les points où la quatrième tangente commune aux coniques U, U' rencontre BC, CA, AB. Dans le quadrilatère BCB_1C_1 circonscrit, les cordes de contact NP, N'P' des côtés opposés CB_1, BC_1 passent par le point de concours des diagonales BB_1, CC_1; donc A' est sur les droites BB_1, CC_1. On verrait de même que B' est à l'intersection de AA_1 et CC_1, C' à l'intersection de AA_1 et BB_1. Autrement dit, le triangle A'B'C' a pour côtés les diagonales AA_1, BB_1, CC_1 du quadrilatère complet formé par les quatre tangentes communes. On voit par là que ce triangle est circonscrit à ABC, qu'il est autopolaire à U et U', enfin que $A_1B_1C_1$ est l'axe d'homologie des triangles ABC, A'B'C'.

2° Supposons maintenant que (M, N, P) soient les pieds des hauteurs du triangle ABC, (M', N', P') les points de contact des côtés avec le cercle inscrit, (M'', N'', P'') les pieds des bissectrices intérieures. Les rapports anharmoniques (ANN'N''), (APP'P'') étant égaux, les droites NP, N'P', N''P'' concourent en un même point A'; par analogie, les droites PM, P'M', P''M'' concourent en un point B', et les droites MN, M'N', M''N'' en un point C'. Il en résulte que le cercle inscrit et les coniques inscrites qui touchent les côtés du triangle ABC, soit aux pieds

des hauteurs, soit aux pieds des bissectrices, ont une quatrième tangente commune. Le centre de la seconde de ces courbes est donc sur la droite IK.

La conique qui touche les côtés du triangle ABC aux points de contact intérieurs des trois cercles exinscrits a la même quatrième tangente.

Question 1868.

(Voir *Mathesis* (3); II, p. 104).

Si deux triangles ABC, A'B'C' *sont tels que les parallèles à* B'C', C'A', A'B' *menées respectivement par* A, B, C *concourent en un même point* D, *on sait que les parallèles à* BC, CA, AB *menées respectivement par* A', B', C', *concourent en un même point* D' (*Mathesis* (I), III, p. 86).

Si ces triangles sont homologiques, démontrer que l'axe d'homologie passe au milieu de la distance DD'. (FUHRMANN.)

Solution par M. L. RIPERT. ABC étant le triangle de référence, soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les coordonnées barycentriques des points A', B', C' que l'on peut assujettir aux conditions

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = s, \qquad (1)$$

s étant une constante arbitraire. On reconnaît aisément que la condition nécessaire et suffisante pour que les parallèles menées respectivement de A', B', C' à BC, CA, AB concourent en un point D' est

$$\alpha + \beta' + \gamma'' = s. \qquad (2)$$

Les conditions (1) et (2) entraînent d'ailleurs

$$\alpha - \alpha' = \gamma' - \gamma'', \quad \beta' - \beta'' = \alpha'' - \alpha, \quad \gamma'' - \gamma = \beta - \beta'. \qquad (3)$$

Les coordonnées de D' et D sont alors

$$D' \cdots (\alpha, \quad \beta', \quad \gamma'')$$
$$D \cdots a = (\beta' - \beta'')(\gamma' - \gamma''), \quad b' = (\beta' - \beta'')(\gamma'' - \gamma),$$
$$c'' = (\beta - \beta')(\gamma' - \gamma'').$$

La somme des coordonnées de D étant

$$S = (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + (\beta''\gamma - \gamma''\beta) + (\beta\gamma' - \gamma\beta') = L + M + N,$$

le milieu de DD' a pour coordonnées

$$\alpha S + as, \quad \beta' S + b's, \quad \gamma'' S + c''s. \qquad (4)$$

Ceci posé, si les deux triangles ABC, A'B'C' sont homologiques ($\alpha'\beta''\gamma = \alpha''\beta\gamma'$), l'équation de l'axe d'homologie peut s'écrire

$$MNx + M(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')y + N(\alpha''\beta - \beta''\alpha)z = 0. \qquad (5)$$

Remplaçons, dans cette équation, x, y, z par les valeurs (4). En faisant usage des conditions (1), (2), (3), on trouve

$$\begin{gathered} MN\alpha + M(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')\beta' + N(\alpha''\beta - \beta''\alpha)\gamma'' \\ \equiv s[MN + M\beta'(\gamma - \gamma') + N\gamma''(\beta - \beta'')], \\ MNa + M(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')b' + N(\alpha''\beta - \beta''\alpha)c'' \\ \equiv S[MN + s(\beta - \beta')(\beta\gamma' - \beta''\gamma)], \end{gathered}$$

et l'équation (5) devient

$$\begin{gathered} [MN + M\beta'(\gamma - \gamma')] + [N\gamma''(\beta - \beta'') + MN] \\ + s(\beta - \beta')(\beta\gamma' - \beta''\gamma) = 0. \end{gathered} \qquad (6)$$

Or,

$$\begin{gathered} MN + M\beta'(\gamma - \gamma') = M\gamma'(\beta - \beta'), \\ N\gamma''(\beta - \beta'') + MN = N\beta''(\gamma - \gamma'') = -N\beta''(\beta - \beta'), \\ M\gamma' - N\beta'' = s(\beta''\gamma - \beta\gamma') - \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma'. \end{gathered}$$

En portant cette valeur dans (6), après suppression du facteur $\beta - \beta'$, il reste

$$\alpha'\beta''\gamma - \alpha''\beta\gamma' = 0$$

ce qui démontre la proposition.

Note. Sur les triangles qui font l'objet de la question 1368, on peut consulter mon mémoire *Sur les triangles parallélogiques et leurs applications* (Association française, Congrès d'Ajaccio, 1901). Dans ce Mémoire, j'ai nommé *triangles parallélogiques* les triangles ABC, A'B'C' pour lesquels M. Neuberg propose le terme de *triangles métaparallèles*; D et D' sont les centres de parallélogie.

J'ai considéré des triangles qui sont doublement, triplement ou quadruplement parallélogiques.

La propriété ci-dessus démontrée m'était connue; on en trouvera l'énoncé et une application dans un article récent *Sur une extension élémentaire du théorème de Wallace* (*Le Matematiche*, vol. I, num. 1-2, p. 30).

Qu'il me soit permis de citer ici le théorème suivant : Les droites AD', BD', CD', A'D, B'D, C'D rencontrent respectivement les côtés

B'C', C'A', A'B', BC, CA, AB en six points situés sur une même droite d et qui est parallèle à DD'. Cette droite d, qui *jouit de nombreuses propriétés*, m'a paru convenablement nommée *axe de parallélogie*.

(L. Ripert).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE.

(*Section de l'artillerie et du génie*. Septembre 1902.)

1. Déterminer tous les cubes de la forme $5p + 1$, p désignant un nombre premier.

2. Déterminer tous les systèmes de valeurs réelles de x et de y telles que l'expression

$$(x + y\sqrt{-1})^5$$

soit réelle et plus grande que 8.

Ayant tracé deux axes rectangulaires, indiquer sur la figure les points dont ces valeurs de x et de y sont les coordonnées.

3. Etant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, on marque sur l'axe Ox deux points A et A' équidistants du point O et l'on trace, dans le plan de la figure, une droite d coupant les axes Ox, Oy.

1° Déterminer le lieu des pôles de la droite d par rapport aux cercles passant par les points A et A';

2° Ce lieu est une hyperbole H dont une des asymptotes est perpendiculaire à la droite d et la rencontre en un point situé sur l'axe Oy. Comment peut-on définir géométriquement la seconde asymptote?

3° Démontrer que l'hyperbole H coupe l'axe Ox en un point dont le conjugué harmonique par rapport aux points A et A' est le point d'intersection des droites d et Ox.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1066. Sur deux diamètres rectangulaires Ox, Oy d'une circonférence on prend deux points fixes A $(a, 0)$, B $(0, b)$; par ces points on mène deux droites variables AC, BC faisant entre elles un angle donné V. Trouver le lieu du milieu M de la distance PQ des pôles de ces droites. (Soons.)

Coordonnées de M, α et β; coordonnées de P et Q, $\alpha + \lambda$, $\beta + \mu$ et $\alpha - \lambda$, $\beta - \mu$, λ et μ étant des paramètres variables. Équations des polaires AC, CB

$$(\alpha + \lambda)x + (\beta + \mu)y = R^2, \quad (\alpha - \lambda)x + (\beta - \mu)y = R^2,$$

avec les conditions

$$(\alpha+\lambda)\,a=R^2,\quad (\beta-\mu)\,y=R^2,$$

$$\operatorname{tg} V=\frac{\dfrac{\alpha+\lambda}{\beta+\mu}-\dfrac{\alpha-\lambda}{\beta-\mu}}{1+\dfrac{\alpha^2-\lambda^2}{\beta^2-\mu^2}}=\frac{-2\alpha\mu+2\beta\lambda}{\alpha^2+\beta^2-\lambda^2-\mu^2}.$$

En éliminant λ et μ on trouve l'équation d'une conique.

1067. On considère une conique C ayant un foyer en F et pour directrice correspondante la droite D et une conique C′ ayant un foyer en F et pour directrice correspondante la droite donnée D′.

Montrer que si les coniques C et C′ ont en outre le produit de leurs excentricités numériques constant, le lieu des points de rencontre de ces coniques se compose de deux ellipses. (E. N. Barisien).

Soient M un point commun aux deux coniques, et ρ, δ, δ' ses distances à F. D, D′; on doit avoir $\rho=m\delta$, $\rho=n\delta'$, les paramètres variables m, n'étant liés par la relation $mn=k$. On a donc $\rho^2=k\delta\delta'$, etc.

1068. Les arcs qui joignent les sommets d'un triangle sphérique trirectangle ABC à un même point intérieur H rencontrent les côtés opposés aux sommets d'un triangle A′B′C′ dont le périmètre est égal à une demi circonférence de grand cercle.

En effet, A′B′C′ est un triangle orthique de ABC (orthocentre H); donc A′H, B′H, C′H, sont les arcs bissecteurs intérieurs et BC, CA, AB les arcs bissecteurs extérieurs des angles du triangle ABC. Donc si B′C′ coupe BC aux points D, E (D étant situé sur le prolongement de CB), on a $BA'=BD$, $CA'=CE$, $C'A'=CD$, $B'A'=B'E$.....

1069. Vérifier l'identité

$$[a\,(a^3+2b^3)]^3=[b\,(2a^3+b^3)]^3+[a\,(a^3-b^3)]^3+[b\,(a^3-b^3)]^3.$$

Elle montre que si $a>b$, tout nombre de la forme $a\,(a^3+2b^3)$ a *son cube décomposable en une somme de trois cubes.*

Exemple : $a=2,\quad b=1,$

$$\overline{20}^3=\overline{17}^3+\overline{14}^3+\overline{7}^3$$

(E. N. Barisien).

1070. Vérifier l'identité

$$(8u^3-z^3)\,(u^3+z^3)^2=(2u^3-z^3)^3+(3u^2z)^3.$$

(E. N. Barisien).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1370 (*nouvelle*). Soient ABC, A'B'C' deux triangles métaparallèles, D et D' étant leurs métapôles (question 1368). On sait que les six points (AD', B'C'),.... (A'D, BC),... sont sur une droite Δ (AFAS, Ajaccio, 1901)(*). Démontrer que, si les triangles sont homologiques, la droite Δ passe par les milieux des segments MD et MD', M étant le centre d'homologie. (L. RIPERT).

1389. Soient OD, OE les asymptotes d'une hyperbole. La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque M de la courbe sur OD coupe OE en N ; la perpendiculaire menée de M sur OE coupe OD en P.

Démontrer que la droite qui unit les projections de M sur les axes de l'hyperbole et la normale en M concourent au milieu de la droite NP. (DÉPREZ).

1390. On considère les ellipsoïdes qui ont deux axes principaux communs en grandeur et en direction. Trouver le lieu des normales parallèles à une direction donnée. (G. ANDRIEN.)

1391. On prolonge les côtés BA et CA, CB et AB, AC et BC d'un triangle d'une même longueur $AD = AD' = BE = BE' = CF = CF' = \lambda$, ou l'on porte cette longueur λ sur les côtés AB et AC, ... Les droites DD', EE', FF' suffisamment prolongées forment un triangle LMN; de même les droites E'F, F'D, D'E forment un triangle UVW.

On demande de calculer :

1° les surfaces des triangles LMN, UVW;

2° les coordonnées par rapport au triangle ABC du centre d'homothétie du triangle LMN par rapport au triangle qui a pour sommets, soit les centres des cercles exinscrits au triangle ABC, soit les points de contact des côtés du triangle ABC avec le cercle inscrit;

3° les coordonnées des centres d'homologie des triangles LMN, UVW par rapport à ABC.

Lieu de ces centres lorsque λ varie. (J. NEUBERG).

×**1392**. Construire un triangle ABC, connaissant le rayon du cercle inscrit, la différence $b - c$ de deux côtés et la médiane relative au troisième côté. (CL. THIRY).

(*) *Sur les triangles parallélogiques* (ou métaparallèles) *et leurs applications.*

SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ DES FIGURES SPHÉRIQUES;

par M. C. E. Wastrels, répétiteur à l'Université de Gand.

(*Suite et fin.* Voir *Mathesis*, p. 217.)

6. Portons, sur les rayons OA, OB, OC, les longueurs OA'', OB'', OC'' égales à

$$\mu\frac{\sin A_1}{a}\left(=\mu\frac{\sin\frac{a}{R}}{a}\right),\quad \mu\frac{\sin B_1}{b}\left(=\mu\frac{\sin\frac{b}{R}}{b}\right),\quad \mu\frac{\sin C_1}{c}\left(=\mu\frac{\sin\frac{c}{R}}{c}\right),$$

et considérons le triangle rectiligne A''B''C''.

Si nous désignons par p la longueur de la perpendiculaire OP'' abaissée de O sur le plan de ce triangle, nous pourrons écrire

$$\cos P''OA'' = \frac{p}{OA''} = \frac{p}{\mu}\cdot\frac{a}{\sin A_1},\quad \cos P''OB'' = \frac{p}{\mu}\cdot\frac{b}{\sin B_1},$$

$$\cos P''OC'' = \frac{p}{\mu}\cdot\frac{c}{\sin C_1}.$$

Observons maintenant que

$$\sin A_1 \cos x0x_1 = \sin B_1 \cos y0y_1 = \sin C_1 \cos z0z_1.$$

Les trois valeurs qui précèdent sont donc directement proportionnelles aux quantités $a\cos x0x_1$, $b\cos y0y_1$, $c\cos z0z_1$.

Or, les expressions de X'', Y'', Z'' trouvées au n° 2 peuvent s'écrire, dans le cas qui nous occupe :

$$X'' = \frac{RU_{x_1}\cos x0x_1}{U} = \frac{R^2}{2U}a\cos x0x_1,\quad Y'' = \frac{R^2}{2U}b\cos y0y_1,$$

$$Z'' = \frac{R^2}{2U}c\cos z0z_1.$$

Les quantités X'', Y'', Z'' sont donc aussi proportionnelles aux expressions $a\cos x0x_1$, $b\cos y0y_1$, $c\cos z0z_1$, et, par suite, aux cosinus des angles que OP'' fait avec les axes $0x_1$, $0y_1$, $0z_1$. Comme, d'ailleurs, X'', Y'', Z'' ne sont autre chose que les projections orthogonales de OG sur ces mêmes axes, on peut conclure que les directions OG et OP'' coïncident.

Il reste à déterminer la position du point G sur la droite OP''. Désignons la distance OG par ρ; nous aurons

$$X'' = \rho\cos P''OA'' = \rho\frac{p}{\mu}\cdot\frac{a}{\sin A_1}.$$

D'un autre côté, on a trouvé

$$X'' = \frac{R^2}{2U} a \cos x O x_1.$$

Par suite

$$\rho \frac{p}{\mu} \cdot \frac{a}{\sin A_1} = \frac{R^2}{2U} a \cos x O x_1 ;$$

d'où

$$\rho = \frac{R^2}{2U} \cdot \frac{\mu}{p} \cdot \sin A_1 \cdot \cos x O x_1 .$$

Or, en désignant par U'' l'aire du triangle A''B''C'', on a

$$\frac{U'' p}{3} = \frac{1}{6} OA'' \cdot OB'' \cdot OC'' \cdot \sin A_1 \cdot \cos x O x_1 ;$$

d'où

$$\frac{\sin A_1 \cdot \cos x O x_1}{p} = \frac{2U''}{OA'' \cdot OB'' \cdot OC''} .$$

Par conséquent

$$\rho = \frac{R^2 U'' \mu}{U \cdot OA'' \cdot OB'' \cdot OC''} .$$

Cette relation se réduit à

$$\frac{U}{U''} = \frac{R}{\rho},$$

si l'on pose

$$R\mu = OA'' \cdot OB'' \cdot OC'',$$

ou

$$R\mu = \mu^3 \frac{\sin A_1 \cdot \sin B_1 \cdot \sin C_1}{abc} .$$

On satisfait à cette condition en prenant

$$\mu = \sqrt{\frac{Rabc}{\sin A_1 \sin B_1 \sin C_1}} .$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si l'on considère un triangle sphérique ABC *et que, sur les rayons* OA, OB, OC, *on porte les longueurs* OA'', OB'', OC'' *égales à*

$$\mu \frac{\sin \frac{a}{R}}{a}, \quad \mu \frac{\sin \frac{b}{R}}{b}, \quad \mu \frac{\sin \frac{c}{R}}{c},$$

μ désignant la quantité

$$\sqrt{\frac{Rabc}{\sin\frac{a}{R}\cdot\sin\frac{b}{R}\cdot\sin\frac{c}{R}}},$$

le centre de gravité du triangle sphérique se trouve sur le rayon perpendiculaire au plan du triangle rectiligne A''B''C'', *et la distance de ce point au centre de la sphère est une quatrième proportionnelle à l'aire du triangle sphérique, à celle du triangle rectiligne et au rayon de la sphère*(*).

7. Un théorème analogue existe pour une figure sphérique quelconque. On peut d'ailleurs en donner une démonstration beaucoup plus simple que la précédente en observant qu'il existe toujours une figure plane A''B''C''... (et même une infinité de ces figures) dont la projection sur un plan quelconque a la même valeur que celle de la figure sphérique ABC... Cela étant, reprenons les formules du N° 2, en supposant les axes rectangulaires. Si nous désignons l'aire de A''B''C''... par U'' et les angles de la perpendiculaire OP'' abaissée sur A''B''C''... avec les axes par α, β, γ, nous aurons

$$X=\frac{R}{U}U_x=\frac{R}{U}U''\cos\alpha,\qquad Y=\frac{R}{U}U''\cos\beta,\qquad Z=\frac{R}{U}U''\cos\gamma.$$

Ces formules montrent que OG est dirigée suivant OP''.

En représentant la distance OG par ρ, on aura ensuite

$$\rho\cos\alpha=\frac{R}{U}U''\cos\alpha,\qquad \text{ou}\qquad \frac{U}{U''}=\frac{R}{\rho};\ \text{c. q. f. d.}$$

8. On observera l'analogie de ce théorème avec le théorème connu relatif au centre de gravité d'un arc de cercle : ce dernier point se trouve sur le rayon perpendiculaire à la corde de l'arc et sa distance au centre du cercle est une quatrième proportionnelle à la longueur de l'arc de cercle, à celle de sa corde et au rayon; dans le cas d'une figure sphérique, on voit que la corde est remplacée par la figure plane A''B''C''..., la figure sphérique remplaçant elle-même l'arc de cercle.

(*) On peut démontrer sans peine que les secteurs OAB, OBC, OCA sont respectivement équivalents aux triangles OA''B'', OB''C'' et OC''A'' et, qu'en général, les projections du triangle sphérique ABC et du triangle rectiligne A''B''C'' sur un plan quelconque sont équivalentes.

9. Remarque. Les propriétés qui précèdent se démontrent très simplement par la théorie des vecteurs, en partant de la formule

$$\bar{\rho} = \frac{\overline{U}}{U} R,$$

dans laquelle R et U représentent, comme plus haut, le rayon de la sphère et l'aire arithmétique de la figure sphérique; $\overline{U}$ désigne l'aire géométrique de cette figure et $\bar{\rho}$ la coordonnée géométrique de son centre de gravité.

Cette formule est proposée comme exercice dans le *Cours de Mécanique rationnelle de l'École du Génie civil*, par M. J. Massau (édition de 1882. 1e partie, p. IV, exercice 43) (*).

Gand, le 30 janvier 1902

SURPRISES MATHÉMATIQUES.

En proposant au hasard ou sans préparation des questions aux récipiendaires, un examinateur rencontre parfois des cas extraordinaires auxquels il n'avait pas pensé lui-même ou qui demandent quelque réflexion. En voici deux exemples :

1. Pour résoudre l'équation

$$\frac{(a-x)^5 + (x-b)^5}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = \frac{a^5 - b^5}{a^2 + b^2},$$

on peut effectuer les carrés et les cubes indiqués :

$$\frac{3x^2(a-b) - 3x(a^2-b^2) + a^5 - b^5}{2x^2 - 2x(a+b) + a^2 + b^2} = \frac{a^5 - b^5}{a^2 + b^2}, \tag{1}$$

puis soustraire les termes de la seconde fraction des termes correspondants de la première :

$$\frac{3x^2(a-b) - 3x(a^2-b^2)}{2x^2 - 2x(a+b)} = \frac{a^5 - b^5}{a^2 + b^2},$$

enfin diviser les deux numérateurs par $a - b$ supposé différent de zéro :

$$\frac{3x^2 - 3x(a+b)}{2x^2 - 2x(a+b)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + b^2}.$$

Si l'on simplifiait la première fraction, on trouverait

$$\frac{3}{2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + b^2}; \quad \text{ou} \quad (a-b)^2 = 0.$$

(*) Je dois à l'obligeance de M. Massau plusieurs renseignements relatifs à cette question.

Les conclusions à tirer de ces calculs sont les suivantes :

1° Si a n'est pas égal à b, les racines de l'équation proposée s'obtiennent en égalant à zéro le facteur supprimé $x^2 - x(a+b)$; elles sont donc $x = 0$ et $x = a + b$; c'est ce que l'on peut vérifier sur l'équation (1). Comme cette équation renferme des termes en x^2 qui se détruisent, on pourrait aussi considérer l'infini comme solution.

2° Si $a = b$, l'équation (1) est indéterminée.

3. Soit à chercher, par la méthode classique, le maximum ou le minimum de la fraction

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}.$$

En égalant la fraction à m et en résolvant l'équation ainsi obtenue par rapport à x, on trouve

$$x = \frac{5(1-m) \pm \sqrt{25(1-m)^2 - 4(6-4m)(1-m)}}{2(1-m)}. \qquad (1)$$

La quantité sous le radical s'annule pour $m = 1$ et pour $m = \frac{1}{9}$; elle est positive pour les valeurs de m extérieures à l'intervalle $(\frac{1}{9}, 1)$, de sorte que $\frac{1}{9}$ est un maximum de m et 1, un minimum.

Pour trouver les valeurs correspondantes de x, si l'on se contentait de dire que, le radical étant nul, on a

$$x = \frac{5(1-m)}{2(1-m)} = \frac{5}{2}$$

on ne trouverait que la valeur de x qui correspond à $m = \frac{1}{9}$.

En tirant x de l'équation

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} = 1,$$

on obtient la racine (double) $x = \infty$. On peut déduire ce résultat de la formule (1) en écrivant

$$x = \tfrac{1}{2}\left[5 \pm \sqrt{25 - \frac{4(6-4m)}{1-m}}\right],$$

puis faisant $m = 1$.

Pour traiter le même exemple par la méthode de Catalan (*Mathesis*, (1) II, 5), on écrit

$$m = 1 + \frac{2}{x^2 - 5x + 4} = 1 - \frac{2}{(4-x)(x-1)}.$$

Lorsque x varie de 1 à 4, les nombres positifs $4-x$, $x-1$ ayant une somme constante, leur produit est maximum pour $x=\frac{5}{2}$, et alors m passe par un maximum égal à $\frac{1}{3}$. En écrivant

$$m=1+\frac{2}{(x-4)(x-1)}=1+\frac{2}{(1-x)(4-x)},$$

on voit que m diminue à mesure que x s'éloigne de 4 dans l'intervalle $(4, \infty)$ ou de 1 dans l'intervalle $(-\infty, 1)$ et qu'il atteint le minimum $m=1$ pour $x=\pm\infty$. La substitution $x=(1:z)$ ferait correspondre le minimum $m=1$ à la valeur $z=0$. (J. N.)

NOTES DE GÉOMÉTRIE;

par M. H. VAN AUBEL.

I.

1. M et N étant deux points du plan d'un triangle ABC, on mène par M, parallèlement à AN, BN, CN, des droites qui rencontrent les côtés BC, CA, AB respectivement en A', B', C'. Trouver le lieu du point M tel que ces trois points soient en ligne droite.

Soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées barycentriques de M, N et posons $\alpha+\beta+\gamma=s$. On trouvera pour les coordonnées de A', B', C' :

$$\begin{array}{ccc} 0, & \beta's+\gamma'\beta-\beta'\gamma, & \gamma's-\gamma'\beta+\beta'\gamma, \\ \alpha's-\alpha'\gamma+\gamma'\alpha, & 0 & \gamma's+\alpha'\gamma-\gamma'\alpha, \\ \alpha's+\beta'\alpha-\alpha'\beta, & \beta's-\beta'\alpha+\alpha'\beta, & 0. \end{array}$$

On exprime que ces points sont en ligne droite en égalant à zéro le déterminant formé par leurs coordonnées, ce qui donne :

$$\left[\begin{array}{l}(\beta's+\gamma'\beta-\beta'\gamma)(\gamma's+\alpha'\gamma-\gamma'\alpha)(\alpha's+\beta'\alpha-\alpha'\beta) \\ +(\gamma's-\gamma'\beta+\beta'\gamma)(\alpha's-\alpha'\gamma+\gamma'\alpha)(\beta's-\beta'\alpha+\alpha'\beta)\end{array}\right]=0,$$

ou en développant, réduisant et supprimant le facteur s :

$$\begin{array}{c} 2\alpha'\beta'\gamma's^2-s\Sigma\alpha'(\beta'-\gamma')(\gamma'\beta-\beta'\gamma) \\ +\Sigma(\beta'+\gamma')(\alpha'\gamma-\gamma'\alpha)(\beta'\alpha-\alpha'\beta)=0. \end{array}$$

Si l'on ordonne par rapport à α, β, γ, on reconnaît facilement que les coefficients de α^2, β^2, γ^2 sont nuls et ceux de $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$:

$$\begin{array}{c} \alpha'(\beta'+\gamma')(\alpha'+\beta'+\gamma'),\quad \beta'(\gamma'+\alpha')(\alpha'+\beta'+\gamma'), \\ \gamma'(\alpha'+\beta')(\alpha'+\beta'+\gamma'); \end{array}$$

donc après la suppression du facteur $\alpha'+\beta'+\gamma'$ l'équation devient

$$\alpha'(\beta'+\gamma')\beta\gamma+\beta'(\gamma'+\alpha')\gamma\alpha+\gamma'(\alpha'+\beta')\alpha\beta=0. \qquad (1)$$

D'où l'on voit que, si le point N est fixe, le lieu du point M tel que les parallèles à AN, BN, CN menées par M rencontrent les côtés BC, CA, AB en trois points en ligne droite, est une conique circonscrite ayant pour centre le point complémentaire de N.

2. L'équation (1) pouvant être mise sous la forme

$$\alpha(\beta+\gamma)\beta'\gamma'+\beta(\gamma+\alpha)\gamma'\alpha'+\gamma(\alpha+\beta)\alpha'\beta'=0,$$

il s'ensuit que si l'on considère le point M comme fixe, le lieu du point N tel que les parallèles à AN, BN, CN menées par M rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite, est une conique circonscrite ayant pour centre le point complémentaire de M.

Donc N *étant un point donné dans le plan d'un triangle* ABC *et* M *un point quelconque de la conique circonscrite ayant pour centre le point complémentaire de* N, 1° *les parallèles à* AN, BN, CN *menées par* M *rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite;* 2° *il en est de même des parallèles à* AM, BM, CM *menées par* N.

3. Nous allons maintenant déterminer l'enveloppe de la droite A'B'C' pour le cas où A', B', C' sont les points de rencontre des côtés BC, CA, AB avec les parallèles à AM, BM, CM menées par N.

Les coordonnées des points A', B' sont :

$$\begin{matrix} 0, & (\alpha'+\beta')\beta+\beta'\gamma, & \gamma'\beta+(\gamma'+\alpha')\gamma, \\ \alpha'\gamma+(\alpha'+\beta')\alpha, & 0, & (\beta'+\gamma')\gamma+\gamma'\alpha; \end{matrix}$$

si pour abréger on pose $\beta'+\gamma'=l'$, $\gamma'+\alpha'=m'$, $\alpha'+\beta'=n'$ et qu'on désigne par x, y, z les coordonnées courantes, l'équation de A'B' sera :

$$\begin{aligned}(n'\beta+\beta'\gamma)(l'\gamma+\gamma'\alpha)x+(\gamma'\beta+m'\gamma)(\alpha'\gamma+n'\alpha)y\\ -(n'\beta+\beta'\gamma)(\alpha'\gamma+n'\alpha)z=0.\end{aligned}$$

Le point C' appartenant à cette droite, on a encore

$$l'\alpha'\beta\gamma+m'\beta'\gamma\alpha+n'\gamma'\alpha\beta=0.$$

En éliminant α, divisant par β' et ordonnant par rapport à β, on obtient :

$$\left[\begin{matrix} n'(l'\gamma'x-\gamma'\alpha'y-n'\alpha'z)\beta^2 \\ +[(m'n'+\beta'\gamma')l'x-(\alpha'+\beta'-\gamma')m'\alpha'y-(\gamma'+\alpha'-\beta')n'\alpha'z]\beta\gamma \\ +m'(l'\beta'x+m'\alpha'y-\alpha'\beta'z)\gamma^2 \end{matrix}\right]=0$$

ou par abréviation

$$P\beta^2+Q\beta\gamma+R\gamma^2=0.$$

L'enveloppe de la droite A'B'C' sera représentée par l'équation :

$$Q^2 - 4PR = 0.$$

Si l'on remplace P, Q, R par leurs valeurs, qu'on développe en tenant compte des valeurs de l', m', n', on trouve aisément que les coefficients de x^2, y^2, z^2 sont

$$4l'^2\alpha'^2s'^2, \quad 4m'^2\alpha'^2s'^2, \quad 4n'^2\alpha'^2s'^2$$

et ceux de yz, zx, xy

$$-8m'n'\alpha'^2s'^2, \quad -8n'l'\alpha'^2s'^2, \quad -8l'm'\alpha'^2s'^2;$$

donc après suppression du facteur commun $4\alpha'^2s'^2$ l'équation devient :

$$l'^2x^2 + m'^2y^2 + n'^2z' - 2m'n'yz - 2n'l'zx - 2l'm'yz = 0,$$

et on voit que *la droite* A'B'C' *enveloppe une conique tangente aux trois côtés du triangle* ABC *aux points où ils sont rencontrés par les droites joignant les sommets opposés au réciproque* $\left(\frac{1}{l'}, \frac{1}{m'}, \frac{1}{n'}\right)$ *du point complémentaire de* N.

4. *Cas particuliers.* A) N est l'orthocentre du triangle ABC. Comme le point complémentaire de l'orthocentre est le centre du cercle circonscrit, 1° *les parallèles aux hauteurs menées par un point quelconque du cercle circonscrit rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite* (droite de Simson); 2° *les droites menées par l'orthocentre parallèlement à celles qui joignent les sommets à un point quelconque du cercle circonscrit rencontrent les côtés opposés en trois points d'une droite qui enveloppe une conique tangente aux trois côtés aux points où ils sont rencontrés par les droites joignant les sommets opposés au réciproque du centre du cercle circonscrit.*

B) N est le point de Steiner $\left(\frac{1}{b^2 - c^2}, \frac{1}{c^2 - a^2}, \frac{1}{a^2 - b^2}\right)$. Alors l'équation (1) devient :

$$(b^2 - c^2)\beta\gamma + (c^2 - a^2)\gamma\alpha + (a^2 - b^2)\alpha\beta = 0,$$

qui représente l'hyperbole de Kiepert. Donc : 1° *les droites menées par un point quelconque de l'hyperbole de Kiepert parallèlement à celles qui joignent les sommets au point de Steiner rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite*; 2° *il en est de même des droites menées par le point de Steiner parallèlement à celles qui joignent les sommets à un point*

quelconque de l'hyperbole de Kiepert, et la droite qui passe par les trois points enveloppe une conique tangente aux trois côtés aux points où ils sont rencontrés par les droites joignant les sommets opposés au reciproque du centre de cette hyperbole.

II.

M et N étant deux points du plan d'un triangle ABC, on abaisse de M sur AN, BN, CN des perpendiculaires qui rencontrent les côtés BC, CA, AB en A', B', C'. Trouver le lieu du point M tel que ces trois points soient en ligne droite.

Soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées barycentriques des points M, N. En posant

$$b^2+c^2-a^2=a'^2, \quad c^2+a^2-b^2=b'^2, \quad a^2+b^2-c^2=c'^2,$$

on trouve que les coordonnées de A', B', C' sont :

$$\begin{matrix} 0, & -(a'^2\beta'+2b^2\gamma')\alpha+(b'^2\beta'-c'^2\gamma')\beta, & (b'^2\beta'-c'^2\gamma')\gamma+(2c^2\beta'+a'^2\gamma')\alpha, \\ (c'^2\gamma'-a'^2\alpha')\alpha+(2a^2\gamma'+b'^2\alpha')\beta, & 0, & -(b'^2\gamma'+2c^2\alpha')\beta+(c'^2\gamma'-a'^2\alpha')\gamma, \\ -(c'^2\alpha'+2a^2\beta')\gamma+(a'^2\alpha'-b'^2\beta')\alpha, & (a'^2\alpha'-b'^2\beta')\beta+(2b^2\alpha'+c'^2\beta')\gamma, & 0. \end{matrix}$$

Si, pour abréger, on fait

$$b'^2\beta'-c'^2\gamma'=l, \quad c'^2\gamma'-a'^2\alpha'=m, \quad a'^2\alpha'-b'^2\beta'=n,$$
$$a'^2\beta'+2b^2\gamma'=l', \quad b'^2\gamma'+2c^2\alpha'=m', \quad c'^2\alpha'+2a^2\beta'=n',$$

par suite

$$2c^2\beta'+a'^2\gamma'=l+l', \quad 2a^2\gamma'+b'^2\alpha'=m+m',$$
$$2b^2\alpha'+c'^2\beta'=n+n',$$

ces coordonnées deviennent

$$\begin{matrix} 0, & -(l'\alpha-l\beta), & l(\gamma+\alpha)+l'\alpha, \\ m(\alpha+\beta)+m'\beta, & 0, & -(m'\beta-m\gamma), \\ -(n'\gamma-n\alpha), & n(\beta+\gamma)+n'\gamma, & 0. \end{matrix}$$

Leur déterminant, égalé à zéro, exprimant que les points A', B', C' sont en ligne droite, on doit avoir :

$$(l'\alpha-l\beta)(m'\beta-m\gamma)(n'\gamma-n\alpha)$$
$$-[l(\gamma+\alpha)+l'\alpha][m(\alpha+\beta)+m'\beta][n(\beta+\gamma)+n'\gamma]=0,$$

ou, en posant $\alpha+\beta+\gamma=s$,

$$(l'\alpha-l\beta)(m'\beta-m\gamma)(n'\gamma-n\alpha)$$
$$-(ls+l'\alpha-l\beta)(ms+m'\beta-m\gamma)(ns+n'\gamma-n\alpha)=0;$$

développant, réduisant et supprimant le facteur commun s,

$$lmns^2+s\Sigma mn(l'\alpha-l\beta)+\Sigma l(m'\beta-m\gamma)(n'\gamma-n\alpha)=0.$$

En ordonnant par rapport à α, β, γ, on s'assure aisément que les coefficients de α^2, β^2, γ^2 sont nuls et ceux de $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$,

$$l(mn + m'n + mn'), \quad m(nl + n'l + nl'), \quad n(lm + l'm + lm');$$

donc l'équation se réduit à

$$\Sigma l(mn + m'n + mn')\beta\gamma = 0,$$

ou, en remplaçant l, m, n,.... par leurs valeurs et en remarquant que $\Sigma(2b^2c^2 - a^4) = 16\,S^2$,

$$\Sigma 16\,S^2\alpha'(\alpha' + \beta' + \gamma')(b'^2\beta' - c'^2\gamma')\beta\gamma = 0,$$

et en supprimant le facteur commun $16\,S^2(\alpha' + \beta' + \gamma')$,

$$\alpha'(b'^2\beta' - c'^2\gamma')\beta\gamma + \beta'(c'^2\gamma' - a'^2\alpha')\gamma\alpha + \gamma'\,a'^2\alpha' - b'^2\beta')\alpha\beta = 0.$$

Donc le lieu du point M est une conique circonscrite passant par le point N (α', β', γ') et par l'orthocentre $\left(\frac{1}{a'^2}, \frac{1}{b'^2}, \frac{1}{c'^2}\right)$.

On en conclut le théorème suivant :

Si, sur une conique passant par les sommets et par l'orthocentre d'un triangle (hyperbole équilatère circonscrite), on prend deux points à volonté, les perpendiculaires abaissées de l'un de ces points sur les droites joignant l'autre aux sommets rencontreront les côtés opposés en trois points en ligne droite.

SUR QUELQUES CAS PARTICULIERS D'UN THÉORÈME DE GRASSMANN(*),

par M. J. Neuberg.

Les intéressants résultats que M. Van Aubel vient d'établir par voie analytique, peuvent être rattachés au mode de génération des courbes du troisième degré (ordre ou classe) d'après Grassmann. Dans notre article sur les quadrangles et les quadrilatères paralogiques (*Mathesis*, p. 153), nous avons eu l'occasion de nous occuper de ce mode; les présents développements sont un complément du dit article et renferment

---

(*) *Démonstration géométrique.* Les faisceaux M(ABC...) et N(ABC ..) projetant de M et N les points ABC... de la courbe sont projectifs; mais M(ABC...) $\overline{\wedge}$ N(A'B'C'...), donc N(ABC...) $\overline{\wedge}$ N(A'B'C'...). La perpendiculaire élevée en M sur MN coupe la courbe en M', et on sait que la tangente en M est normale à la droite NN'. On en conclut que les rayons NM et NN' se correspondent doublement dans les faisceaux N(ABC..) et N(A'B'C'...); ceux-ci sont donc involutifs et les trois points A', B', C' sont en ligne droite C. Servais.

une démonstration synthétique d'une partie des propositions de M. Van Aubel.

1. Rappelons d'abord le théorème général de Grassman :

Etant donnés, dans un même plan, deux triangles quelconques ABC, A'B'C', *le lieu d'un point* M *tel que les droites* MA, MB, MC *rencontrent* B'C', C'A', A'B' *en trois points* 1', 2', 3' *d'une même droite u, est une cubique* Σ, *et la droite u enveloppe une courbe* Σ' *de la troisième classe.*

Désignons par a, b, c, a', b', c', les côtés des deux triangles ABC, A'B'C', et par 1, 2, 3 les points de rencontre de u avec a, b, c. Les couples de sommets opposés A'1', B'2', C'3' du quadrilatère complet $a'b'c'u$ sont projetés à partir de M par trois couples de rayons en involution, et la droite u rencontre les côtés opposés du quadrangle complet ABCM en trois couples de points 11', 22', 33' en involution. Partant de là, on peut définir les courbes Σ, Σ' de la manière suivante :

Etant donnés deux triangles ABC, A'B'C', *le lieu d'un point* M *tel que les droites* MA *et* MA', MB *et* MB', MC *et* MC' *soient conjuguées dans une même involution est la cubique* Σ, *et l'enveloppe d'une droite u qui rencontre les trois couples de côtés opposés des deux triangles en trois couples de points conjugués d'une involution est la courbe* Σ'.

Dans les cas particuliers, si l'une des deux définitions des courbes Σ, Σ' est en défaut, on aura recours à l'autre.

La courbe Σ passe par les sommets des deux triangles, par les points d'intersection des côtés opposés et par les points (BC', B'C), (CA', C'A), (AB', A'B); la courbe Σ' touche les côtés des deux triangles, les droites joignant les sommets opposés et les droites $(bc', b'c)$, $(ca', c'a)$, $(ab', a'b)$.

2. Considérons d'abord le cas particulier de deux *triangles aplatis*, c'est-à-dire de deux triples de points A, B, C, A', B', C' situés respectivement sur les droites v, v', et cherchons le lieu des points M tels que les couples de rayons (MA, MA'), (MB, MB'), (MC, MC') soient en involution.

Tout point de v appartient à ce lieu; car il est le centre d'une *involution décomposable* M (AA', BB', CC'). De même la droite v' fait partie du lieu. On peut conclure de là que la cubique Σ est formée maintenant de trois droites v, v', v''. Il est intéressant de déterminer directement le lieu proprement dit, qui est la droite v''.

Soit D l'intersection des droites v, v', et désignons par D_1, D_1' les points où ces droites rencontrent le rayon conjugué avec la droite MD

dans l'involution M (AA', BB', CC'). D'après un théorème connu, les quaternes de rayons M (ABCD) et M (A'B'C'D'_1) sont projectifs ; donc D'_1 est le point de v' qui correspond au point D de v dans les ponctuelles projectives ABC..., A'B'C'... On verrait de même que D_1 et D sont des éléments homologues de ces ponctuelles. Par conséquent, la droite $D_1 D'_1$ est indépendante de la position particulière de M et forme le lieu cherché. Cette droite a déjà reçu le nom d'*axe projectif* des ponctuelles projectives ABC..., A'B'C'..., parce que les droites joignant inversement deux couples de points homologues se coupent sur cette ligne. Soient N, P, Q les points (BC', B'C), (CA', C'A), (AB', A'B). On s'explique facilement que ces points appartiennent au lieu ; en effet, les trois couples de rayons (NA, NA'), (NB, NB'), (NC, NC'), par exemple, se réduisent à deux couples distincts.

Le lecteur déduira facilement, de ce qui précède, le théorème suivant : *Soient* D_1, D'_1 *deux points quelconques d'une conique ; les droites qui joignent un point* M *de la corde* $D_1 D'_1$ *aux deux points* A, A' *où une tangente variable rencontre les tangentes menées en* D_1 *et* D'_1 *se correspondent dans une involution.*

3. Considérons maintenant un triangle proprement dit ABC et un triangle aplati A'B'C', et cherchons le lieu des points M tels que les couples de droites MA et MA', MB et MB', MC et MC' appartiennent à une même involution. Tout point de la droite A'B'C' appartenant à ce lieu, la cubique Σ est constituée par la droite A'B' et une conique. Nous allons établir directement que le lieu proprement dit est du second ordre.

Soient C_1 un point quelconque de la droite AB, et N, P, Q les points (BC', B'C_1), (C_1A', C'A), (AB', A'B) ; d'après le § 2, le point d'intersection M des droites CC_1, NPQ appartient au lieu considéré. Or, si nous désignons par D le point de rencontre des droites AB, A'B', et par D_1, D'_1 les points où ces droites sont coupées par la droite NPQ, on a (A'B'C'D) = (AB$C_1 D_1$). Il résulte de là que le lieu considéré est engendré par deux faisceaux projectifs C (C_1), Q (D_1) ; c'est donc une conique passant par les points C, Q. En combinant de la même manière la droite A'B'C' avec les côtés BC ou CA du triangle on trouve cette réciproque du théorème de Pascal (appliqué à la conique APCNBQ) :

Étant donné un triangle ABC *et trois points en ligne droite* A', B', C', *les sommets du triangle et les points d'intersection des droites* (BC', B'C), (CA', C'A), (AB', A'B) *sont six points d'une même conique.*

4. Si les points A', B', C' sont à l'infini dans trois directions données x, p, q, on a le cas particulier traité par M. Barbarin (*Mathesis*, (1), II, p. 107) et par M. Van Aubel : *Trouver le lieu d'un point* M *tel que les parallèles menées par ce point aux droites* x, p, q, *rencontrent respectivement les côtés* BC, CA, AB *en trois points* 1, 2, 3 *situés sur une même droite* u.

On vient de voir que ce lieu est une conique. Voici une autre manière de démontrer la même proposition. La droite à l'infini est rencontrée par les droites MA, M1, MB, M2, MC, M3 en trois couples d'une involution, et par les côtés du quadrangle complet MABC en trois couples d'une involution. Ces deux involutions ayant un terne commun A'B'C', on est conduit à la construction suivante : Mener par A des parallèles à p et q, et couper ces lignes en Q et P par une parallèle quelconque à x ; le point d'intersection M des droites BP, CQ appartient au lieu. En effet, la droite à l'infini coupe les côtés du quadrangle complet APQM en trois couples d'une involution, et trois des points d'intersection sont les points A', B', C'. (*A continuer.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

*Question 1334.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 215).

Soient O *le centre d'un carré* ABCD *et* M *un point quelconque de son plan. On a :*

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2+\overline{MD}^2=4\overline{MO}^2+2\overline{AB}^2,$$

$$\overline{MA}^4+\overline{MB}^4+\overline{MC}^4+\overline{MD}^4=4\overline{MO}^4+8\overline{AB}^2.\overline{MO}^2+\overline{AB}^4.$$

(V. Cristesco.)

Solution par MM. A. Droz Farny, Plakhovo, Rose *et* Delahaye. On a

$$\overline{MA}^2+\overline{MC}^2=2\overline{AO}^2+2\overline{MO}^2=\overline{AB}^2+2\overline{MO}^2, \qquad (1)$$

$$\overline{MB}^2+\overline{MD}^2=2\overline{BO}^2+2\overline{MO}^2=\overline{AB}^2+2\overline{MO}^2; \qquad (2)$$

ou, par addition,

$$\Sigma\,\overline{MA}^2=4\overline{MO}^2+2\overline{AB}^2.$$

En élevant les relations (1) et (2) au carré on obtient :

$$\Sigma\,\overline{MA}^4=2\overline{AB}^4+8.\overline{AB}^2.\overline{MO}^2+8.\overline{MO}^4-2\overline{MA}^2.\overline{MC}^2-2\overline{MB}^2.\overline{MD}^2.$$

Abaissons de M la perpendiculaire ME sur AO et MF sur BO; dans les triangles MOA et MOC, on aura :

$$\overline{MA}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{MO}^2 \mp 2AO.OE,$$
$$\overline{MC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{MO}^2 \pm 2AO.OE ;$$

d'où, par multiplication,

$$\overline{MA}^2.\overline{MC}^2 = \overline{AO}^4 + \overline{MO}^4 + 2\overline{AO}^2.\overline{MO}^2 - 4\overline{AO}^2.\overline{OE}^2$$
$$= \overline{AO}^4 + \overline{MO}^4 + \overline{AB}^2.\overline{MO}^2 - 2\overline{AB}^2.\overline{OE}^2.$$

De même

$$\overline{MB}^2.\overline{MD}^2 = \overline{AO}^4 + \overline{MO}^4 + \overline{AB}^2.\overline{MO}^2 - 2\overline{AB}^2.\overline{OF}^2,$$

donc

$$\overline{MA}^2.\overline{MC}^2 + \overline{MB}^2.\overline{MD}^2 = 2\overline{AO}^4 + 2\overline{MO}^4 + 2\overline{AB}^2.\overline{MO}^2 - 2\overline{AB}^2\,\overline{MO}^2$$
$$= \frac{\overline{AB}^4}{2} + 2\overline{MO}^4.$$

Par conséquent,

$$\Sigma\overline{MA}^4 = 2\overline{AB}^4 + 8\overline{AB}^2.\overline{MO}^2 + 8\overline{MO}^4 - \overline{AB}^4 - 4\overline{MO}^4$$
$$= \overline{AB}^4 + 8\overline{AB}^2.\overline{MO}^2 + 4\overline{MO}^4.$$

Généralisation par M. Laisant. Soit ABC ... un polygone régulier de centre O et de rayon a; soit M un point quelconque du plan. Appelons α l'angle de OA avec OM, et l la longueur de OM.

On a $\overline{MA}^2 = l^2 + a^2 - 2al\cos\alpha$; étendant cette relation aux n sommets du polygone, et tenant compte de $\Sigma\cos\alpha = 0$, on a

$$(1) \qquad \Sigma\overline{MA}^2 = n(l^2 + a^2).$$

En outre,

$$\overline{MA}^4 = l^4 + a^4 + 2l^2a^2(1 + 2\cos^2\alpha) - 2al(a^2 + l^2)\cos\alpha.$$

Remplaçant $1 + 2\cos^2\alpha$ par $\cos 2\alpha + 2$, et faisant la somme, de même que ci-dessus, nous aurons, en observant que $\Sigma\cos 2\alpha = 0$,

$$(2) \qquad \Sigma\overline{MA}^4 = n(l^4 + a^4) + 4nl^2a^2.$$

Dans le carré ABCD, si l'on pose $AB = c$, on a $n = 4$, $c^2 = 2a^2$, et

$$\Sigma\overline{MA}^2 = 4l^2 + 2c^2, \quad \Sigma\overline{MA}^4 = 4l^4 + 8l^2c^2 + c^4,$$

c'est-à-dire les deux identités demandées.

NOTE. MM. Déprez et Emmerich ont également étendu la question au polygone régulier de n côtés.

Nous extrayons de la solution de M. Emmerich les remarques suivantes :

I. Si l'on pose $\delta = OM$, $r = OA$, et que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désignent les angles MOA, MOB, MOC, ... on a

$$\Sigma \overline{MA}^6 = n(\delta^2 + r^2)^3 + 6n(\delta^2 + r^2)\delta^2 r^2 - 8\delta^3 r^3 \Sigma \cos^3 \alpha.$$

Suivant que $n > 3$ ou $= 3$, $\Sigma \cos^3 \alpha = 0$ ou $= \frac{3}{4} \cos^3 \alpha$.

II. Plus généralement, $\Sigma \overline{MA}^{2r}$ est indépendant de l'angle α ou non suivant que $r < n$ ou $r \geqq n$.

III. Dans le carré,

$$\Sigma \overline{MA}^8 = 4(\delta^2 + r^2)^4 + 48(\delta^2 + r^2)^2 \delta^2 r^2 + 32\delta^4 r^4 (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha).$$

Si δ est donné, $\Sigma \overline{MA}^8$ aura un maximum ou un minimum suivant que M se trouve sur une diagonale ou sur une médiane. Sur la circonférence circonscrite au carré, $\Sigma \overline{MA}^8$ varie entre $18\,\overline{AB}^8$ et $17\,\overline{AB}^8$.

IV. Dans un polygone régulier de n côtés,

$$n^2 \Sigma \overline{MA}^6 = \Sigma \overline{MA}^2 [3n \Sigma \overline{MA}^4 - 2(\Sigma \overline{MA}^2)^2].$$

M. Déprez considère aussi un polygone sphérique régulier; il trouve

$$\Sigma \cos MA = n \cos \delta \cos r,$$

$$\Sigma \cos^2 MA = n[\cos^2 \delta \cos^2 r + \tfrac{1}{2} \sin^2 \delta \sin^2 r].$$

M. Delahaye cherche les relations analogues pour un rectangle de côtés a et b :

$$\Sigma \overline{MA}^2 = 4\overline{MO}^2 + (a^2 + b^2)$$

$$\Sigma \overline{MA}^4 = 4\overline{MO}^4 + \left[\frac{a^2 + b^2}{2}\right]^2 + 2\overline{MO}^2 (a^2 + b^2)[1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta];$$

α et β désignent les angles MOA, MOB. Il rappelle les formules de M. Déprez (*Mathesis*, (1) V, p. 237) :

$$\frac{b}{a}(\cot \alpha + \cot \gamma)^{-1} + \frac{a}{b}(\cot \beta + \cot \delta)^{-1} = 1,$$

$$(\cot \alpha' + \cot \gamma')^{-1} + (\cot \beta' + \cot \delta')^{-1} = \frac{b}{a},$$

$$(\operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg} \delta')^{-1} + (\operatorname{tg} \beta' + \operatorname{tg} \gamma')^{-1} = \frac{a}{b},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignent les angles AMB, BMC, CMD, DMA, et $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ les angles MAB, MCD, MBA, MDC.

Question 1361.

(Voir *Mathesis*, (3), t. II, p. 80.)

Etant données deux sphères égales, il existe en nombre infini (indépendamment de la rotation possible autour de la ligne des centres) de tétraèdres dont les arêtes sont tangentes aux deux sphères. (G. Fontené.)

Solution par M. Absolonne. La perpendiculaire commune à la ligne des centres et à une tangente aux deux sphères tombe aux milieux de ces droites. Si l'on fait tourner la tangente autour de la ligne des centres, elle engendre un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Les tangentes communes forment donc un système d'hyperboloïdes de révolution, avec, comme cas particuliers, un cône et un cylindre.

Considérons une génératrice d'une de ces surfaces, elle rencontre un second hyperboloïde en deux points A et B et les génératrices de ce dernier qui se croisent en A rencontrent celles qui se croisent en B en deux points C et D. Il reste à déterminer à quelle condition CD sera une tangente commune aux deux sphères.

Prenons pour origine le milieu de la ligne des centres, celle-ci étant l'axe des z et appelons l la distance d'un des centres à l'origine.

Prenons pour les équations d'une tangente commune

$$y = a, \quad z = mx;$$

en exprimant qu'elle est tangente à une des sphères, on arrive à la relation

$$m^2 = \frac{l^2 - R^2 + a^2}{R^2 - a^2}.$$

L'équation de l'hyperboloïde engendré par la tangente est

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{m^2} = a^2.$$

La tangente AB ($y = y'$, $z = m'x$) rencontre cette surface en A (x', y', z') et B $(-x', y', -z')$ où les plans tangents ont pour équations

$$xx' + yy' - \frac{zz'}{m^2} = a^2,$$

$$-xx' + yy' + \frac{zz'}{m^2} = a^2.$$

Ils se coupent suivant la droite CD :

$$yy' = a^2, \quad xx' - \frac{zz'}{m^2} = 0$$

ou, en tenant compte de $z' = m'x'$,

$$yy' = a^2, \quad x - \frac{m'}{m^2} z = 0.$$

Pour que CD soit tangente, il faut que

$$\frac{m^4}{m'^2} = \frac{l^2 - R^2 + \frac{a^4}{y'^2}}{R^2 - \frac{a^4}{y'^2}} = \frac{(l^2 - R^2 + a^2)^2 (R^2 - y'^2)}{(R^2 - a^2)^2 (l^2 - R^2 + y'^2)}.$$

Cette relation conduit, après quelques calculs à

$$(a^2 - y^2)^2 [(a^4 + R^2 (l^2 - R^2)] = 0.$$

A côté de la solution $a^2 = y'^2$, on a

$$a^2 = R\sqrt{R^2 - l^2} = Rr.$$

Cette solution n'est réelle que si $R > l$, c'est-à-dire si les sphères se coupent.

Dans ce cas, à toute tangente AB dont la distance à la ligne des centres est comprise entre r et $\sqrt{Rr}$ correspond une tangente CD dont la distance à la ligne des centres est comprise entre $\sqrt{Rr}$ et R. Il y a donc une infinité de tétraèdres dont les arêtes sont tangentes aux deux sphères.

Les quatre arêtes autres que AB et CD appartiennent toutes à un même hyperboloïde dont l'équation est

$$r(R + r)(x^2 + y^2) - R(R - r)z^2 = Rr^2(R + r).$$

En comparant les segments que les sphères déterminent sur les arêtes d'un tétraèdre, on voit que les quatre faces sont des triangles égaux. Le tétraèdre est donc équifacial ou isoscèle.

La projection d'un tétraèdre sur le plan xoz, parallèle à AB et à CD, est un rectangle.

Question 1376.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 152.)

Soit AB *un diamètre fixe d'une circonférence donnée* O. *D'un point quelconque* P *de cette courbe comme centre on décrit une circonférence qui touche la droite* AB. *Trouver analytiquement et géométriquement le lieu des points de rencontre de la circonférence* P *avec la droite* OP. (Retali).

Solution par M. Emmerich. 1° Soient Q, S', S les points où la circonférence mobile touche AB et coupe OP et le prolongement de OP. Comme

$$OS = R + R \sin POQ, \quad OS' = R - R \sin POQ,$$

on a les équations des lieux cherchés :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R \pm \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

lesquelles débarrassées des radicaux prennent la forme

$$(x^2 + y^2)^2 \mp 2Ry\,(x^2 + y^2) - R^2x^2 = 0 ;$$

on en conclut que ces courbes sont les deux cardioïdes passant par A, O, B.

2° Menons le diamètre CD perpendiculaire à AB et abaissons CT, DT' perpendiculaires à OP. Des triangles égaux OPQ, COT, DOT' on conclut que PS = OT, PS' = OT', d'où TS = T'S' = R. Les points S, S' se construisent donc en décrivant les cercles des diamètres OC, OD, et en prolongeant ou raccourcissant les cordes issues de O de OC = OD = R. On se trouve ainsi ramené à la définition ordinaire de la cardioïde.

3° Les parallèles par C et S à OP et CT se coupant en U, on a CU = CO = R. SU étant tangente au cercle de centre C et de rayon R, on en conclut que le lieu des points S, S' se compose des podaires du point O par rapport aux cercles des diamètres OC, OD.

4° Soit M le milieu de OC, et menons MV et SV parallèles à TS, TM respectivement. Si W est le milieu de MV, on démontre aisément que W se trouve sur la circonférence de diamètre OC, que VS = VW, et que angle SVW = OMW. On reconnaît donc la courbe en question comme roulette, ce qui est peut-être la définition la plus connue de la cardioïde.

Solution analogue par MM. Thonet et Rose.

Question 1388.

(Voir *Mathesis* (3); II, p. 216).

Une courbe Δ *étant rapportée à deux axes rectangulaires, soit* M′ *le point où l'ordonnée* MP *d'un point quelconque* M *de* Δ *est rencontrée par la perpendiculaire élevée en* O *sur le rayon* OM; *le point* M′ *décrit une seconde courbe* Δ'. *On demande de trouver la tangente en* M′, *connaissant la tangente en* M. (Petit-Bois.)

Solution par M. V. Retali. La transformation (M, M′) est une inversion de Hirst dont le pôle est à l'infini sur l'axe Oy et la conique des points unis est le cercle-point O (origine). Si μ est le milieu du segment MM′, la tangente en M à la courbe Δ et la tangente en M′ à la courbe correspondante Δ' vont se couper sur la perpendiculaire menée en O à la droite $O\mu$; c'est-à-dire sur la polaire de μ (conjugué harmonique du pôle par rapport à M, M′), par rapport à la conique des points unis.

Solution par M. Claeys. Soient y et y_1 les ordonnées PM, PM′, x l'abscisse commune OP de deux points correspondants M, M′. On a $yy_1 + x^2 = 0$, d'où

$$yy_1' + y_1y' + 2x = 0. \qquad (1)$$

Or, les perpendiculaires abaissées de M′ sur la tangente MT, et de M sur la tangente M′T′ ont pour équations :

$$(Y - y_1)y' + (X - x) = 0, \quad (Y - y)y_1' + (X - x) = 0;$$

les abscisses des points Q′, Q où ces droites rencontrent l'axe des x étant égales à $y_1y' + x$, $yy_1' + x$, on conclut, de l'égalité (1), OQ′ = − OQ. Les points Q, Q′ sont donc symétriques par rapport à O, ce qui permet de construire M′T′ quand on connaît MT.

Solution par M. Verheugen. L'équation de condition $yy_1 + x^2 = 0$ étant dérivée par rapport à x et ensuite divisée par yy_1 on obtient

$$\frac{2}{x} = -\frac{y'}{y} - \frac{y_1'}{y_1}.$$

Or, les sous-tangentes PT, P′T′, aux points M, M′, ont pour expression $-\frac{y}{y'}$, $-\frac{y_1}{y_1'}$; on a donc la relation

$$\frac{2}{OP} = \frac{1}{PT} + \frac{1}{P'T'},$$

d'où l'on conclut que la distance OP est divisée harmoniquement par les symétriques des points T, T' par rapport à O.

Note. La solution de M. Retali peut se déduire des équations des deux tangentes :

$$Y - y = y'(X - x), \quad Y - y_1 = y'_1(X - x);$$

car en les ajoutant multipliées par y_1 et y'_1, on obtient

$$Y(y_1 + y) - 2yy_1 = (y'y_1 + y'_1y)(X - x),$$

d'où, en remplaçant yy_1 par x^2 et $y'y_1 + y'_1y$ par $-2x$,

$$Y(y + y_1) = -2xX,$$

ce qui est l'équation de la perpendiculaire élevée en O sur $O\mu$.

La transformation (M, M') rentre dans la transformation réciproque de M. de Longchamps (J. M. S., 1882, p. 49); deux points correspondants M, M' sont alignés sur un point fixe O', et la droite MM' est vue d'un point fixe O sous un angle droit. M. d'Ocagne (J. M. S., 1885, p. 15) a donné, dans le cas général, la relation suivante : Les tangentes en deux points correspondants M, M' de deux courbes réciproques se coupent sur la droite symétrique de la droite OO' par rapport à la bissectrice de l'angle MOM'. En supposant le point O' à l'infini sur l'axe OY, on obtient la transformation de M. Petit-Bois et la construction de M. Retali.

La méthode de Roberval peut aussi être employée à résoudre la question 1388. En effet, prenons sur la tangente en M à Δ un segment quelconque MV pour représenter la vitesse de M sur sa trajectoire. Décomposons cette vitesse en deux autres, l'une MK normale à OM et l'autre dirigée suivant OM; décomposons-la encore en deux vitesses l'une ML perpendiculaire à l'ordonnée MP, l'autre dirigée suivant MP. Si l'on décompose d'une manière analogue la vitesse correspondante M'V' de M' sur sa trajectoire, on doit avoir ML = M'L', pour que les points M, M' soient constamment sur une même perpendiculaire à OX; les vitesses angulaires des droites OM, OM' étant égales, on doit avoir MK : OM = M'K' : OK'. Il résulte de là que l'angle KOK' est droit; donc le point K' est à l'intersection des perpendiculaires élevées en O sur OK et en M' sur OM'. De plus, le point V' est à l'intersection de VL avec la parallèle à OM' par K'.

La théorie des coniques fournit également une solution. En effet, lorsque le point M parcourt la tangente MT à Δ, le point M' parcourt

une conique (hyperbole), car il est l'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux projectifs ayant pour sommets le point O et le point à l'infini I de OY. Plaçons M successivement à l'infini sur MT et aux points de rencontre de MT avec les axes OX, OY; nous verrons ainsi que la conique (M') passe par le point J' situé à l'infini dans la direction perpendiculaire à MT et par le point I, et qu'elle touche OX en O. Nous avons ainsi un quadrilatère inscrit à la conique, à savoir OIM'J', et la tangente en O. Les tangentes aux sommets O, M' se coupent sur la droite joignant les points de concours des côtés opposés (OI, M'J'), (IM', OJ'). Donc si la perpendiculaire abaissée de M' sur MT coupe OY en F, la droite joignant F au milieu de OM' coupe OX au même point que la tangente en M' à la conique.

Cette dernière droite résout le problème proposé. (J. N.)

Une autre solution par M. Van Cauwenberghe sera publiée ultérieurement.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE, EN 1902.

(*Section d'infanterie et de cavalerie*)

I. ***Calcul logarithmique.*** On demande de calculer la valeur de x donnée par la formule

$$\cot x = \frac{\cot A}{a}\sqrt[5]{\frac{\sin B}{\operatorname{tang} C \cdot \cos D}},$$

dans laquelle $a = 1,2824$, $A = 32^\circ\,25'\,10''$, $B = 28^\circ\,41'\,50''$, $C = 22^\circ\,41'\,17''$, $D = 72^\circ\,55'\,45''$.

II. ***Arithmétique.*** 1. Démontrer que le produit de deux ou de plus de deux nombres entiers est indépendant de l'ordre des facteurs. — Le théorème s'étend-il au cas du produit de plusieurs nombres fractionnaires? Justifiez votre réponse.

2. Un phénomène astronomique a commencé le 15 janvier à midi 55′ et s'est terminé au mois de février de la même année. Sa durée comprend un nombre entier d'heures, plus une fraction d'heure, égale à un certain nombre inconnu de minutes que l'on désignera par m.

On demande de déterminer la date, l'heure et la minute de la fin

du phénomène, sachant que sa durée totale exprimée en minutes seulement est égale au produit de m par une puissance de 10.

III. *Algèbre.* 1. Qu'entend-on par annuité? Établir la formule générale des annuités. Comment résout-on les problèmes suivants auxquels elle donne lieu : 1° Calcul de l'annuité; 2° Calcul de la somme à emprunter; 3° Calcul du temps.

2. On considère le système d'équations

$$\begin{aligned} ax + y + z &= a, \\ ax + ay + z &= 1, \\ x + ay + az &= 1, \\ x + y + az &= a. \end{aligned}$$

1° Montrer que si a est différent de ± 1 ces quatre équations admettent un système de solutions communes. Trouver ces solutions.

2° Montrer que si $a = \pm 1$, ces équations admettent une infinité de solutions. Indiquer, dans chaque cas, le nombre d'inconnues auxquelles on peut donner des valeurs arbitraires.

IV. *Géométrie.* 1. Démontrer que si deux trièdres ont leurs angles plans égaux chacun à chacun, les angles dièdres opposés aux angles plans égaux sont égaux.

2. Étant donnés deux cercles tangents extérieurement, construire une droite qui soit tangente à l'un des deux cercles et qui coupe l'autre en deux points B et C de telle sorte que, A étant le point de tangence de la droite avec le premier cercle, le produit AB $\times$ AC ait une valeur donnée K^2. Discuter la solution trouvée. Indiquer la plus grande valeur possible de K en fonction des rayons des deux cercles.

V. *Trigonométrie.* 1. On donne les trois angles et le périmètre d'un triangle; on demande d'établir des formules calculables par logarithmes pour en exprimer l'aire et les trois côtés.

2. Étant donnée l'équation

$$(m+1)\cos 2x - 8m\left(\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}\right) + 9m - 7 = 0,$$

calculer cos x. Pour quelles valeurs de m le problème est-il possible? Achever la résolution de l'équation dans le cas où $m = \frac{3}{5}$.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

1071. Vérifier que l'équation

$$x^3 + 3x(1 - m^2) + 2m(1 - m^2) = 0$$

admet la solution

$$\sqrt[3]{m^2 - 1}\ (\sqrt[3]{m + 1} + \sqrt[3]{m - 1}).$$

1072. Discuter le système :

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 3z &= a, \\ 5x + 2y + z &= b, \\ ax + by + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Système impossible si $a = 3b$.

1073. Construire un triangle ABC, connaissant le centre O' du cercle des neuf points et les centres O_a, O_b des cercles circonscrits aux triangles BCH, CAH. (Ed. Times).

Les droites AH, BH, CH étant équipollentes aux droites OO_a, OO_b, OO_c, les triangles ABC, $O_aO_bO_c$ sont symétriques par rapport à O'. On peut donc obtenir immédiatement les points A, B des cercles (O_a, O_aB), (O_b, O_bA), qui ont même rayon et se coupent en C.

1074. Déterminer les constantes de manière que les fonctions

$$\text{arc tg}\,\frac{px}{x+q}, \quad \text{arc tg}\,(ax + b)$$

aient la même dérivée.

Les conditions cherchées sont

$$p = \frac{1}{b}, \quad q = \frac{b^2 + 1}{ab}.$$

On *identifie* les deux dérivées, ou l'on exprime que les deux fonctions ont une différence constante, en s'appuyant sur la formule

$$\text{arc tg}\,\alpha - \text{arc tg}\,\beta = \text{arc tg}\,\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}.$$

1075. Si n est un nombre impair premier avec 3 et 7, $n^6 - 1$ est divisible par 168.

1076. Pour quelles valeurs de a l'équation

$$(a - 3)x^2 - 2(a - 1)x + 4a - 3 = 0$$

a-t-elle une racine et une seule comprise entre 2 et 3?

Réponse. $\frac{11}{4} < a < \frac{24}{7}$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1393. Par un point fixe P, on mène une droite quelconque u, qui rencontre les faces d'un tétraèdre donné ABCD aux points A_1, B_1, C_1, D_1. Soient A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 les symétriques des points A_1, B_1, C_1, D_1 par rapport à P.

1° Démontrer que les milieux des droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, sont situés dans un même plan, et chercher l'enveloppe de ce plan.

2° Démontrer que les milieux des droites AA'_1, BB'_1, CC'_1, DD'_1 sont les sommets d'un tétraèdre de volume constant. (DÉPREZ).

1394. Par les sommets d'un tétraèdre ABCD on mène des parallèles qui rencontrent les faces opposées aux points A_1, B_1, C_1, D_1; on divise les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 en A_2, B_2, C_2, D_2 dans des rapports donnés a, b, c, d.

1° Démontrer que le volume du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ est indépendant de la direction AA_1, et qu'il en est de même du volume $A_1B_1C_1D_1$ (Voir *Mathesis*, (1), V, p. 94 et (1), X, p. 253). 2° Si A'_2, B'_2, C'_2, D'_2, sont les symétriques des points A_2, B_2, C_2, D_2 par rapport à A, B, C, D, la somme algébrique des volumes des tétraèdres $A'_2B'_2C'_2D'_2$ et $A_2B_2C_2D_2$ vaut le double du volume ABCD. 3° Quelle relation doit-il exister entre a, b, c, d pour que A_2, B_2, C_2, D_2 soient dans un même plan? 4° Trouver dans cette hypothèse l'enveloppe du plan $A_2B_2C_2D_2$, les nombres a, b, c, d restant constants et la direction AA_1 étant variable. (DÉPREZ).

×**1395.** Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et K_1, K_2, K_3 les points de Lemoine des triangles OBC, OCA, OAB. Calculer l'aire du triangle $K_1K_2K_3$. (TUCKER).

×**1396.** On considère les triangles ABC dont la base AB est fixe et l'angle C est constant. Soient D, D' les pieds des bissectrices issues de A. Trouver le lieu du milieu de la distance DD'.

(E. N. BARISIEN).

Rectification. Page 268, ligne 14, au lieu de ABC, lire ACB ; ibid., ligne 17, au lieu de $S = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg} A$, lire $S = \frac{1}{9} a^2 \operatorname{tg} A$. — A mentionner une bonne solution analytique de la question 1355 (*Mathesis*, p. 231) par M. Emmerich.

SUR QUELQUES CAS PARTICULIERS D'UN THÉORÈME DE GRASSMANN,

par M. J. Neuberg.

(*Suite et fin;* voir *Mathesis*, p. 250.)

5. Prenons pour u, p, q les trois droites qui joignent les sommets du triangle ABC à un même point N, et soient A_1, B_1, C_1 les points où les parallèles menées par N aux droites MA, MB, MC (§ 4) rencontrent respectivement BC, CA, AB. Le faisceau M (A1, B2, C3) étant involutif, il en est de même du faisceau N (AA_1, BB_1, CC_1); par suite, les points A_1, B_1, C_1 sont en ligne droite.

Lorsque la droite PQ (§ 4) se déplace parallèlement à u, les droites BQ, CP se correspondent dans deux faisceaux projectifs; par conséquent, leurs parallèles NB_1, NC_1 marquent sur CA, AB deux ponctuelles projectives, et la droite $A_1B_1C_1$ enveloppe une conique qui touche CA, AB et BC.

6. Dans la seconde définition de la cubique de Grassmann, les points A et A', B et B', C et C' jouent le même rôle; par suite, on obtient la même courbe en associant dans la première définition les triangles ABC' et A'B'C, ou AB'C et A'BC', ou A'BC et AB'C'.

On voit par là que cette courbe se décompose en une droite et une conique lorsque le sommet de l'un des triangles ABC, A'B'C' est sur le côté opposé du second triangle (§ 3).

7. Nous allons maintenant traiter directement les cas particuliers de la courbe Σ'; on pourrait aussi les déduire par voie de dualité de ceux de la courbe Σ.

Considérons donc trois droites a, b, c issues d'un même point S, et trois droites a', b', c' issues d'un second point S'. Soient 1, 2, 3, 1', 2', 3' les points où elles sont rencontrées par une même droite u; nous étudions les droites u telles que les couples 11', 22', 33' sont en involution.

Pour toute droite passant par S ou par S', on obtient une involution décomposable (S1', S2', S3') ou (S'1, S'2, S'3); il résulte de là que la courbe Σ', de la troisième classe, se décompose en trois points S, S', S''. Il est intéressant de démontrer directement que les droites u qui ne passent ni par S ni par S' convergent en un point fixe. A cet effet, appe-

lons d la droite SS', D le point où elle rencontre u, D' le conjugué de D dans l'involution (11', 22', 33'), d_1 et d'_1 les droites SD', S'D'. Comme (123D) = (1'2'3'D'), (123D') = (1'2'3'D), on a $(abcd) = (a'b'c'd'_1)$, $(abcd_1) = (a'b'c'd)$; par conséquent, le point D' est à l'intersection du rayon qui correspond à d considéré tour à tour comme faisant partie de l'un ou l'autre des faisceaux projectifs $(abc\ldots)$, $(a'b'c'\ldots)$. On sait que ce point, appelé *centre projectif* de ces faisceaux, est à l'intersection des droites joignant les couples de points $(bc', b'c)$, $(ca', c'a)$, $(ab', a'b)$...

8. Considérons ensuite un triangle proprement dit ABC (côtés a, b, c) et un terne de droites a', b', c' concourant en un même point S'. Soit u une droite qui rencontre a, b, c, a', b', c' en six points 1, 2, 3, 1', 2', 3' d'une involution. L'enveloppe de u, qui est de la troisième classe dans le cas de deux triangles proprement dits, se compose maintenant du point S' et d'une conique. Pour déterminer directement cette conique, donnons-nous le point 3 de u sur c et appelons c_1 la droite C3. La droite u, qui coupe les deux ternes abc_1, $a'b'c'$ en deux ternes conjugués d'une involution, doit passer par le point de rencontre C_1 des droites $(ab', a'b) \equiv m$, $(bc', b'c_1) \equiv n$. Or, lorsque le point 3 se déplace sur c, les points 3 et C_1 décrivent des ponctuelles projectives sur c et m, car le point bc' est fixe et la droite n projette à partir de ce point la ponctuelle marquée par C_1 sur b'.

On peut déduire de là une réciproque du théorème de Brianchon.

×SUR LA MÉTHODE ANALYTIQUE DES ANCIENS

I.

La méthode analytique de Duhamel, par réduction.

Duhamel a écrit, vers la fin de sa vie, un livre excellent, mais un peu long, intitulé : *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* (Paris, Gauthier Villars, 1865 sqq., cinq volumes) où il a réuni l'ensemble de ses idées sur l'enseignement des mathématiques.

La première partie, intitulée : *Des méthodes communes à toutes les sciences de raisonnement*, contient sept ou huit chapitres consacrés à la méthode analytique et à la méthode synthétique.

Duhamel expose celle-ci comme on l'a toujours fait : « Cette méthode,

dit-il, consiste à partir de propositions reconnues vraies, à en déduire d'autres comme conséquences nécessaires, de celles-ci de nouvelles, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne à la proposée, qui se trouve alors reconnue elle-même comme vraie. Elle n'est donc autre chose qu'une méthode de *déduction* » (p. 51). — S'il s'agit de la solution d'un problème « la méthode synthétique consiste à partir » d'un problème qu'on sait résoudre, « à déduire de sa solution, celle » d'un second, « de celle-ci celle » d'un troisième « jusqu'à ce qu'on arrive au proposé dont on obtient ainsi la solution » (p. 53).

L'exposé que fait Duhamel de la méthode analytique est au contraire différent de ce que l'on appelait ainsi dans l'antiquité. « Lorsque l'on aura à trouver, dit-il, la démonstration d'une proposition énoncée, on cherchera d'abord si elle peut se déduire comme conséquence nécessaire de propositions admises, auquel cas elle devra être admise elle même et sera par conséquent démontrée. Si l'on n'aperçoit pas de quelles propositions connues elle pourrait être déduite, on cherchera de quelle proposition non admise elle pourrait l'être, et alors la question sera ramenée à démontrer la vérité de cette dernière. Si celle-ci peut se déduire de propositions admises, elle sera reconnue vraie, et par suite la proposée : sinon, on cherchera de quelle proposition non encore admise elle pourrait être déduite et la question sera ramenée à démontrer la vérité de cette dernière. On continuera jusqu'à ce que l'on parvienne à une proposition reconnue vraie ; et alors la vérité de la proposée sera démontrée. » (pp. 40-41) « L'analyse n'est donc qu'une méthode de *réduction* » (p. 41).

Duhamel expose ensuite la méthode analytique pour la résolution des problèmes : « elle ramène le problème proposé à une suite d'autres, jusqu'à ce que l'on en trouve un qu'on sache résoudre » (p. 43).

En résumé, pour Duhamel, l'analyse ne diffère de la synthèse que par le renversement de l'ordre des théorèmes ou des problèmes. Dans la synthèse, on part d'une proposition connue A; on en déduit une autre B; de B, une troisième C; de C, une quatrième D; de D, une cinquième E; E était le but à atteindre. Dans l'analyse, on remarque que E est une suite de D, D de C, C de B, B de A.

Mais après ce premier exposé de *sa* méthode analytique, il en fait un second et un troisième et dans ceux-ci il s'agit de la vraie méthode analytique des anciens.

Voici le second en abrégé : Si la dépendance des propositions succes-

sives peut être renversée, si non seulement E est une conséquence de D, mais si de plus E a D pour conséquence, s'il en est de même pour D et C, C et B, B et A, « on peut dire que la méthode analytique consiste à établir une suite de propositions dont la première soit celle qui est à démontrer, E, et telle que la seconde D se déduise de la première E, la troisième C, de la seconde D, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on parvienne à une proposition A reconnue vraie » (p. 42; nous ajoutons les lettres A, B, C, D, E au texte de Duhamel).

Après ce second exposé de la méthode analytique, Duhamel en fait un troisième, qui s'écarte encore plus du premier que le second : « *Il est souvent beaucoup plus commode, dit-il, de déduire une conséquence d'une proposition que d'en trouver une autre dont celle-ci serait la conséquence. Dans ce cas, on pourra employer la seconde manière de procéder pour toutes les propositions successives* » (p. 42). D'une proposition E (théorème à démontrer, problème à résoudre), on déduira donc une série de conséquences D′, C′, B′, A′ dont la dernière sera un théorème connu ou un problème que l'on saura résoudre. Mais comme le remarque Duhamel, il faudra s'assurer de la réciprocité, et voir si l'on peut descendre de A′ à E, par le chemin A′, B′, C′, D′, E. Autrement dit, *l'analyse entendue ainsi doit être complétée par une synthèse* (p. 42, 46, 47). Pour les problèmes, en particulier, on doit examiner, dans les transformations successives de la question primitive, si on n'a pas laissé de côté certaines solutions, si l'on n'en a pas introduit d'étrangères.

Il est évident que la méthode analytique entendue dans le dernier sens est la vraie méthode d'invention; la méthode synthétique si excellente pour exposer la science, est *tout à fait dérisoire*, comme dit Duhamel (p. 54) quand il faut démontrer une proposition soupçonnée ou résoudre une question proposée; car comment deviner la proposition A qui doit conduire au but, par le chemin ABCDE?

Mais il en est de même, très souvent, de la *méthode de réduction*, appelée méthode analytique par Duhamel. En général, quand on cherche quelque chose, au lieu de remonter péniblement de E à D, de D à C, de C à B, de B à A, on aime mieux déduire de E, parce que c'est plus facile, la suite des conséquences D′, C′, B′, A′ sans s'inquiéter à chaque pas de la légitimité de la déduction inverse. Une fois arrivé à A′ supposé connu, on tâche d'en déduire E, par le chemin B′, C′, D′, E. Si l'on

ne réussit pas, on essaye un autre chemin. En tout cas, on sait qu'il y a une relation logique entre E et A′ et, en pratique, c'est très important.

Il y a donc du tâtonnement, de la divination, de l'expérimentation dans la méthode analytique entendue ainsi.

II.

La méthode analytique des anciens, par déduction.

Mais la troisième méthode analytique de Duhamel, celle qui procède par déduction de l'inconnu au connu, et qui doit être suivie d'une synthèse, la vraie méthode d'invention, la seule qu'il soit souvent possible de pratiquer, est-ce bien celle des Anciens?

Oui certainement, et Duhamel cite les textes décisifs d'Euclide et de Pappus qui y sont relatifs, mais trompé par une mauvaise traduction latine de Halley pour le texte de Pappus, il attribue aux anciens une erreur puérile de logique; il croit que Pappus regarde un théorème comme prouvé si l'on est parvenu à en déduire légitimement un autre théorème vrai! Il n'en est rien, comme on va le voir.

Euclide se contente de définir sommairement les deux méthodes, après la proposition V de son livre XIII : « Dans l'analyse, on prend comme accordé ce qui est demandé, parce que l'on arrive de là à quelque vérité qui est accordée. Dans la synthèse, on prend ce qui est accordé, parce qu'on arrive de là à la conclusion ou à l'intelligence de ce qui est demandé » (*).

Les deux méthodes comme on le voit sont *déductives*, l'une à partir de ce que l'on doit démontrer ou trouver, l'autre à partir de ce qui est démontré ou trouvé. En pratique, toute question exposée analytiquement par Euclide est ensuite traitée par lui au moyen de la méthode synthétique.

Voici le passage essentiel de Pappus sur l'analyse (nous corrigeons la traduction de Duhamel, au moyen du texte grec et de la traduction latine de Hultsch) : « Il y a deux genres d'analyse, l'une pour les théorèmes, l'autre pour les problèmes. Dans la première, on suppose

(*) Traduction de Peyrard de son texte grec, qui vaut mieux ici, comme en plusieurs autres endroits, que celui qui a été admis dans des éditions plus récentes.

vraie la chose en question, on regarde comme vraies les conséquences qui s'en déduisent, comme elles le sont, en effet, par hypothèse ; nous avançons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à quelque chose de vrai, TEL QUE(*) sa vérité entraîne la vérité de la chose proposée; la démonstration se fera en sens inverse de l'analyse. Mais si nous sommes parvenus à une chose reconnue fausse, la proposée sera fausse elle-même ». Pappus s'occupe ensuite de la méthode analytique pour les problèmes.

Comme on le voit, pour les anciens, l'analyse est une *méthode de déduction*; quand elle conduit à une proposition fausse, elle se suffit à elle-même, c'est la *réduction à l'absurde;* quand elle conduit à une proposition vraie, elle ne se suffit pas à elle-même : la démonstration doit se faire par synthèse, en sens inverse.

Duhamel cite (pp. 76-77) et critique à tort (p. 78) un passage de la *Logique de Port Royal* où l'analyse des anciens est bien exposée : « On peut comprendre par là ce que c'est que l'analyse des géomètres. Car voici en quoi elle consiste. Une question leur ayant été proposée dont ils ignorent la vérité ou la fausseté, si c'est un théorème; la possibilité ou l'impossibilité, si c'est un problème, ils supposent que cela est comme il est proposé ; et examinant ce qui s'ensuit de là, s'ils arrivent à quelque vérité claire dont ce qui leur est proposé soit une suite nécessaire, ils en concluent que ce qui leur est proposé est vrai; et reprenant ensuite par où ils avaient fini, ils le démontrent par l'autre méthode qu'on appelle de *composition* [= synthèse]. Mais s'ils tombent par une suite nécessaire de ce qui est proposé, dans quelque absurdité ou impossibilité, ils en concluent que ce qu'on leur avait proposé est faux et impossible. Voilà ce qu'on peut dire généralement de l'analyse, *qui consiste plus dans le jugement et dans l'adresse de l'esprit que dans des règles particulières*. »

Lors de l'invention des notations algébriques par Viète et ses contemporains, on remarqua bien vite que la méthode employée en algèbre pour résoudre les équations est purement analytique dans le sens des anciens. On suppose, en effet, qu'il existe une quantité x, qui vérifie une équation proposée, celle-ci, par exemple,

$$x^2 - 6x = 16,$$

(*) Au fond, Halley et Duhamel ont supprimé ces deux mots.

et l'on déduit de cette relation, supposée vérifiée, successivement

$$x^2 - 6x + 9 = 25$$
$$x - 3 = \pm 5,$$
$$x = 8, \quad x = -2.$$

On prouve ensuite qu'inversement les deux dernières relations entraînent la première, par une *synthèse* qui suit l'*analyse* qui a conduit à la solution.

On a très bien vu aussi à cette époque que l'analyse est la vraie méthode d'invention : *tota ars analytica*, dit Viète, *doctrina bene inveniendi in mathematicis*.

III.

Exemple.

Si l'on joint le centre d'un cube à ses six sommets par des droites, ces droites déterminent des plans qui divisent le cube en six pyramides à base carrée, égales entre elles. Le volume de chacune des pyramides est donc le sixième de celui du cube ; par suite, *il est égal au tiers du produit de la base par la hauteur de la pyramide.*

C'est, sans doute, de cette manière que l'on a trouvé pour la première fois le volume d'une pyramide particulière, car il ne semble pas qu'un autre prisme que le cube se laisse décomposer en pyramides égales.

Mais comment a-t-on pu établir le *théorème général*, pour une pyramide quelconque, par exemple, pour une pyramide triangulaire ?

Si l'on procède, comme Duhamel, par réduction, on doit chercher de quelles propositions on pourrait déduire le théorème soupçonné : *le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de la base par la hauteur*. On trouve assez naturellement que pour démontrer ce théorème, il faudrait établir préalablement les suivants : *une pyramide triangulaire est le tiers du prisme de même base et de même hauteur ; deux pyramides de même hauteur et de bases équivalentes sont équivalentes*. Malheureusement, la dernière proposition ne semble plus réductible à aucune proposition antérieure. On sait d'ailleurs que ce n'est pas ainsi que les Anciens ont procédé.

Voici comment on peut mettre sous forme analytique la démonstration d'Eudoxe qui nous a été conservée par Euclide.

Soit une pyramide SABC dont nous poserons pour abréger la base ABC = K, la hauteur égale à h (Le lecteur est prié de faire la figure). Soient a, b, c, α, β, γ les milieux des arêtes SA, SB, SC, BC, CA, AB; menons ab, bc, ca, $b\gamma$, $c\beta$, $\beta\gamma$, $b\alpha$, $a\gamma$. La pyramide sera divisée en deux pyramides égales

$$Sabc, \quad b\mathrm{B}\gamma\alpha,$$

et en deux prismes triangulaires

$$abc\mathrm{A}\gamma\beta, \quad b\gamma ac\beta\mathrm{C},$$

équivalents comme moitiés de parallélipipèdes équivalents. Ces prismes sont d'ailleurs plus grands que les pyramides.

D'après l'hypothèse,

$$\text{vol. SABC} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{K}h,$$

et, de même, aisément, d'après la même hypothèse,

$$\text{vol. } b\mathrm{B}\gamma\alpha = \text{vol. } Sabc = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}\,\mathrm{K}\cdot\tfrac{1}{2}\,h = \tfrac{1}{24}\,\mathrm{K}h.$$

Il en résulte pour le volume de chacun des deux prismes partiels

$$\text{vol. } abc\mathrm{A}\gamma\beta = \text{vol. } b\gamma ac\beta\mathrm{C} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{K}h - \tfrac{1}{12}\,\mathrm{K}h\right) = \tfrac{1}{8}\,\mathrm{K}h.$$

Or, *il en est vraiment ainsi;* car le prisme $abc\mathrm{A}\gamma\beta$, par exemple, a une base égale à $\frac{1}{4}$ K, une hauteur égale à $\frac{1}{2}\,h$, et, par suite, un volume $\frac{1}{8}\,\mathrm{K}h$.

L'*hypothèse que le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de la base par la hauteur, nous a donc conduit à une proposition vraie*, savoir à celle qui exprime le volume du prisme.

Mais la déduction inverse, la synthèse qui doit compléter l'analyse, n'est pas simple du tout et elle implique au fond une infinité de propositions. Appelons V le volume de la pyramide primitive, P_1 celui de chacun des deux prismes partiels, V_1 celui de chacune des deux pyramides partielles; P_2, V_2 les volumes analogues que l'on peut former dans V_1, P_3, V_3 ceux que l'on peut former dans V_2 et ainsi de suite. On trouve, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= 2\mathrm{P}_1 + 2\mathrm{V}_1, & 2\mathrm{P}_1 &= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{K}h, \\ 2\mathrm{V}_1 &= 4\mathrm{P}_2 + 4\mathrm{V}_2, & 4\mathrm{P}_2 &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\,\mathrm{K}h, \\ 4\mathrm{V}_2 &= 8\mathrm{P}_3 + 8\mathrm{V}_3. & 8\mathrm{P}_2 &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\,\mathrm{K}h, \\ &\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

et, par sommation, en observant que $2^n \cdot V_n < \frac{1}{4^n} K\lambda$, a une limite nulle pour n indéfiniment croissant,

$$V = \tfrac{1}{4} K\lambda \left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.}\right) = \tfrac{1}{3} K\lambda.$$

***

En résumé, la méthode analytique de Duhamel est une méthode par réduction, équivalente à une synthèse; elle se suffit à elle-même, mais est d'un usage difficile.

La méthode analytique des anciens est une méthode par déduction, qui ne se suffit pas à elle-même et qui doit être complétée par une synthèse. Elle est d'un usage plus facile que la méthode par réduction, bien que parfois la synthèse qui doit la compléter soit difficile à découvrir, comme le prouve l'exemple précédent.

La résolution des équations se fait essentiellement par la méthode analytique des anciens; mais en pratiquant celle-ci, on ne doit pas oublier, comme on le fait trop souvent dans les manuels, que l'analyse doit être suivie d'une synthèse ou vérification des résultats trouvés, sans quoi l'on risque de laisser échapper des solutions ou d'en introduire d'étrangères. (P. M.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

18. Théorèmes de M. Van Aubel. (Démonstration géométrique).

Étant donnés un triangle ABC *et trois points en ligne droite* A′, B′, C′, *le lieu des points* M *tels que les couples* MA *et* MA′, MB *et* MB′, MC *et* MC′ *sont en involution est une conique* (*).

On désigne par P, Q, R, R′ les points (BC′, B′C), (AC′, A′C), (AB′, A′B), (AB, A′B′); le quadrilatère complet ABA′B′ donne l'involution M(AA′, BB′, RR′) qui a deux couples communs avec l'involution M(AA′, BB′, CC′) et, par suite, est identique à la première. On en conclut

$$M(ABCR) = M(A'B'C'R') = C^{te}.$$

Le lieu de M est une conique Σ circonscrite au quadrangle ABCR; elle passe par les points P et Q analogues à R.

Si les droites AA′, BB′, CC′ concourent en N, les triangles ABC′ et

(*) J. Neuberg. *Sur quelques cas particuliers d'un théorème de Grassmann. Mathesis* (3) II, p. 252.

A'B'C sont homologiques; par suite, les points R', P, Q sont en ligne droite et les couples AP, BQ, CR sont en involution sur la conique Σ; les droites AP, BQ, CR passent donc par le pôle S de la droite A'B'C' par rapport à Σ. Si on représente par A'', B'', C'' les points d'intersection de la droite A'B'C' avec AM, BM, CM, les couples A'A'', B'B'', C'C'' sont en involution par hypothèse; par suite, les droites NA'', NB'', NC'' coupent respectivement BC, CA, AB, en trois points A_1, B_1, C_1 collinéaires. Si M décrit Σ, les ponctuelles (A'') et (B'') sont projectives, les ponctuelles (A_1) et (B_1) jouiront donc de la même propriété, et la droite $A_1B_1C_1$ enveloppe une conique Σ' inscrite au triangle ABC. Les points de contact des côtés BC, CA, AB sont respectivement sur les droites joignant le point N aux points de rencontre de la droite A'B'C' avec AP, BQ, CR. Il suffit de placer le point mobile M successivement en P, Q, R. Soient E et F les points d'intersection de A'B'C' avec la conique Σ, les droites NE et NF sont tangentes à Σ; car si M vient en E les points A'' et B'' coïncident(*).

Si la droite A'B'C' est à l'infini, on retrouve les théorèmes de M. Van Aubel (*Mathesis* (3), II, p. 246). C. SERVAIS.

BIBLIOGRAPHIE.

Die analytische Geometrie des Raumes, von Dr RUDIO, Professor am Polytechnicum in Zurich. Dritte Auflage. Leipzig, Teubner, 1901 (x-186 p. in-8°). Prix : 3 marcs.

Un compte rendu de la seconde édition de cet ouvrage élémentaire, publiée dans *Mathesis* 1900 (2), X, p. 161, a fait ressortir les qualités qui le distinguent et l'esprit dans lequel il est conçu.

L'auteur, dans la troisième édition, sans modifier le plan primitif qu'il s'était imposé, a étendu la théorie des surfaces du second degré, remanié consciencieusement divers paragraphes dont plusieurs ont une rédaction entièrement nouvelle. Le public continuera à accueillir avec faveur l'ouvrage de M. Rudio. (C. S.).

Modern Geometry of the point, straigt line, and circle. An elementary Treatise by J. A. THIRD, M. H., Headmaster of Spier's School, Beith. William Blackwood and Sons, Edinburgh and London, 1898 (VIII-287 pages, crown 8vo).

(*) Dans le cas particulier où N est l'orthocentre du triangle ABC, p. 248, N est un foyer de la conique enveloppe et par suite le centre de cette conique est le centre du cercle des neuf points (C. S).

Sommaire. Chap. I. Segments rectilignes, règle des signes. Principe de généralisation. Chap. II et III. Collinéarité et concurrence. Points, droites et cercles associés au triangle. Chap IV. Antiparallèles. Points inverses. Éléments associés au triangle (suite). Chap. V. Ponctuelle et faisceau harmoniques. Chap. VI et VII. Pôles et polaires, Principe de dualité. Chap. VIII. Rapport anharmonique. Ponctuelles et faisceaux projectifs. Chap. IX. Involution. Chap. X. Cercles orthogonaux. Axe radical, centre radical. Faisceaux de cercles. Chap. XI. Centres, cercles et axes de similitude des cercles. Chap. XII. Inversion. Exercices (plus de 200).

Cette table des matières fait connaître suffisamment le but que l'auteur s'est proposé. L'ouvrage forme un complément nécessaire, indispensable des manuels de géométrie anglais (Euclide). La rédaction en est claire, le choix des questions traitées est excellent, et des exercices nombreux sont proposés sur toutes les parties du livre.

Beknopte Geschiedenis der Wiskunde, door J. Verbluys. Amsterdam, A. Versluys, 1902 (208 p. in-8°). Prix : 2,50 florins = 5,25 fr.

Nous recommandons volontiers ce volume aux étudiants belges. L'auteur a donné un aperçu clair, méthodique sur le développement successif des sciences, s'attachant de préférence aux parties élémentaires et accordant aux savants hollandais plus de pages qu'on ne le fait dans des ouvrages de même étendue. Il a puisé aux meilleures sources : Cantor, Hankel, Nesselmann, Paul Tannery, Gerhardt, Moll, Korteweg, etc. (J. N).

Autres ouvrages récents. 1. **Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen** in der Mathematik und Philosophie von Dr Ph. K. Geissler. Leipzig, Teubner, 1902. (In 8° de VIII-467 p.). Prix : 14 marcs.

2. **Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter** und der Renaissance herausgegeben von M. Curtze. Zweiter Theil. Leipzig, Teubner, 1902 (pp. 337 à 628). Prix : 14 marcs.

Practica geometriae de Leonardo Mainardi de Crémone. — *Algebra* de Initius Algebras.

3 **Sitzungsbericht** der Berliner mathematischen Gesellschaft. Erster Jahrgang. Leipzig und Berlin, Teubner, 1902 (IV-66 pages). Prix : 2 marcs 40.

4. **Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln** und ihre Anwendung auf algebraischen Kurven und Abelsche Integrale von Dr. K. Hensel, Professor an der Universität Berlin und Dr. G. Landsberg, Professor an der Universität Heidelberg. Leipzig, Teubner, 1902 (XVI-708 p. in-8°). Prix : 16 marcs.

5. **I gruppi continui di trasformazioni** (parte generale della teoria), par E. Pascal, Professore nella R. Università di Pavia. Milano, Hoepli, 1903 (XI-358 p. in-18). Prix : 3 lire.

6. **H Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke.** II Band. II Theil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Leipzig, Teubner, 1902 (VIII-266 pp. in-8°, 51 fig.) Prix : 14 marcs.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1339.

(Voir *Mathesis*, (3) I, p. 240).

Etant données deux circonférences concentriques Δ *et* Δ′, *on mène d'un point* A *de la plus grande* Δ *deux tangentes à* Δ′, *qui rencontrent* Δ *en* B *et* D; *les secondes tangentes menées de* B *et* D *à* Δ′ *se coupent en* C. *Démontrer que la tangente en* D *à* Δ, *la droite joignant* C *au point de contact de* AD *et la droite* AB *concourent en un même point.*

(Seydewitz).

Solution par M. C. J. François (La Haye). Soient F le point de contact de AD avec Δ′, E le point de rencontre de DC et AB, G celui de AC et de la tangente en D et enfin Q celui de DG et AB, que nous supposons tomber sur le prolongement de AB. Tirons GB qui sera tangente en B à Δ. L'angle QED est égal à deux fois l'angle EAD (le triangle EDA ayant EA = DE), mais angle GDB = angle EAD = $\frac{1}{2}$ arc DB et l'angle QGB = deux fois l'angle GDB (le triangle GDB ayant GD = GB). Par conséquent, les deux triangles QGB et QED sont semblables, donc :

$$DE : GB = QE : QG, \quad \text{ou} \quad AE : GD = QE : QG.$$

Il résulte de là $AE.QG = QE.DG$, ou, à cause de $DF = AF$:

$$AE.QG.DF = QE.AF.DG.$$

Donc les lignes qui joignent E, G, F aux sommets du triangle DAQ passent par un même point C, ou les trois lignes indiquées dans l'énoncé passent par un même point Q.

Solution par M. Van Cauwenberghe (Gand). Soient M, N, P, Q les points de contact de AD, AB, BC, CD; V et W les intersections de BA et CM d'une part, de CM et de la tangente en D, d'autre part(*).

Nous voyons facilement que CB = CD, CP = CQ; PM est parallèle à BV et QM parallèle à DW. Donc CPM est semblable à CBV, et CQM semblable à CDW.

(*) Soit R le point (AD, CP); la figure NQRM est un parallélogramme; donc le milieu S de QM, pôle de la tangente en D, est en ligne droite avec les pôles N et R de la tangente AB et la droite CM, Ce qui démontre le théorème. (C. S.)

On peut donc écrire les proportions :

$$\frac{BV}{PM}=\frac{BC}{PC}=\frac{VC}{CM}, \qquad \frac{CW}{CM}=\frac{DW}{QM}=\frac{CD}{CQ}=\frac{CB}{CP};$$

Il résulte de là

$$\frac{VC}{CM}=\frac{BC}{PC}=\frac{CW}{CM};$$

donc VC = WC et les droites BA, CM et la tangente en D se coupent en un même point.

Solution par M. Emmerich. Soient E le point de contact de AD, F, G les points de rencontre de la tangente en D et de AD avec BC. Comme AE = ED, BC = CD, AG = BG, angle CDF = π − GDF, on a

$$\frac{AE}{DE}:\frac{AG}{DG}=\frac{BC}{CD}:\frac{BG}{DG}=\frac{BC}{BG}:\frac{CD}{DG}=\frac{BC}{BG}:\frac{FC}{FG}=\frac{BC}{FC}:\frac{BG}{FG}.$$

Les ponctuelles AEDG, BCFG sont donc projectives; leur point de rencontre G étant un élément uni, elles sont perspectives; donc AB, EC, DF passent par un même point.

Solution par M. J. Déprez. E étant le point de rencontre de la tangente en D à Δ avec AB, point que nous supposons tomber sur le prolongement de BA, on a :

$$\textit{angle}\ BAO = OAD = ADO = ODC = \varphi,$$

$$\textit{angle}\ CAE = 2^{dr} - \varphi,\quad DAE = 2^{dr} - 2\varphi,\quad ADC = 2\varphi;\quad ADE = 1^{dr} - \varphi,$$

$$CDE = 1^{dr} + \varphi.$$

Les triangles ACD, AED fournissent les relations :

$$\frac{AC}{CD}=2\cos\varphi, \qquad \frac{AE}{ED}=\frac{1}{2\sin\varphi},$$

donc

$$AC\cdot AE\sin(2^{dr}-\varphi)=DC\cdot DE\sin(1^{dr}+\varphi);$$

les triangles CEA, CED ont donc des aires égales, ils ont même base, donc leurs hauteurs sont égales, et CE passe par le milieu de AD.

MM. Lez et Plakhovo ont résolu la même question par des calculs plus longs.

---

*Question 1344.

(Voir *Mathesis*, (3) I, p. 264.)

Construire un triangle ABC, *connaissant la hauteur* $AA_1 = h$, *la bissectrice* $AD = \alpha$, *et la médiane* $BB_1 = b'$.

Solution par M. Emmerich. Le triangle AA_1D étant donné, on peut trouver les points E, F, où la parallèle par A à BB_1 et la tangente en A au cercle circonscrit rencontrent la base BC. F se détermine comme le sommet du triangle isoscèle ADF, E est donné par la distance $AE = 2b'$. La relation $\overline{AF}^2 = BF.CF$ (1) contenant deux points inconnus B, C peut être simplifiée, si nous prolongeons EF de EF au-delà de F en I. Comme $EF = \frac{1}{3}EI$, $EB = \frac{1}{2}EC$, on a, par addition ou soustraction, suivant les cas, $BF = \frac{1}{2}CI$. L'équation (1) s'écrira donc : $CI.CF = 2\overline{AF}^2$. Si H est le milieu de IF, cette relation prend la forme $\overline{CH}^2 - \overline{FH}^2 = 2\overline{AF}^2$, ou bien $\overline{CH}^2 = 2\overline{AF}^2 + \overline{FH}^2$.

Construction. Menez la perpendiculaire $AL = AF$ sur AF, décrivez le cercle de centre F et de rayon FL qui coupe la perpendiculaire en F sur FD en M, puis menez le cercle de centre H et de rayon HM qui coupe *la direction* FD en C; B enfin est le milieu de EC. — Cette construction suppose que $\alpha > h$. Si $\alpha = h$, le point F s'éloigne à l'infini, mais BB_1 et la hauteur AA_1 se divisent alors dans le rapport 2 : 1 ce qui entraîne un triangle isoscèle bien déterminé.

Discussion. Si $\alpha > h$ et si $b' = \frac{1}{2}h$, les points A_1 et E se confondent, et l'on trouve un triangle ABC dans lequel B est le milieu de A_1C. Si $\alpha > h$ et $b' > \frac{1}{2}h$, on a deux solutions, puisque le cercle de centre A et de rayon $2b'$ donne deux points E_1, E_2.

Prenons F pour origine, FD pour direction positive des abscisses et posons $FD = FA = d$. En désignant l'abscisse du point E (E_1 ou E_2) par e, les points H, C, D, B ont respectivement pour abscisses $-\frac{1}{2}e$, $-\frac{1}{2}e + \sqrt{2d^2 + \frac{1}{4}e^2}$, d, $\frac{1}{4}e + \frac{1}{2}\sqrt{2d^2 + \frac{1}{4}e^2}$, dont les trois dernières sont positives. Si $e = 0$, on a $BC = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$, $AC = AB\sqrt{2}$. Si $e = d$, le triangle ABC dégénère en la droite AD. Si $e = -d$, on a $AC = 2AB$, et BB_1 est perpendiculaire sur AD.

L'inégalité $(d^2 - de)(d^2 - de) > 0$ peut être transformée en

$$\left\{(2d^2 + \tfrac{1}{4}e^2) - (d + \tfrac{1}{2}e)^2\right\}\left\{(2d - \tfrac{1}{2}e)^2 - (2d^2 + \tfrac{1}{4}e^2)\right\} > 0,$$

ou, en écartant les facteurs manifestement positifs,

$$(-\tfrac{1}{2}e + \sqrt{2d^2 + \tfrac{1}{4}e^2} - d)(d - \tfrac{1}{4}e - \tfrac{1}{2}\sqrt{2d^2 + \tfrac{1}{4}e^2}) > 0.$$

On en conclut que le point D est toujours situé entre les points B, C obtenus d'après notre construction. On verrait de même que D n'est pas

situé entre les points B′, C′, où C′ désigne le second point de rencontre du cercle H (de rayon HM) avec la base, et B′ le milieu de EC′.

Note. Posons BD $= x$, DC $= y$, DA$_1 = n$, et admettons l'hypothèse $c > b$, ce qui place A$_1$ et C du même côté de D. La proportion BD : DC $= c : b$ donne successivement

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{(x+n)^2 + h^2}{(y-n)^2 + h^2} = \frac{x^2 + 2nx + \alpha^2}{y^2 - 2ny + \alpha^2} = \frac{\alpha^2 + 2nx}{\alpha^2 - 2ny},$$

ou

$$\alpha^2 (x - y) = 2nxy. \qquad (1)$$

Soit E la projection de B$_1$ sur BC ou le milieu de A$_1$C. La longueur BE est connue; car on peut placer la longueur b' entre BC et la parallèle à BC menée par le milieu de AA$_1$. Soit BE $= q$; nous aurons une seconde relation

$$2x + y = 2q - n,$$

qui, combinée avec (1), conduit aux valeurs de x et y.

On peut aussi ramener le problème à la détermination des éléments doubles de deux ponctuelles projectives superposées. Car deux droites AB′, AC′ symétriques par rapport à AD rencontrent DA$_1$ en deux points B′, C′ qui se correspondent dans deux ponctuelles projectives; et si l'on prend sur DA$_1$ la longueur B′E′ $= q$, E′ et le milieu de A$_1$C′ se correspondent dans deux formes projectives dont le point cherché E est un élément double. (J. N.)

M. Dépaux a résolu la même question.

×QUESTION D'EXAMEN.

1077. Si A, B, C sont les angles d'un triangle, éliminer A, B, C entre les équations

$$\sin 2A \sin A = l \sin B \sin C,$$
$$\sin 2B \sin B = m \sin C \sin A,$$
$$\sin 2C \sin C = n \sin A \sin B.$$

On trouve facilement

$$lmn = 8 \cos A \cos B \cos C,$$
$$(l + m + n) \sin A \sin B \sin C = \Sigma \sin 2A \sin^2 A$$
$$= \tfrac{1}{2} \Sigma \sin 2A (1 - \cos 2A) = \tfrac{1}{2} \Sigma \sin 2A - \tfrac{1}{4} \Sigma \sin 4A$$
$$= 2 \sin A \sin B \sin C + \sin 2A \sin 2B \sin 2C;$$

d'où enfin la relation cherchée

$$l + m + n = 2 + lmn.$$

(*Ed. Times*, avril 1902).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1397. Une droite AB de longueur constante se meut entre deux droites données non situées dans un même plan. Trouver les lieux des foyers et des sommets des ellipses décrites par les différents points de la droite AB.

1398. Résoudre en nombres rationnels l'équation

$$3xy = x^2y^2 + x + y.$$

×**1399.** Parmi tous les rectangles inscrits à un triangle donné ABC et dont un côté repose sur BC, quel est celui qui en tournant autour de AB engendre le volume maximum?

Quel est celui dont le périmètre engendre la plus grande surface.

(J. NEUBERG.)

1400. Soient OA un rayon fixe et OM un rayon variable d'un cercle de centre O. Les bissectrices de l'angle OMA rencontrent OA en B et B'. Le cercle circonscrit au triangle MBB' rencontre la bissectrice intérieure de l'angle MOA en P et Q et la bissectrice extérieure du même angle en S et T. Montrer que 1° le lieu de chacun des points P et Q est une droite; 2° le lieu des points S et T est une hyperbole.

(E. N. BARISIEN.)

Rectifications. 1° Nous avons reçu une bonne solution de la question 1368, par M. Emmerich, de la question 1376, par M. Bastin. 2° La note au bas de la page 250 se rapporte à l'article de M. Van Aubel. 3° M. Ripert a énoncé le théorème relatif à l'hyperbole équilatère dont il est question dans cet article, dans une note qui a paru dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1901, t. XXIX), et dont M. Van Aubel n'a eu connaissance qu'après la publication du dernier numéro de *Mathesis*. 4° Nous avons reçu trop tard pour les mentionner en temps utile de bonnes solutions des questions 1265, 1345, 1365, par M. Prange, professeur à Sourabaja (Java).

TABLE DES MATIÈRES(*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Caractères de divisibilité par un nombre entier quelconque; par M. G. Loria 33
×Quelques propriétés des nombres de Fibonacci, par M. J. Wasteels . . 60
Sur l'équation indéterminée du premier degré, par M. L. Salkin. . . . 107
×Démonstration de quelques théorèmes d'arithmétique, par M. Soons . . 109
Notes d'arithmétique; par M. de Rocquigny-Adanson. 162
Valeur approchée d'une somme algébrique (E. G.) 167
×Question 1366; solution par M. Verheugen 151

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

Sur la théorie des racines égales (P. M.) 57
Exemples de tangentes hyperboliques, par M. G. Fontené 62
Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin. Supplément I. . 1-11
×Question 1310; solutions par MM. Barisien, Gob, etc. 23
×Sur la question 1252, par M. G. Fontené 43
×Question 1349; solution par M. J. Neuberg. 102
×Question 1356; solutions par MM. Pire, E. Cesàro, etc. 124
×Question 1364; solution par M. Audibert 125
×Sur la question d'examen 1050, par M. Cl. Thiry 166

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE; MÉTAGÉOMÉTRIE.

Sur le théorème de Darboux (P. M.) 17
Démonstration du théorème de Pythagore, d'après Möllmann 17
Théorèmes de métagéométrie relatifs aux médianes d'un triangle, par M. C. Wasteels. 39
Sur un certain triangle, par M. G. Fontené 43

(*) Rectifications, pp. 56, 128, 216, 280. Les articles marqués d'une croix n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Sur la similitude des cercles, par M. J. Neuberg 85
Sur les triangles orthologiques, par M. L. Ripert 91
Sur le problème de Malfatti, par M. E. Barisien 92
La géométrographie dans l'espace, par M. E. Lemoine 108
Sur le triangle pseudo-isoscèle, par M. G. Delahaye 112
Construction d'un triangle, par M. Delitala 159
A propos de la ligne de terre, par M. Ad. Mineur 167
Bilatères et trilatères en métagéométrie, par M. Barbarin 187
Question 1333; solutions par MM. Van Cauwenberghe, Emmerich, etc. . 25
Question 1303; solutions par MM. Emmerich, Déprez, etc. 47
Question 1309; solutions par MM. Emmerich, Déprez, etc. 48
Question 1325; solutions par MM. Emmerich, Thiry, etc. 52
Question 1302; solution par M. Emmerich 71
Question 1229; solution par M. G. Gérard 94
Question 1330; solution par MM. Emmerich et Déprez. 95
Question 1337; solution par MM. Emmerich, Déprez, etc. 96
Question 1167; solution par M. J. Neuberg 119
Question 1346; solutions par MM. Rose, Claeys, etc. 122
Question 1239; solutions par MM. Déprez, Lez, etc. 147
Question 1194; solutions par MM. Emmerich, Déprez, etc. 173
Question 1326; solution par M. Emmerich 175
Question 1341; solutions par MM. L. Collette, Emmerich. 177
Question 1358; solutions par MM. Thonet, Claeys 179
Question 1332; solution par M. Emmerich 201
Question 1315; solution par M. Emmerich 204
Question 1347; solution par M. Cristesco 205
Question 1367; solution par M. Emmerich 215
Question 1351; solution par M. Emmerich 229
Question 1368; solution par M. Ripert 236
Question 1334; solutions par MM. Rose, Laisant, etc. 253
Question 1339; solutions par MM. François, Emmerich, etc. 276
Question 1344; solution par M. Emmerich 277

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Sur les triangles trihomologiques, par M. F. Ferrari 5
Un théorème de M. Appell, par M. A. Mineur 13
Relations entre deux systèmes d'axes, par C. Servais 14
Géométrie du triangle ; par M. J. Déprez. 64
Sur une transformation par rapport à une conique, par M. Barisien . . 134
Formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues, par M. A. Demoulin 185
Notes de géométrie, par M. H. Van Aubel. Note par M. Servais. . 246, 273
Sur le quadrilatère complet, par M. J. Neuberg. . . . Supplément I 12-20
Sur les faisceaux de coniques, par M. Cl. Servais . . . Supplément II 1-10
Question 1317; solution par MM. Jerabek et Déprez 49
Question 1323; solutions par MM. Rius y Casas, Pire, etc. 50
Question 1336; solutions par MM. Déprez, Emmerich. 53

Question 1312; solution par M. Rose 63
Question 1188; solution par M. Buysens 93
Question 1343; solutions par MM. Emmerich et Rose. 99, 188
Question 1283; solution par MM. Déprez et Emmerich 143
Question 1353; solution par M. Verheugen 150
Question 1335; solution par M. Droz-Farny 176
Question 1355; solutions par MM. Verheugen, Listray, etc. 231
Question 1361; solution par M. Absolonne 256

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Sur l'astroïde et les astroïdales, d'après M. Böklen. Note de M. Césaro 17, 63
Sur une propriété des ovales de Descartes, par M. G. Teixeira 135
Sur les quadrangles et les quadrilatères paralogiques, par M. J. Neuberg 153
Construction du plan tangent à une surface gauche, par M. A. Claeys . 193
Sur le complexe de Grassmann, par M. J. Neuberg 221
Sur quelques cas particuliers d'un théorème de Grassmann; par M. J. Neuberg 250, 265
Question 1306; solution par M. Emmerich 21
Question 1162; solution par M. Emmerich 45
Question 1324; solutions par MM. Rose et Servais. 72
Question 1328; solutions par MM. Rose et Servais. 73
Question 1342; solution par MM. Déprez et Droz-Farny 77
Question 1348; solution par M. Emmerich 78
Question 1044; solution par M. Absolonne 117
Question 1244; solution par M. Retali 120
Question 1188; solutions par MM. Buysens, Déprez, etc. 170
Question 1350; solutions par MM. Barisien, Déprez 208
Question 1354; solution par MM. Thonet et Jane 211
Question 1376; solution par M. Emmerich 258

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Sur une intégrale, par M. Petit-Bois 42
Sur le théorème de Böklen, par M. E. Cesáro 63
Sur le théorème de Rolle, par M. A. Demoulin. 81
Détermination de quelques classes de surfaces gauches, par M. A. Demoulin 129, 165
Sur le développement de $\cos n\varphi$ suivant les puissances de $\cos\varphi$, d'après Heine 137
Sur le centre de gravité des figures sphériques, par M. C. E. Wasteels 217, 241
Question 1304; solutions par MM. Gob, Retali, etc. 19
Question 1349; solution par M. E. Cesáro 28
Question 1331; solution par M. Emmerich 76
Question d'examen, n° 1037 (J. N.). 91
Question 1327; solution par MM. Rose et Verheugen 145
Question 1362; solution par M. Rose 180
Question 1369; solutions par MM. Rose, Cesáro, etc. 181
Question 1388; solutions par MM. Claeys, Verheugen, etc. 259

BIBLIOGRAPHIE ET BIOGRAPHIE; VARIÉTÉS.

Pages.

A. Del Re. Geometria proiettiva ed analitica (Cl. Servais) 18
Annuaire du bureau des longitudes 18
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, t. VIII, IX (P. M.). 43
G. Vivanti. Teoria delle Funzioni analitiche (P. M.) 68
Stolz und Gmeiner. Theoretische Arithmetik. I Abtheilung. 68
J. Lüroth. Numerisches Rechnen (P. M.) 69
P. Appell. Cours de mécanique. 69
M. Kitt. Politische Arithmetik (E. Fagnart). 90
C. Wargny. Trigonometria plana 91
Hausener. Darstellende Geometrie (J. N.) 114
E. Lemoine. Géométrographie (J. N.) 115
P. Barbarin. La géométrie non euclidienne (P. M.) 115
Ch. Thiry. Opérations de banque (J. Massau) 116
A. Mineur. Trigonométrie (P. M.) 139
H. G. Zeuthen. Histoire des mathématiques dans l'antiquité et au moyen-âge (P. M.) 140
E. Estanave. Thèses de Paris (P. M.). 141
E. Picard. Quelques réflexions sur la Mécanique (P. M.). 142
M. Godefroy. La fonction gamma (P. M.). 143
Un enfant prodige : Joseph Bertrand 167
E. Bardey-Fr. Pietzker. Algebraische Gleichungen (J. N.) 196
A. Baule. Vermessungskunde 196
B. Sellenthin. Mathematischer Leitfaden 197
A. Schülke. Aufgaben-Sammlung 197
E. Hammer. Logarithmen von $[(1+x):(1-x)]$ 198
E. Pascal. Repertorium der höheren Mathematik. Geometrie (P. M.) . . 198
Th. Klompers. Arithmétique commerciale (E. Fagnart) 199
Study. Dynamen. — Fricke und Klein. Automorphe Functionen. — Dickson. Linear Groups. — Ferraris. Electrotechnik. — Killing. Homogene Koordinaten (Annonce) 200
Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens. . 225
J. Tannery et J. Molk. Fonctions elliptiques. T. IV 227
E. Cesáro. Geometria intrinseca. Natürliche Geometrie (A. Demoulin) . 228
Sur la méthode analytique des anciens, par M. P. Mansion 266
Rudio. Analytische Geometrie des Raumes (Cl. S.). 274
J. A. Third. Modern Geometry 274
Versluys. Beknopte Geschiedenis der Wiskunde 275
Geissler. Das Unendliche. — M. Curtze. Urkunden zur Geschichte der Mathematik. — Berliner mathematische Gesellschaft. — Hensel und Landsberg. Algebraische Functionen. — E. Pascal. Gruppi continui di transformazioni. — Grassmann's Werke (Annonce) 275
Le centenaire d'Abel, par P. Mansion . . . . . Supplément III, 1-16

×QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 1031-1038, 983, 1039-1041, 4042-45, 1046-1047, 1047-1052, 1053-1058, 1059-1061, 1062-1065, 1066-1070, 1071-1076, 1077 :
page 30, 55, 79, 103, 126, 151, 188, 215, 258, 263, 280.
École Polytechnique de Paris. Concours de 1902 183
Concours d'admission à l'École militaire de Belgique 238, 261

SUPPLÉMENTS (46 pages).

1. Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée. par Ch.-J. de la Vallée Poussin
Supplément I, pp. 1-11
2. Sur le quadrilatère complet, par M. J. Neuberg Supplément I, pp. 12-20
3. Sur les faisceaux de coniques, par C. Servais . Supplément II, pp. 1-10
4. Le centenaire d'Abel, par P. Mansion. . . . Supplément III, pp. 1-16

QUESTIONS.

Solutions de questions posées dans les deux premières séries.

1044	(2) V 264	117	×1188bis 239	170
1162	(2) VIII 78	45	1194 263	173
×1167	104	119	(2) IX 1229 176	94
1188	(2) VIII 216, 239	93	1244 264	120
			(2) X 1282 215	143

Questions résolues et questions non résolues des tomes I et II de la troisième série.

NR = Non résolue.

Tome I

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
×1302	40	71	1332	215	201
×1303	40	47	×1333	215	25
1304	40	19	×1334	215	253
1306	40	21	1335	216	
×1309	64	48	1336	216	53
×1310	64	23	1337	216	96
1311	88	NR	1338	216	NR
1312	88, 234	63	×1339	240	
1313	88	NR	1340	240	28
1316	112		×1341	240	177
1317	112, 235	49	1342	240	77
1323	152	50	1343	264	99, 138
1324	152	72	×1344	264	
×1325	152	52	×1345	264	204
×1326	152	175	1346	264	122
1327	176	145	×1347	280	205
1328	176	74	1348	280	78
×1329	176	147	×1349	280	102
×1330	176	95	1350	280	208
1331	214	76			

Tome II

	POSÉE	RÉSOLUE
×1351	32	229
1352	32	
1353	32	150
1354	32	211
1355	32	222
×1356	32	124
1357	56	
+1358	56	179
×1359	56	
1360	56	
1361	80	256
1362	80	180
1363	80	NR
1364	80	125
1365	104	NR
×1366	104	150
×1367	104	214
1368	104	236
1369	128	181
1370	128 (suppr.)	216
1370 (nouvelle)	240	NR
1371	128	NR
×1372	128	
×1373	152	
1374	152	
×1375	152	
1376	152	258
×1377	184	
1378	184	NR
×1379	184	
1380	184	
1381	184	
1382	184	
×1383	216	
1384	216	NR
1385	216	
1386	216	
×1387	216	
1388	216	259
1389	240	
1390	240	
1391	240	
×1392	240	
1393	264	
1394	264	
×1395	264	
×1396	264	
1397	280	NR
1398	280	NR
1399	280	NR
1400	280	NR

Questions des deux premières séries résolues, mais non publiées.

(I-X) 95, 353, 357, 597. (XI-XX) 882, 892bis, 953, 973, 986, 1033, 1046, 1057, 1079, 1087, 1101, 1107, 1177, 1275, 1287.

Questions non résolues des deux premières séries.

(I-X) 513, 598. (XI-XX) 778, 825, 876, 905, 1133, 1140, 1144, 1179, 1220, 1225, 1228, 1233, 1240, 1246, 1247, 1271, 1297.

TABLE DES NOMS.

(Cette table ne renferme pas tous les noms cités dans les comptes-rendus d'ouvrages).

Absolonne, 117, 256.
Algebras Ignitius, 275.
Andrien, 51, 240.
Apollonius, 147.
Appell, 18, 69.
Artzt, 208.
Audibert, 125, 214.
Barbarin, 115, 125, 159, 187, 253.
Bardey, 196.
Barisien, 23, 32, 49, 50, 79, 80, 91, 92, 104, 124, 126, 127, 128, 134, 151, 152, 178, 184, 205, 208, 213, 229, 239, 264, 280.
Baule, 196.
Bernoulli, 181.
Bertrand (J.), 167.
Blanchi, 36.
Böklen, 17, 68.
Bonnet (O.), 81.
Boutin, 48, 80, 127, 128, 148, 180, 181, 216.
Bragard, 125.
Brill, 44.
Brocard, 12, 19, 45, 49, 206.
Burckhardt, 45.
Buysens, 93, 170.

Cambier, 104, 117, 214.
Cardoso-Laynes, 121, 122.
Catalan, 109.
Cauchy, 81.
Cayley. 102.
Cesàro (E.), 28, 32, 68, 84, 125, 152, 182, 216, 228.
Chasles, 156, 193.
Claeys, 122, 180, 193, 235, 250.
Collette, 56, 177.
Couturier, 205.
Cristesco, 205, 216, 258.
Curtze, 275.
Czuber, 44.
D (A.), 180.
Darboux, 17, 165, 185.
Degueldre, 80.
Delahaye, 112, 258.
Delitala, 159.
Del Re, 18.
Demoulin (A), 81, 129, 165, 185, 229
Déprez, 21. 26, 48, 49, 51, 53, 64, 77, 95, 96. 119, 124, 125, 138, 143, 147, 150, 152, 170, 174. 178, 184, 203, 208, 210, 213, 216, 229, 235, 240, 255, 264, 277, 279.
Derousseau, 92.
Descartes, 135.
Droz-Farny, 48 53, 54, 77, 96, 148, 170, 176, 205, 253.
Duhamel, 168, 266.
Duporcq. 225.
Emmerich. 21, 22, 23 43, 45, 47, 48, 51, 52, 54, 56, 71, 76, 78, 95, 96. 99, 103, 119, 120. 122, 124, 125, 143, 147, 151, 173, 175, 178, 201, 205, 207, 214, 229, 255, 258, 264, 277, 278.
Estanave, 141.
Euclide, 269.
Euler, 56, 185, 205
Fagnart, 90, 200.
Ferrari (Fr), 5.
Fibonacci, 60.
Fontené, 43, 63, 80, 256,
François, 48 49, 54, 124, 205, 229, 276.
Fuhrmann, 104. 158, 236.
Gauss, 18
Geissler, 275.
Gelin, 35, 80, 104, 150, 167.
Gérard (G.), 19, 76, 94, 175.
Gérard (L) 17.
Gergonne. 204.
Glaser, 117.
Gmeiner, 79.
Gob, 19, 24, 48, 128, 158.
Godefroy, 142.
Godts, 204.
Goldbach, 79.
Gournerie (de la), 56.
Grassmann, 151, 221, 265, 275.
Hain, 127, 166.
Halley, 269.
Hammer, 198.
Haussner, 114.
Heine, 187.
Hensel, 275.
Hertzer, 36.
Heun, 45.
Hilbert, 44.
Hirst, 259.
Hultsch, 269.
Jane, 124, 211.
Jeřabek, 49, 208.
Juel, 94.
Kessler, 36
Klepert, 248.
Kitt, 90.
Klompers, 199.
Kötter, 44.
Kovalevsky, 228.
Laguerre, 78.
Laisant, 27, 254.
Landsberg, 275.
Lemoine. 12. 23, 47, 77, 96, 105, 115, 147, 173, 201.
Lez, 51, 53, 148.
Listray, 125, 223.
Lobatchefsky, 187.
Longchamps (G. de), 53, 75, 260.
Loria (Gino), 33.
Lucas (Ed.), 60.
Luroth, 69.
Malengreau, 25, 37, 124, 212, 215.
Malfatti, 32, 92, 229.
Mainardi, 275.
Mansion, 17, 45, 59, 69, 81, 91, 116, 140, 141, 142, 199, 273.
Massau, 117, 244.
Merlin, 94.
Meyer (Fr.), 44.
Mineur, 13, 139, 167.
Molk, 227.
Möllmans, 17.
Neuberg, 25, 30, 64, 85, 98. 103, 104, 115, 120, 145, 153, 184, 196, 204, 221, 240, 246, 250, 261, 275, 279, 280.
Newton, 75.
Niewenglowsky, 16.
Nöther, 44.
Ocagne (d'). 260.
Pappus. 269.
Pascal (B.), 33, 167.
Pascal (E.). 198. 275.
Paulmier, 125, 184, 216.
Petersen (J.), 119.
Petit-Bois, 42, 183, 215, 216, 259.
Peyrard, 269.
Picard, 142.

Pietzker, 196.
Pire, 48, 50, 51, 124, 148.
Plakhovo, 25, 53, 125, 148, 166, 205, 215 253, 277.
Pythagore, 17, 42.
Retali, 20, 28, 73, 74, 120, 152, 176, 181, 258, 259.
Ripert, 91, 148, 158, 184, 236.
Rius y Casas, 21, 25, 50, 125.
Rocquigny (de), 162.
Rodrigues (O.), 185.
Rolle, 81
Rose, 21, 51, 63, 73, 74, 101, 122, 125, 145 151, 173, 178, 180, 181, 205, 213, 233, 240, 253, 258. Rudio, 274.
Salkin, 107.
Schellbach, 217.
Schlömilch. 145.
Schoute, 177.
Schröter, 157.
Schülke, 197.
Sellenthin, 197.
Servais (C.), 14, 18, 74, 76, 250, 274, 276.
Seydewitz, 95, 276.
Simson, 155, 204.
Soons, 21, 48, 50, 55, 109, 152, 174, 238.
Staudt (von), 18.
Steiner, 32, 78, 158, 211.
Stolz, 68.
Stuyvaert, 93, 177.
Tannery (J.), 227.
Tarry (G.). 128.
Teixeira (Gomes), 135.
Terquem, 217.
Third, 143, 274.
Thiry (Cl.), 42, 53, 116, 166, 205 240.
Thonet. 125,179, 180, 211, 235, 258.
Tucker. 264.
Unferdinger, 30, 31.
Van Aubel (H.), 246 273.
Van Cauwenberghe, 25, 51, 54, 178, 261, 276
Verheugen, 21. 77, 125, 145, 150, 205.
Versluys (J.), 275.
Viète, 271.
Vivanti, 68.
Walker, 204.
Wargny, 90.
Wasteels (E.), 39, 217, 241.
Wasteels (J.), 60.
Weierstrass, 81.
Zeuthen, 140.

SUR LES RELATIONS QUI EXISTENT

ENTRE

LES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE

ET CELLES DE SA DÉRIVÉE

PAR

Ch.-J. de la VALLÉE POUSSIN

Professeur à l'Université de Louvain

---

1. On sait que si R et Θ désignent le module et l'argument d'un polynome entier en z, les courbes sur lesquelles on a

$$R = \text{const.} \qquad \Theta = \text{const.}$$

forment un système orthogonal. Ces courbes ne peuvent avoir de points singuliers que ceux qui sont racines du polynome considéré ou de sa dérivée. Il en résulte entre les situations de ces diverses racines des relations dont l'étude sommaire fait l'objet de la présente Note.

2. Dans ce qui va suivre, nous considérerons un polynome de degré n, sans racines multiples,

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n ;$$

nous désignerons ses racines par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et celles du polynome dérivé par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$. Parmi ces dernières plusieurs pourront être égales.

§ I. — Propriétés des cassinoïdes.

3. Nous donnerons le nom général de *cassinoïdes* aux courbes représentées par l'équation

$$|f(z)| = \text{const.}$$

et nous nous occuperons d'abord de celles-ci.

Nous allons avoir à considérer souvent la suite des quantités

$$|f(\beta_1)|, \qquad |f(\beta_2)|, \qquad \ldots \qquad |f(\beta_{n-1})|;$$

nous la représenterons en abrégé par

$$b_1, \qquad b_2, \qquad \ldots \qquad b_{n-1},$$

et plusieurs de ces quantités peuvent être égales entre elles.

4. Ceci posé, nous allons énumérer les principales propriétés des cassinoïdes qui nous serviront :

1° *Par tout point z_0 du plan, non racine de $f(z)$, passe une cassinoïde ayant pour équation*

$$|f(z)| = |f(z_0)|.$$

2° *Si le point z_0 n'est pas racine de $f'(z)$, c'est un point ordinaire pour la cassinoïde précédente ; celle-ci a une tangente unique bien déterminée et, dans le voisinage du point z_0, elle partage le plan en deux régions bien distinctes, où l'on a respectivement*

$$|f(z)| < |f(z_0)|, \qquad |f(z)| > |f(z_0)|.$$

L'une s'appellera la région intérieure, l'autre la région extérieure à la courbe.

Ce théorème est une conséquence de la formule

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h[f(z_0) + \epsilon],$$

dans laquelle ϵ est infiniment petit avec h.

Elle montre que le module de $f(z_0 + h)$ sera $>$ ou $<$ que celui de $f(z_0)$, suivant que la quantité

$$\arg.\left(h\frac{f'(z_0) + \epsilon}{f(z_0)}\right),$$

supposée comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, sera, en valeur absolue, $<$ ou $>$ que $\frac{\pi}{2}$. Si h est infiniment petit et $f'(z_0)$ différent de zéro, on en déduit aisément le théorème énoncé.

3° *Si z_0 est une racine d'ordre k de multiplicité de la dérivée $f'(z)$, la cassinoïde*

$$|f(z)| = |f(z_0)|$$

a un point multiple d'ordre $k + 1$ en z_0. Il y a $(k + 1)$ branches de courbes se coupant en z_0; elles ont toutes une tangente déterminée et les tangentes aux branches consécutives se coupent sous l'angle $\frac{\pi}{k+1}$. Enfin ces diverses branches partagent la région du plan située autour du point z_0 en $2(k + 1)$ régions consécutives où l'on a alternativement

$$|f(z)| < |f(z_0)|, \qquad |f(z)| > |fz_0)|.$$

Ce théorème est une conséquence de la formule

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}[f^{(k+1)}(z_0) + \epsilon].$$

Elle montre que le module de $f(z_0 + h)$ sera > ou < que celui de $f(z_0)$, suivant que la quantité

$$\arg.\left(h^{k+1}\frac{f^{(k+1)}(z_0) + \epsilon}{f(z_0)}\right),$$

supposée comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, sera, en valeur absolue, < ou > que $\frac{\pi}{2}$. Si l'on suppose h infiniment petit et si l'on fait varier son argument de 2π, on voit que cet intervalle se décompose en $2(k + 1)$ intervalles partiels égaux à $\frac{\pi}{k+1}$ tels qu'on se trouve alternativement dans le premier et dans le second des deux cas. Le théorème énoncé en résulte immédiatement.

4° *Soit a un nombre positif distinct de chacune des quantités $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ (n° 3), la cassinoïde*

$$|f(z)| = a$$

se compose d'un ou de plusieurs contours fermés, et s'il y a plusieurs contours, ceux-ci sont extérieurs les uns aux autres. A l'intérieur de chacun d'eux, on a

$$|f(z)| < a$$

et dans la région unique extérieure à tous les contours, l'inégalité est de sens contraire.

Soit A une des régions d'un seul tenant dans laquelle on a

$$|f(z)| < a;$$

cette région ne pouvant s'étendre à l'infini, sera limitée extérieurement par un contour fermé appartenant à la cassinoïde $|f(z)| = a$ et cette courbe sera sans point multiple. De plus, la région A ne peut être à contour complexe. En effet, dans le cas contraire, elle enfermerait une région B où l'on aurait $|f(z)| > a$ et le module de $f(z)$ devrait avoir dans cette région B un maximum, ce qui est impossible. Donc la région A est limitée par un contour fermé simple. Le même raisonnement s'appliquant à toutes les régions analogues, on en conclut le théorème énoncé.

5° *Lorsque a est égal à l'une des quantités b_k, on rencontre un cas limite du précédent ; la cassinoïde*

$$|f(z)| = b_k$$

se compose encore de contours fermés extérieurs les uns aux autres, mais il arrive que deux ou plusieurs contours se réunissent en un point commun, racine de $f'(z)$. On peut concevoir que deux ou plusieurs contours simples s'y touchent par leurs points anguleux, comme cela a lieu dans les figures ci-contre.

5. Si a est infiniment grand, la cassinoïde

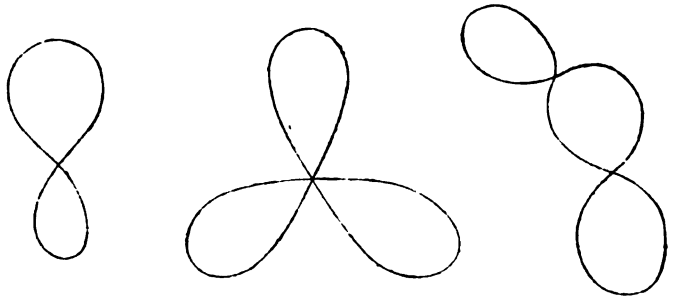
$$|f(z)| = a$$

se réduit a un cercle de rayon infini qui enveloppe toutes les racines de $f(z)$.

Si, au contraire, a est infiniment petit, la cassinoïde se réduit à n cercles infiniment petits décrits autour de chacune des racines α de $f(z)$.

Imaginons que l'on fasse décroître a d'une manière continue depuis l'infini jusqu'à zéro. Le contour de la cassinoïde va se rétrécir constamment. Ce contour, unique d'abord, se scinde successivement en plusieurs autres, qui se rétrécissent et se scindent

à leur tour. Mais le partage d'un contour en deux ou plusieurs autres ne peut avoir lieu que si a passe par l'une des valeurs b_1, $b_2, \ldots, b_{n-1}$. Les points où plusieurs contours se détachent l'un de



l'autre sont les racines de $f'(z)$. Enfin, le partage se fait en autant de contours qu'il y a d'unités plus une dans l'ordre de multiplicité de cette racine. On déduit évidemment de là les propriétés fondamentales suivantes :

6° *Si le nombre a diffère de chacune des quantités b_k, la cassinoïde $|f(z)| = a$ se compose d'autant de contours distincts qu'il y a d'unités plus une dans le nombre des quantités b_k qui sont supérieurs à a.*

7° *Si la cassinoïde*

$$|f(z)| = a$$

se compose de k contours fermés, chacun de ces contours renferme au moins une racine α de $|f(z)|$. Il peut en renfermer plusieurs ; mais, dans ce cas, il renferme aussi des racines β de $f'(z)$ et le nombre de de celles-ci est inférieur d'une unité à celui des racines α contenues dans le contour.

6. Pour montrer l'usage que l'on peut faire de ces propriétés, supposons qu'on ait numéroté les racines $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ de la dérivée de telle sorte qu'on ait

$$b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \ldots \geqq b_{n-1}.$$

On aura les théorèmes suivants :

I. *Une courbe fermée sur laquelle le module de $f(z)$ est constamment plus grand que b_1, contient toutes les racines de $f(z)$ et de sa dérivée ou n'en contient aucune.*

Soit ϵ une quantité positive infiniment petite. La courbe considérée aura tous ses points en dehors de la cassinoïde

$$|f(z)| = b_1 + \epsilon.$$

Celle-ci se compose d'un contour unique enveloppant toutes les racines (6° et 7°). La courbe considérée enveloppe ce contour ou ne l'enveloppe pas, d'où le théorème énoncé.

II. *Une courbe fermée sur laquelle le module de $f(z)$ est constamment $< b_1$, contient au plus $(n - 1)$ racines de $f(z)$.*

En effet, cette courbe a tous ses points à l'intérieur de la cassinoïde

$$|f(z)| = b_1 - \epsilon$$

qui se compose au moins de deux contours fermés (6°) renfermant chacun une racine au moins (7°). La courbe considérée étant à l'intérieur d'un de ces deux contours, ne peut donc contenir toutes les racines.

III. *Une courbe fermée sur laquelle le module de $f(z)$ est constamment $< b_k$, ne peut contenir plus de $(n - k)$ racines de $f(z)$.*

En effet, cette courbe a tous ses points à l'intérieur de la cassinoïde

$$|f(z)| = b - \epsilon.$$

Celle-ci se compose au moins de $k + 1$ contours séparés (6°) renfermant chacun au moins une racine. La courbe considérée étant intérieure à l'un de ces contours, il en reste au moins k à l'extérieur et, par suite, il reste au moins k racines à l'extérieur de cette courbe.

IV. *En particulier, une courbe fermée sur laquelle le module de $f(z)$ reste inférieur à la plus petite b_{n-1} des quantités b_k, ne peut contenir qu'une seule racine de $f(z)$.*

Ce dernier théorème peut donner un criterium commode pour la séparation des racines.

V. *Une courbe fermée sur laquelle le module de $f(z)$ reste compris entre deux quantités consécutives b_k et b_{k+1} et qui contient p racines de $f(z)$ en contient $(p - 1)$ de la dérivée.*

En effet, cette courbe sera située tout entière dans l'espace annulaire, compris entre deux contours intérieurs l'un à l'autre des deux cassinoïdes

$$|f(z)| = b_{k+1} - \epsilon, \qquad |f(z)| = b_k + \epsilon.$$

Entre ces deux contours, il n'y a aucune racine de $f(z)$ ni de $f'(z)$. Donc la courbe renferme autant de racines de l'un et de l'autre polynome que les contours correspondants de ces cassinoïdes. Le théorème résulte alors de la propriété (7°) de ces contours.

§ 2. — Propriétés des trajectoires. Conséquences.

7. Les courbes sur lesquelles l'argument de $f(z)$ est constant, sont, on le sait, les *trajectoires orthogonales* des courbes considérées précédemment. C'est pourquoi nous leur donnerons le nom général de *trajectoires*.

Ces trajectoires jouissent de propriétés qui correspondent à celles des cassinoïdes et qui se démontrent d'une manière tout à fait analogue.

1° *Par tout point z_0 du plan non racine de $f(z)$, passe une trajectoire qui a pour équation*

$$\text{arg. } f(z) = \text{arg. } f(z_0).$$

2° *Si ce point z_0 n'est racine ni de $f(z)$ ni de $f'(z)$, c'est un point ordinaire pour la trajectoire qui y passe. Celle-ci a une tangente unique bien déterminée en ce point. Si on parcourt la trajectoire dans le voisinage de ce point, le module de $f(z)$ va en croissant dans un sens et en décroissant dans l'autre.*

3° *Si le point z_0 est une racine d'ordre k de multiplicité pour $f'(z)$, la trajectoire passant par ce point y possède un point multiple d'ordre $k + 1$. On peut alors, à partir du point z_0, se déplacer sur la trajectoire dans $2(k + 1)$ directions différant successivement entre elles d'un angle $\frac{\pi}{k+1}$. Si l'on considère successivement ces diverses directions consécutives, le module de $f(z)$ va alternativement en croissant et en décroissant quand on s'éloigne du point z_0.*

4° *Si le point z_0 est racine de $f(z)$, l'argument de $f(z_0)$ est indéterminé. Il y a, dans ce cas, une infinité de trajectoires passant par ce point et il y en a une correspondant à toutes les valeurs possibles que l'on peut assigner à l'argument de $f(z)$. Mais chacune de ces trajectoires présente en z_0 un point d'arrêt.*

Soit, en effet, θ une valeur quelconque assignée à l'argument de $f(z)$ et considérons la trajectoire

$$\text{arg. } f(z) = \theta.$$

Soit $z_0 = \alpha_1$ et posons $z = \alpha_1 + h$; on aura, si h est infiniment petit,

$$\text{arg. } f(z) = \text{arg. } h + \sum_{k=2}^{n} \text{arg. } (\alpha_1 - \alpha_k).$$

On en déduit toujours une valeur et une seule de arg. h pour laquelle on aura arg. $f(z) = \theta$. Donc cette trajectoire possède une branche unique dans le voisinage de $z = \alpha$ et cette branche vient s'arrêter en ce point.

Désignons maintenant par

$$\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}$$

les arguments des quantités

$$f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots f(\beta_{n-1}).$$

5° *Si θ désigne un argument différent de tous les précédents, la trajectoire*

$$\text{arg. } f(z) = \theta$$

se compose de n branches de courbes séparées, partant respectivement de chacune des racines α de $f(z)$ et s'éloignant jusqu'à l'infini sans se rencontrer. Le long de chacune d'elles, le module de $f(z)$ va constamment en croissant de 0 à ∞.

Ceci résulte des propriétés 2° et 4°; la branche issue d'une racine ne peut ni se fermer, ni aboutir à une autre racine, puisque le module va en croissant quand on s'avance sur cette branche; elle s'éloigne donc jusqu'à l'infini.

8. Ceci posé, supposons qu'il y ait μ quantités distinctes dans la suite $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ et désignons-les par

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\mu,$$

les indices étant choisis de telle sorte que la suite de ces quantités aille constamment en croissant entre les limites 0 et 2π.

Imaginons que l'on décrive une circonférence de cercle assez grande pour contenir toutes les racines de $f(z)$ et de $f'(z)$ et pour que l'argument de $f(z)$ varie toujours dans le même sens quand on parcourt cette circonférence. Nous appellerons cette circonférence la *circonférence limite.* Menons ensuite les μ trajectoires

$$\arg.\ f(z) = \tau_k$$

que nous appellerons les *trajectoires frontières.*

Je dis que *ces trajectoires décomposent le cercle en μn régions, telles qu'il y ait une racine de $f(z)$ et une seule sur la frontière de chacune d'elles et que chacune de ces régions ait une partie de sa frontière et une seule sur la circonférence limite.*

Soit A une quelconque des régions dans lesquelles on a décomposé le cercle et soit z_0 un point situé à l'intérieur de cette région. Par le point z_0 passe une trajectoire qui part d'une racine α de $f(z)$ et vient rencontrer la circonférence limite. Désignons cette trajectoire par

$$\arg.\ f(z) = \theta.$$

Si l'on fait croître ou décroître θ d'une manière continue, la trajectoire se déforme et se déplace en tournant autour de la

racine α et cela d'*une manière continue* aussi longtemps qu'elle ne vient pas rencontrer une racine de $f'(z)$. Supposons que θ tombe entre les deux valeurs successives τ_1 et τ_2. Si on fait varier cet argument de $\tau_1 + \epsilon$ à $\tau_2 - \epsilon$, la trajectoire balayera tout un secteur ayant son sommet au point α et terminé à la circonférence limite. En supposant ϵ infiniment petit, ce secteur s'étendra à toute la région A que l'on examine. Comme le module de $f(z)$ est constamment croissant quand on parcourt les trajectoires d'argument $\tau_1 + \epsilon$ et $\tau_2 - \epsilon$ issues de la racine α, il ne peut y avoir d'autre racine sur la frontière de A. Le théorème est donc prouvé en ce qui concerne la nature des diverses régions.

Quant au nombre des régions, il y en a μ autour de chaque racine et comme une même région ne peut avoir deux racines sur sa frontière, il y aura en tout μn régions.

9. Les frontières de ces diverses régions établissent alors une connexité entre les diverses racines dont on peut formuler la propriété fondamentale dans le théorème suivant que nous allons démontrer :

Étant données deux racines quelconques de $f(z)$, on peut toujours passer de l'une à l'autre en suivant les trajectoires frontières et on ne le peut que d'une seule manière sans parcourir d'impasse.

Chaque région est limitée par des portions de trajectoires et une portion de la circonférence limite. Nous appellerons les premières les frontières fixes et la dernière sa frontière limite. Ceci admis, soient α_1 et α_2 deux racines quelconques situées sur les frontières de deux régions A et B; soit P un des points où la frontière fixe de A rencontre la circonférence limite. Suivons cette circonférence en dehors de A jusqu'à ce qu'on rencontre en Q la frontière fixe de B. Hachurons maintenant toutes les régions dont nous avons ainsi parcouru une frontière limite. La région totale hachurée n'aura qu'une seule frontière limite PQ. Par conséquent, sa frontière fixe mettra en communication les frontières fixes de A et de B et, par suite, les deux racines α_1 et α_2.

D'autre part, il n'y aura pas d'autre chemin pour aller de α_1 à α_2, car, s'il y en avait deux, ils enfermeraient une région sans frontière limite et il n'en existe pas.

10. Le théorème précédent peut s'énoncer comme il suit :

Étant données deux racines de $f(z)$, par exemple α_1 et α_2, on peut toujours faire varier z de α_1 à α_2 de telle façon que l'argument de $f(z)$ ne change que quand $f(z)$ passe par zéro et le chemin qui vérifie cette condition est unique.

11. La trajectoire d'égal argument, qui mène ainsi d'une racine α_1 à une racine α_2 de l'équation $f(z) = 0$, passera généralement par un certain nombre d'autres racines de cette équation. On dira, dans ce cas, que celles-ci sont *intermédiaires* entre les deux autres et se suivent dans l'ordre où on les rencontre quand on va de α_1 à α_2.

Deux racines seront *consécutives,* si la trajectoire qui les réunit ne passe par aucune racine de l'équation.

12. Sur ces trajectoires qui réunissent les racines de $f(z)$ entre elles, l'argument de $f(z)$ ne change que quand on passe par une racine de cette fonction. De plus, on se rappellera que la variation du module de $f(z)$ ne peut changer de sens que si l'on passe par une racine de $f(z)$ ou de sa dérivée. D'où la conclusion suivante :

La trajectoire qui réunit deux racines consécutives d'une équation passe au moins par une racine de la dérivée. La trajectoire qui réunit deux racines quelconques d'une équation passe au moins par une racine de la dérivée et au moins par autant d'autres racines en plus que de racines intermédiaires de l'équation.

Dans le cas où une équation a ses coefficients réels et possède des racines réelles, la trajectoire qui réunit ces racines réelles n'est autre que l'axe réel et le théorème précédent se réduit au théorème de Rolle.

SUR LE QUADRILATÈRE COMPLET

PAR

J. NEUBERG

Professeur à l'Université de Liége.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre droites quelconques situées dans un même plan et dont trois ne passent pas par un même point. Elles forment quatre triangles $a_2a_3a_4$, $a_3a_4a_1$, $a_4a_1a_2$, $a_1a_2a_3$ que nous représenterons par T_1, T_2, T_3, T_4; nous désignerons par A_1, A_2, A_3 les sommets de T_4 respectivement opposés à a_1, a_2, a_3, et par A_4, A_5, A_6 les points a_4a_1, a_4a_2, a_4a_3.

Il est intéressant d'étudier la figure déterminée par quatre éléments analogues des triangles T. Ainsi, on sait que les orthocentres H_1, H_2, H_3, H_4 de ces triangles sont sur une même droite, directrice de la parabole π tangente aux quatre droites a. Les circonférences circonscrites passent par un même point F, foyer de la parabole π, et leurs centres O_1, O_2, O_3, O_4 sont sur une même circonférence ω passant par F; les rayons de ces cercles menés par les sommets des triangles T correspondants concourent trois à trois en quatre points de la circonférence ω.

La présente note a pour objet principal le quadrangle formé par les centres de gravité G_1, G_2, G_3, G_4 des triangles T. Nous indiquerons également quelques propriétés des points de Lemoine K_1, K_2, K_3, K_4 de ces triangles.

1. Appliquons aux six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ six masses égales à μ; nous donnerons au centre de gravité G de ces masses le nom de *barycentre* du quadrilatère complet $a_1a_2a_3a_4$. Ce point peut être déterminé de plusieurs manières.

Si l'on combine les deux masses μ appliquées aux extrémités d'une même diagonale A_1A_4, A_2A_5 ou A_3A_6, on réduit les six masses μ à trois masses 2μ attachées aux milieux B_1, B_2, B_3 des diagonales. Donc G est situé sur la droite qui unit les milieux des trois diagonales (la *newtonienne* du quadrilatère) et l'on a $CG = \frac{1}{3} CB_1$, C désignant le milieu de la distance B_2B_3 (*).

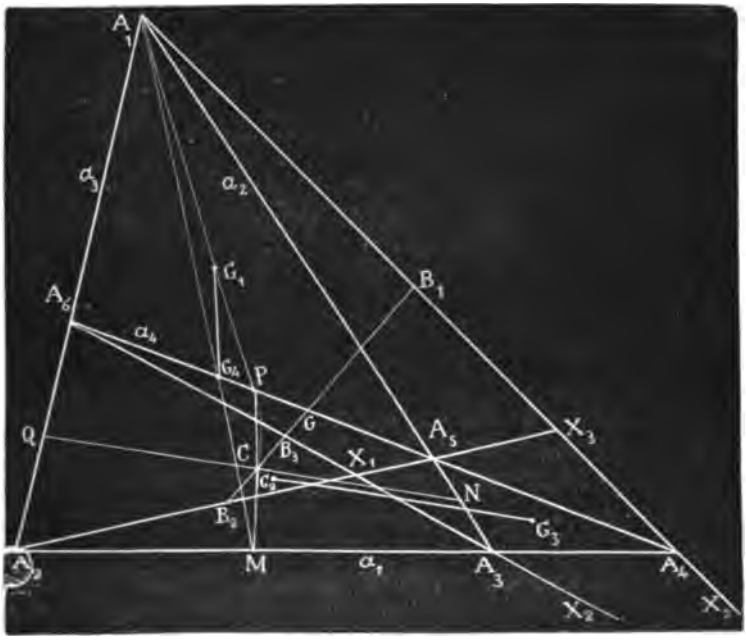


Fig. 1

Décomposons en chaque sommet la masse μ en deux masses égales $\frac{1}{2}\mu$; nous pourrons remplacer trois masses $\frac{1}{2}\mu$ attachées aux sommets du triangle T_i par une masse $\frac{3}{2}\mu$ attachée au centre de gravité G_i. Le système primitif est donc équivalent à quatre masses $\frac{3}{2}\mu$ appliquées en G_1, G_2, G_3, G_4. Par conséquent, le point G coïncide avec le barycentre du quadrangle $G_1G_2G_3G_4$, c'est-à-dire

(*) C'est fortuitement que le point G_4 se trouve sur a_4.

avec le milieu commun des trois droites joignant les milieux de deux côtés opposés de ce quadrangle.

Enfin, on peut combiner les masses μ appliquées aux trois sommets du triangle T_i, de même que celles qui sont attachées aux points d'intersection de la droite a_i avec les trois autres droites. Si donc on appelle G'_i le centre de gravité de trois masses égales placées aux trois sommets du quadrilatère appartenant à la droite a_i, le point G est le milieu commun des quatre droites $G_1G'_1$, $G_2G'_2$, $G_3G'_3$, $G_4G'_4$.

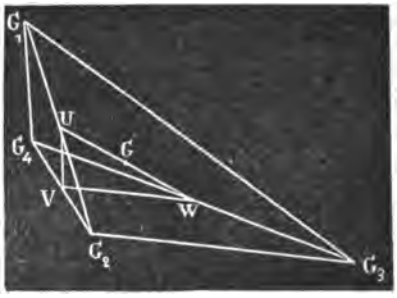


FIG. 2

2. Désignons par M, N, P, Q les milieux des segments A_2A_3, A_3A_5, A_5A_6, A_6A_2. Les points G_4, G_1 divisent les droites A_1M, A_1P dans le rapport 2 : 1; donc la droite G_4G_1 est parallèle à MP et égale à $\frac{2}{3}$ MP. Semblablement, G_2G_3 est parallèle à QN et égale à $\frac{2}{3}$ QN. On voit par là que les trois couples de côtés opposés du quadrangle complet $G_1G_2G_3G_4$ sont parallèles aux droites qui joignent les milieux des côtés opposés dans les quadrilatères simples $A_2A_3A_5A_6$, $A_1A_3A_4A_6$, $A_1A_5A_4A_2$.

Soient U, V, W les milieux des droites G_1G_2, G_2G_4, G_4G_3. Les droites VU, VW parallèles à G_4G_1, G_2G_3 sont parallèles à CP, CN et égales à $\frac{1}{2}G_4G_1$, $\frac{1}{2}G_2G_3$ ou égales à $\frac{2}{3}$ CP, $\frac{2}{3}$ CN, C étant le milieu commun des droites MP, QN, B_2B_3. Il en résulte que VW est parallèle à PN et égale à $\frac{2}{3}$ PN, ou parallèle à A_6A_3 et égale à $\frac{1}{6}A_6A_3$. Ainsi, les trois droites qui joignent les milieux de deux côtés opposés du quadrangle complet $G_1G_2G_3G_4$ sont parallèles

aux trois diagonales du quadrilatère complet $a_1a_2a_3a_4$ et égales respectivement au tiers de la diagonale parallèle.

3. Étant donné le quadrangle $G_1G_2G_3G_4$, comment peut-on en déduire le quadrilatère $a_1a_2a_3a_4$?

Le barycentre G du quadrangle est un point de la newtonienne $B_1B_2B_3$; en construisant les symétriques G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 des sommets du quadrangle par rapport à G, on obtient un point de chacune des droites a_1, a_2, a_3, a_4. Il suffit donc de connaître encore les directions de ces lignes.

Les droites qui unissent les milieux des côtés opposés du quadrangle $G_1G_2G_3G_4$ étant parallèles et proportionnelles aux diagonales du quadrilatère $a_1a_2a_3a_4$, le problème est ramené au suivant :

Construire un quadrilatère complet, connaissant trois lignes équipollentes aux trois diagonales.

Soient X_1, X_2, X_3 les points d'intersection des diagonales (A_2A_5, A_3A_6), (A_3A_6, A_1A_4), (A_1A_4, A_2A_5) du quadrilatère. Connaissant les directions de ces diagonales, on peut tracer un triangle auxiliaire $X'_1X'_2X'_3$ homothétique à $X_1X_2X_3$; si m_1, m_2, m_3 sont les longueurs des côtés de $X'_1X'_2X'_3$, celles de $X_1X_2X_3$ sont ρm_1, ρm_2, ρm_3, ρ étant un facteur inconnu. Les côtés du triangle $X_1X_2X_3$ sont divisés harmoniquement par les couples de points A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, et les points A_1, A_2, A_6 sont en ligne droite ; par suite, les droites X_1A_4, X_2A_5, X_3A_3 concourent en un même point Y, pôle trilinéaire de la droite A_2A_6 par rapport au triangle de référence $X_1X_2X_3$.

Appelons x_1, x_2, x_3 les coordonnées barycentriques de Y dans le triangle $X_1X_2X_3$. Nous aurons

$$\frac{X_2A_4}{A_4X_3} = -\frac{X_2A_1}{A_1X_3} = \frac{x_3}{x_2},$$

d'où l'on déduit d'abord

$$X_2A_4 = X_2X_3\frac{x_3}{x_2+x_3}, \qquad X_2A_1 = X_2X_3\frac{x_3}{x_3-x_2},$$

et ensuite

$$A_4A_1 = X_2X_3\frac{2x_2x_3}{x_3^2-x_2^2}.$$

Les longueurs A_4A_1, A_2A_5, A_3A_6 sont connues; désignons-les par n_1, n_2, n_3. L'équation précédente et les deux autres analogues prennent la forme

$$n_1 = \rho m_1 \frac{2x_2x_3}{x_3^2 - x_2^2}, \quad n_2 = \rho m_2 \frac{2x_3x_1}{x_1^2 - x_3^2}, \quad n_3 = \rho m_3 \frac{2x_1x_2}{x_2^2 - x_1^2}.$$

Si l'on représente les rapports $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, $\frac{m_3}{n_3}$ par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on peut écrire

$$x_3^2 - x_2^2 = 2\rho\lambda_1 x_2x_3, \quad x_1^2 - x_3^2 = 2\rho\lambda_2 x_3x_1, \quad x_3^2 - x_1^2 = 2\rho\lambda_3 x_1x_2.$$

En éliminant ρ on obtient deux équations qui déterminent les coordonnées x_1, x_2, x_3. Pour faire cette élimination de manière à éviter des solutions étrangères, nous ajoutons d'abord les trois équations membre à membre, ce qui donne

$$(1) \qquad \frac{\lambda_1}{x_1} + \frac{\lambda_2}{x_2} + \frac{\lambda_3}{x_3} = 0.$$

En les ajoutant membre à membre après les avoir multipliées respectivement par x_1^2, x_2^2, x_3^2, on obtient

$$(2) \qquad \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 = 0.$$

Les équations (1) et (2) permettent de construire sur le triangle $X_1'X_2'X_3'$ comme homologue de $X_1X_2X_3$ une figure homothétique au quadrilatère cherché. Elles représentent une conique et une droite dont chacun des points d'intersection peut être pris pour l'homologue de Y.

La droite (2) est la polaire trilinéaire du point qui a pour coordonnées $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}$ ou $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \frac{n_3}{m_3}$. Le lieu de l'équation (1) est la transformée par points réciproques de cette polaire. Par suite, les deux points qui correspondent à Y sont des points réciproques par rapport à $X_1'X_2'X_3'$; résultat qui s'explique *à priori*.

Si l'on élimine x_3 entre les équations (1) et (2), on obtient

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\lambda_1\lambda_2} x_1x_2 = 0.$$

On en conclut que le problème admet deux solutions réelles si l'on a

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2)^2 - 4\lambda_1^2\lambda_2^2 > 0$$

ou

$$\Sigma\lambda_1^4 - 2\Sigma\lambda_1^2\lambda_2^2 > 0.$$

Par suite, la plus grande valeur absolue des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ doit être plus grande que la somme des deux autres.

4. Pour résoudre le même problème, on peut s'appuyer sur la proposition suivante :

Si les côtés d'un triangle variable ABC *pivotent autour de trois points fixes* A', B', C' *de manière que le barycentre* G *du triangle reste fixe, le sommet* A *décrit une conique passant par* B' *et* C'.

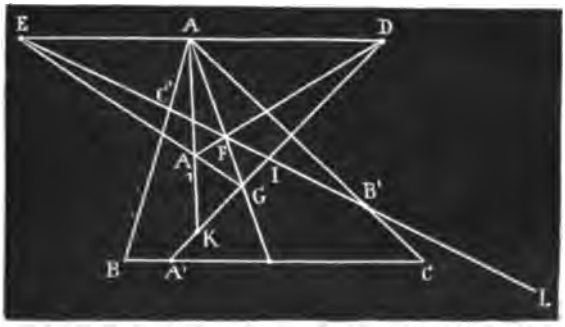


Fig. 3

Pour démontrer ce théorème, prolongeons A'G de GD = 2A'G ; la parallèle menée par A à BC passe constamment par le point D. Mais cette parallèle, la médiane AG et les côtés AC, AB forment un faisceau harmonique, qui détermine sur la droite B'C' une division harmonique EFB'C'. Par conséquent, si l'on construit l'involution qui a pour éléments doubles les points B', C', on obtint une position de A en projetant deux points conjugués quelconques E, F, l'un à partir de D, l'autre à partir de G. Les deux faisceaux projetants étant projectifs, l'intersection des rayons homologues engendre une conique passant par les centres G, D des deux faisceaux.

Un couple EF de l'involution donne deux points A, A_1 de la conique, car on peut joindre G à F et D à E ou G à E et D à F. La droite AA_1 passe par un point fixe K de GD; en effet, la diagonale GD du quadrilatère complet EA_1FA est divisée harmoniquement par les deux autres EF, AA_1 en I et K. Soit L le conjugué harmonique de I par rapport à B'C'; en remplaçant le couple EF par IL, on voit facilement que GL et DL sont les tangentes en G et D à la conique. Si l'on prend pour EF le couple BB' ou CC', on trouve que B' et C' sont deux points de la courbe et que les tangentes en ces points concourent en K.

Cela posé, si l'on donne le quadrangle $G_1G_2G_3G_4$, on peut déterminer les points G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 appartenant aux côtés a_1, a_2, a_3, a_4 du quadrilatère cherché. Connaissant les points G'_1, G'_2, G'_3 des côtés du triangle $a_1a_2a_3$ et le barycentre G_4, construisons la conique lieu du point a_1a_2; cette courbe passe par G_4, G'_1, G'_2. Construisons encore la conique lieu du sommet a_1a_2 du triangle $a_1a_2a_4$ dont les côtés passent par G'_1, G'_2, G'_4 et qui a pour barycentre G_3. Ces deux coniques qui ont deux points communs G'_1, G'_2, se coupent encore en deux autres points dont chacun peut être pris pour le point a_1a_2. Le problème s'achève maintenant facilement.

5. Dans les triangles

$$T_4 \equiv A_1A_2A_3, \qquad T_2 \equiv A_6A_2A_4, \qquad T_3 \equiv A_5A_3A_4,$$

qui ont le côté commun a_1, traçons les médianes A_1G_4, A_6G_2, A_5G_3 qui correspondent à ce côté. Si I_1 désigne le point à l'infini sur a_1, les médianes considérées sont les conjuguées harmoniques des droites A_1I_1, A_6I_1, A_5I_1 par rapport aux angles A_1, A_6, A_5 du triangle $T_1 \equiv A_1A_6A_5$; par suite elles rencontrent les côtés opposés de T_1 en trois points de la polaire trilinéaire de I_1. Cette polaire est tangente à l'ellipse inscrite à T_1 et ayant son centre en G_1.

6. Dans les cercles circonscrits aux trois triangles T_4, T_2, T_3, menons les rayons A_1O_4, A_6O_2, A_5O_3 par les sommets opposés au côté commun a_1. Ces droites sont les isogonales des hauteurs A_1H_4, A_6H_2, A_5H_3 par rapport aux angles A_1, A_6, A_5 du triangle T_1; on en conclut qu'elles concourent en un même point D_1 qui est l'inverse par rapport au triangle T_1 du point à l'infini dans la

direction perpendiculaire à a_1. D_1 appartient à la circonférence circonscrite au triangle T_1 ; c'est le foyer de la parabole inscrite au triangle et dont les diamètres sont perpendiculaires à a_1.

On démontre facilement que les quatre points D_1, D_2, D_3, D_4 sont les seconds points d'intersection des circonférences O_1, O_2, O_3, O_4 avec la circonférence qui passe par leurs centres.

7. Menons en A_1, A_6, A_5 les tangentes aux circonférences O_4, O_2, O_3 ; ces droites perpendiculaires aux rayons A_1D_1, A_6D_1, A_5D_1 concourent au point E_1 diamétralement opposé à D_1 sur la circonférence O_1. E_1 est le foyer de la parabole inscrite au triangle T_1 et dont l'axe est parallèle à a_1 ; c'est l'inverse du point I_1 par rapport à T_1.

Les propositions des §§ 5 et 6 sont connues; nous les avons démontrées ici à cause de la propriété du § 7, due à Wetzig (J. DE CRELLE, t. LXII, p. 351) qui l'a établie autrement.

8. Soient K_1, K_2, K_3, K_4 les points de Lemoine des triangles T_1, T_2, T_3, T_4.

Les symédianes A_1K_4, A_6K_2, A_5K_3 sont conjuguées harmoniques des tangentes A_1E_1, A_6E_1, A_5E_1 aux cercles O_4, O_2, O_3 par rapport aux angles A_1, A_6, A_5 du triangle T_1 ; par suite elles rencontrent les côtés opposés de T_1 en trois points appartenant à la polaire trilinéaire du point E_1. Ce point étant situé sur la circonférence O_1, sa polaire passe par le point K_1.

9. La théorie du centre des moindres carrés *(point de Gauss)* d'un système de droites conduit à quelques autres propriétés assez curieuses des points K_1, K_2, K_3, K_4.

Appelons K le point de Gauss du quadrilatère $a_1a_2a_3a_4$; c'est le point dont la somme des carrés des distances aux côtés du quadrilatère est minimum. Il est le barycentre de ses projections sur ces côtés.

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 les symétriques d'un point quelconque M par rapport à $a_1a_2a_3a_4$; le barycentre M' de ces points est appelé le *barycentre symétrique* de M. Les points M, M' se correspondent dans deux figures symétriquement semblables φ, φ' ayant pour point double le point K. Si N est un second point quelconque et N' son barycentre symétrique, le point K est à l'intersection de deux droites rectangulaires KX, KY qui divisent les segments MM', NN' l'une additivement, l'autre soustractivement dans le

rapport MN : M'N'. Ces droites KX, KY, lignes doubles des deux figures φ, φ', sont les axes de l'une quelconque des ellipses lieux des points dont la somme des carrés des distances aux droites a_1, a_2, a_3, a_4 a une valeur donnée.

Ces notions étant rappelées, observons que K_1 est le barycentre de ses symétriques par rapport à a_2, a_3, a_4; le barycentre symétrique K_1' de K_1 est donc le milieu de la distance de K_1 à a_1. Les quadrilatères $K_1K_2K_3K_4$, $K_1'K_2'K_3'K_4'$ sont inversement semblables.

Le point K est le centre de gravité des six sommets a_1a_2, $a_2a_3, \ldots, a_4a_3$ du quadrilatère pour des masses proportionnelles à $\sin^2 a_1a_2, \sin^2 a_2a_3, \ldots, \sin^2 a_4a_3$. Cette propriété admet des conséquences analogues à celles que nous avons développées au n° 1, mais d'une nature moins simple.

SUR LES FAISCEAUX DE CONIQUES*

par C. Servais professeur à l'Université de Gand.

Dans le présent travail on détermine les éléments réels ou imaginaires communs à deux coniques et on établit les théorèmes fondamentaux sur les faisceaux de coniques sans recourir au principe de continuité. On utilise les imaginaires de von Staudt et la projectivité réelle.

§ I. - *Projectivité des formes fondamentales de seconde espèce.*

1. Deux formes fondamentales de seconde espèce sont projectives, quand l'une peut se déduire de l'autre par projections et sections. Par suite deux formes projectives à une troisième sont projectives entre elles, et deux formes de première espèce qui se correspondent, sont projectives.

2. THÉORÈME. *Deux systèmes plans composés chacun de quatre points* A, B, C, D *et* A_1, B_1, C_1, D_1 *dont trois quelconques ne sont pas en ligne droite, sont projectifs.* Les couples homologues AB, A_1B_1 sont composés tous deux de points réels, ou tous deux de points imaginaires conjugués. La même hypothèse existe pour les couples homologues CD et C_1D_1.

On peut supposer les deux quadrangles $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$ dans deux plans distincts. On désigne par E et E_1 les points réels (AB, CD) et (A_1B_1, C_1D_1); par S_1 un point réel de EE_1; par $A_2B_2C_2D_2$ la section de la gerbe S_1 $(A_1B_1C_1D_1)$ par un plan réel mené par E; par S_2 le point réel (AA_2, BB_2); par C_3 et D_3 les traces des rayons S_2C_2 et S_2D_2 sur un plan réel passant par AB; par S_3 le point réel (CC_3, DD_3). Deux quadrangles consécutifs de la suite $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ABC_3D_3, $ABCD$, sont perspectifs, les centres de perspectivité étant S_1, S_2, S_3. Par suite les formes $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$ sont projectives.

* Estratto dal Periodico mensile *Le Matematiche pure ed applicate* diretto dal *Prof. Cristoforo Alasia* (Anno I, Num. 11-12 - dicembre 1901, gennaio 1902). — Città di Castello, S. Lapi tipografo-editore.

REMARQUE. Les couples de points correspondants AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 définissent la projectivité des deux systèmes plans; car ils suffisent pour établir celle des ponctuelles homologues (AB) et (A_1B_1), (CD) et (C_1D_1), à l'aide desquelles on peut construire la droite m_1 du second système, correspondant à une droite donnée m du premier.

3. On en conclut que deux systèmes plans sont aussi projectifs, s'ils sont rapportés l'un à l'autre point par point, droite par droite, de façon qu'à une ponctuelle de l'un corresponde une ponctuelle projective de l'autre.

COROLLAIRE. Deux systèmes plans réciproques à un troisième sont projectifs.

4. POINTS DOUBLES. Si les systèmes plans superposés sont involutifs, ils se correspondent dans une homologie harmonique; les points doubles sont connus; on écarte ce cas dans ce qui suit.

On désigne par la double notation (P_1, R) un point réel, par P son correspondant dans le premier système plan, par R_1 son homologue dans le second: on suppose les trois points P, (P_1, R), R_1 non en ligne droite. Les faisceaux homologues (P) et (P_1) engendrent une conique (π) tangente au point P_1 à la droite P_1R_1. De même les faisceaux correspondants (R) et (R_1) engendrent une conique (ρ) tangente au point R ou P_1 à la droite PR. Un point double réel ou imaginaire appartient à chacune de ces coniques; réciproquement un point distinct de P_1 et commun à ces courbes est un point double des systèmes plans. Ces deux coniques ont un point commun réel P_1 et ne sont pas tangentes en ce point; elles ont donc un second point commun réel A et se coupent par suite en deux points réels ou imaginaires conjugués B et C. Ainsi:

Deux systèmes plans projectifs superposés ont trois points doubles A, B, C; un de ces points A est réel, les deux autres B et C sont réels ou imaginaires conjugués.

Cette démonstration est due à *von Staudt* *

5. Ce théorème suppose qu'il soit possible de trouver trois points P, (P_1, R), R_1 non en ligne droite. Dans le cas contraire toute droite joignant deux points homologues réels se correspond à elle même et les systèmes plans sont homologiques.

§ II. - *Faisceaux de coniques.*

6. Soient Σ_1 et Σ_2 deux coniques réelles ou imaginaires; (E) et (E_1) deux systèmes plans réciproques par rapport à Σ_1; (E) et (E_2) deux systèmes plans réciproques par rapport à Σ_2. Les systèmes plans (E_1) et (E_2) sont rapportés projectivement de la manière suivante: deux points homologues P_1 et P_2 sont les pôles d'une même droite p de (E) par rapport à Σ_1 et Σ_2; deux droites

* *Beiträge zur Géométrie der Lage*, n. 301.

homologues p_1 et p_2 sont les polaires d'un même point P de (E) par rapport à Σ_1 et Σ_2. *Les systèmes plans* (E_1) *et* E_2) *peuvent: 1° être homologiques; 2° avoir trois points doubles.* Toute point double a même polaire par rapport Σ_1 et Σ_2 et cette droite est un élément double de (E_1) et (E_2).

7. PREMIER CAS. Soient S et s le centre et l'axe d'homologie: la correspondance entre les systèmes (E_1) et (E_2) est déterminée par un couple de points homologues réels P_1, P_2, la droite P_1P_2 passant par S. Si l'on substitue à P_2 successivement les points réels $P_3, P_4, \ldots, P_k$ de la ponctuelle située sur P_1P_2, on pourra construire à l'aide des couples P_1P_3, $P_1P_4, \ldots$, P_1P_k les systèmes plans $(E_3), (E_4), \ldots, (E_k)$ perspectifs à (E_1). Un point Q_1 du système (E_1) et ses homologues $Q_2, Q_3, \ldots, Q_k$ dans les systèmes (E_2), $(E_3), \ldots, (E_k)$ sont sur une droite passant par S. Si Q_1 est réel les ponctuelles $(P_1P_2 \ldots P_k)$ et $(Q_1Q_2 \ldots Q_k)$ sont perspectives. De même une droite p_1 et ses correspondantes $p_2, p_3 \ldots, p_k$ passent par un même point de l'axe d'homologie s; si p_1 est réelle le faisceau $(p_1p_2 \ldots p_k)$ est perspectif à tout faisceau analogue et projectif à toute ponctuelle $(P_1P_2 \ldots P_k)$.

8. Un système (E_k) projectif à (E_1) est réciproque à (E); de plus les systèmes (E) et (E_k) sont involutifs. Soient p et P_k, q et Q_k deux couples d'éléments homologues réels de (E) et (E_k); Q_k est supposé sur p, l'involution sera établie si on démontre que la droite q passe par P_k. Les droites p et q se coupent en un point L, par lequel passent deux droites m et n réciproques par rapport aux coniques Σ_1 et Σ_2. Ces droites sont d'ailleurs réelles ou imaginaires conjuguées. Les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$ homologues de la droite m du système (E), dans les systèmes $(E_1), (E_2), \ldots, (E_k)$ sont situés sur n et les points analogues $N_1, N_2, \ldots, N_k$ relatifs à n sont situés sur m. On a:

$$(p\,q\,m\,n) \overline{\wedge} (P_k\,Q_k\,M_k\,N_k).$$

Mais les couples P_kQ_k, M_kN_k définissent une involution, donc:

$$(P_k\,Q_k\,M_k\,N_k) \overline{\wedge} (Q_k\,P_k\,N_k\,M_k),$$

par suite:

$$(p\,q\,m\,n) \overline{\wedge} (Q_k\,P_k\,N_k\,M_k)$$

et la droite q passe par P_k.

Les systèmes réciproques involutifs (E) et (E_k) définissent une conique réelle ou imaginaire Σ_k; on obtient ainsi le système de coniques $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_k$. Les éléments $P_1P_2P_3 \ldots P_k$ (ou $p_1p_2p_3 \ldots p_k$) sont les pôles (ou les polaires) d'un même élément p (ou P) par rapport aux coniques $\Sigma_1\,\Sigma_2, \Sigma_3 \ldots \Sigma_k$.

9. Une droite a tangente à Σ_1 et Σ_2 est tangente à chacune des coniques Σ_k. En effet si les pôles A_1 et A_2 de a par rapport à Σ_1 et Σ_2 sont identiques, on a: $A_1 \equiv A_k$ et a est tangente à Σ_k.

D'ailleurs a est alors une droite double de (E_1) et (E_2) et passe par S.

Les points A_1 et A_2 ne peuvent être distincts, sinon la droite a identique à la droite $A_1 A_2$ passe par S et est une droite double de (E_1) et (E_2), ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur A_1 et A_2.

10. *Le centre d'homologie* S *n'est pas sur l'axe* s. On peut mener de S deux tangentes réelles ou imaginaires conjuguées à la conique Σ_1. Les points de contact U_1 et V_1 sont situés sur s. Le point U_1 est un point double de (E_1) et (E_k), donc $U_1 \equiv U_k$ et la droite $S U_1$ est la polaire de U_k par rapport à Σ_k. Les coniques $\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_k$ ont donc un double contact aux points U_1 et V_1, SU_1 et SV_1 sont les seules tangentes communes.

11. *Le point* S *est sur* s. Les coniques $\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_k$ sont tangentes au point S à la droite s et n'ont aucune autre tangente commune.

12. *Deuxième cas.* Les systèmes (E_1) et (E_2) ont un point double réel A et deux points doubles réels ou immaginaires conjugués B et C. Ces systèmes ayant au moins un point double réel A, ont au moins une droite double réelle a: c'est la polaire de A. Soient $P_1 Q_1 R_1$ et $P_2 Q_2 R_2$ deux triangles homologues réels des systèmes (E_1) et (E_2); M_1 et N_1 les points d'intersection de la droite a avec $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$. On prend arbitrairement sur $P_1 P_2$ un point P_k et on détermine sur $Q_1 Q_2$ le point Q_k correspondant à P_k dans les ponctuelles projectives $(M_1 P_1 P_2 \dots)$ et $(N_1 Q_1 Q_2 \dots)$. Soit R_k le point analogue sur $R_1 R_2$. Les triangles $P_1 Q_1 R_1$ et $P_k Q_k R_k$ se correspondent dans deux systèmes plans projectifs (E_1) et (E_k) ayant pour droite double réelle a. En faisant varier P_k on obtient la série de systèmes plans projectifs $(E_1), (E_2), (E_3), \dots, (E_k)$. Les ponctuelles $(P_1 P_2 P_3 \dots P_k)$, $(Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_k)$, $(R_1 R_2 R_3 \dots R_k)$ sont projectives et la droite a détermine sur leurs supports des points correspondants. Les droites $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2, \dots, P_k R_k$, a, sont tangentes à une conique (π); celle-ci est aussi l'enveloppe des droites joignant les points correspondants des droites $P_1 Q_1$ et $P_k Q_k$ dans les systèmes (E_1) et (E_k); par suite l'homologue S_k d'un point réel S_1 de la droite $P_1 Q_1$ est sur la tangente menée de S_1 à la conique (π). Ainsi les points $S_1 S_2 S_3 \dots S_k$ sont en ligne droite et les ponctuelles $(P_1 P_2 P_3 \dots P_k)$ et $(S_1 S_2 S_3 \dots S_k)$ sont projectives. Toute droite double des systèmes (E_1) et (E_2) joint deux points homologues des droites $P_1 Q_1$ et $P_2 Q_2$ et est tangente à la conique (π). Donc un coté du triangle $A B C$ passe par deux points correspondants des ponctuelles $(P_1 P_2 P_3 \dots P_k)$ et $(S_1 S_2 S_3 \dots S_k)$.

De même: T_1 étant un point réel de $P_1 R_1$, les homologues $T_2 T_3 \dots T_k$ sont sur une droite issue de T_1; les ponctuelles $(P_1 P_2 P_3 \dots P_k)$ et $(T_1 T_2 T_3 \dots T_k)$ sont projectives et un coté du triangle ABC contient deux points homologues.

13. Un point réel quelconque V_1 du système (E_1) jouit de la même propriété que les points S_1 et T_1. On mène par ce point une droite réelle coupant les droites $P_1 Q_1$ et $P_1 R_1$ en deux points S_1 et T_1: on recommence sur les points S_1, T_1, V_1 la démonstration faite sur les points P_1, Q_1, S_1.

Un point imaginaire $(F_1 G_1 H_1 L_1)$ et ses homologues $(F_2 G_2 H_2 L_2), \dots,$

$(F_k\, G_k\, H_k\, L_k)$ sont aussi en ligne droite : cette droite est la tangente à la conique enveloppe des droites $F_1\, G_1$, $F_2\, G_2, \ldots$, $F_k\, G_k$, menée par le point $(F_1\, G_1\, H_1\, L_1)$.

14. Une droite double b des systèmes (E_1) et (E_2) est aussi une droite double de (E_1) et (E_k). Car cette droite détermine sur les couples de droites $P_1\, Q_1$ et $P_2\, Q_2$, $P_1\, R_1$ et $P_2\, R_2$ les couples de points U_1 et U_2, V_1 et V_2.

Les points U_k et V_k sont à l'intersection des droites $P_k\, Q_k$ et $P_k\, R_k$ avec b : les droites homologues $U_1\, V_1$ et $U_k\, V_k$ coincident donc avec b.

On démontre de même la réciproque.

15. Remarque. La démonstration (12) suppose les trois points P_k, Q_k, R_k non en ligne droite. Dans le cas contraire la droite $P_k\, Q_k\, R_k$ est un élément double de (E_1) et (E_2). En effet, cette droite est tangente à la conique (π) et passe par deux points homologues F_1 et F_2 des droites $P_1\, Q_1$, $P_2\, Q_2$; de même elle contient deux points correspondants G_1 et G_2 des droites $P_1\, R_1$ et $P_2\, R_2$; par suite $F_1\, G_1$ coïncide avec son homologue $F_2\, G_2$.

Le point de rencontre P_k de la droite $P_1\, P_2$ avec une droite double réelle b des systèmes (E_1) et (E_2) sera considéré comme une position limite du point P_k. *Si P_k tend indéfiniment vers P_k la proectivité des systèmes (E_1) et (E_k) varie, et l'homologue V_k d'un point V_1 a pour limite la trace V_k de la droite $V_1\, V_2$ sur* b. Car, si V_1 est réel, ce lémme resulte immédiatement de ce que dans la projectivité des ponctuelles $(P_1\, P_2 \ldots P_k)$ et $(V_1\, V_2 \ldots V_k)$ les points P_k et V_k sont correspondants (13). Si V_1 est imaginaire et donné par le groupe représentatif $(M_1\, N_1\, R_1\, Q_1)$, son homologue $V_k \equiv (M_k\, N_k\, R_k\, Q_k)$ a pour limite le point $(M_k\, N_k\, R_k\, Q_k)$ situé sur la droite b.

16. Une droite réelle l_1 et ses homologues $l_2, l_3, \ldots, l_k$ joignent les points correspondants des ponctuelles projectives $(P_1\, P_2 \ldots P_k)$ et $(Q_1\, Q_2 \ldots Q_k)$ relatives à deux points réels quelconques P_1 et Q_1 de l_1. Ces droites enveloppent une conique inscrite au triangle ABC. Si les ponctuelles $(P_1\, P_2 \ldots P_k)$ et $(Q_1\, Q_2 \ldots Q_k)$ sont perspectives, les droites $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_k$ forment un faisceau dont le centre est un point double de (E_1) et (E_2).

17. On démontre comme au numéro 8, que les systèmes (E) et (E_k) sont réciproques involutifs; ils définissent une conique réelle ou imaginaire Σ_k. On obtient ainsi le système de coniques $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$. Les éléménts $P_1\, P_2\, P_3 \ldots P_k$ (ou $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_k$) sont les pôles (ou les polaires) d'un même élément p (ou P) par rapport aux coniques $\Sigma_1\, \Sigma_2\, \Sigma_3 \ldots \Sigma_k$.

18. Toute droite a tangente à Σ_1 et Σ_2 est tangente à chacune des coniques Σ_k.

En effet, si les pôles A_1 et A_2 de a par rapport à Σ_1 et Σ_2 sont distincts, la droite a identique à $A_1\, A_2$ contient le pôle A_k de a par rapport à Σ_k, et est tangente à cette conique. Si les pôles A_1 et A_2 coïncident, la droite a est une droite double de (E_1) et (E_2) et par suite (14) de (E_1) et (E_k) : le point A_k est donc identique à A_1 et a est tangente à Σ_k au point A_1.

19. *Une droite* s *réelle ou imaginaire et la droite* $S_1 S_k$ *lieu des pôles* S_2, $S_2, \ldots, S_k$ *de* s *par rapport aux coniques* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ *déterminent sur une droite double réelle* a, *des systèmes plans* $(E_1), (E_2), \ldots, (E_k)$ *deux points* S et S_k *conjugués dans une involution fixe* (I).

Le faisceau $(p\,q\,r\ldots)$ détermine sur a la ponctuelle $(P\,Q\,R\ldots)$, les droites $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2, \ldots$, $P_k Q_k$ enveloppent une conique tangente à la droite a; par suite les droites $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2, \ldots$ tangentes à cette conique déterminent sur a la ponctuelle $(P_k\,Q_k\,R_k\ldots)$ projective à $(P_1\,Q_1\,R_1\ldots)$. Cette dernière formée par les pôles des rayons du faisceau $(p\,q\,r\ldots)$ est projective à ce faisceau et par suite les ponctuelles $(P\,Q\,R\ldots)$ et $(P_k\,Q_k\,R_k\ldots)$ sont projectives.

Si l'on substitue à la droite p une autre droite p' passant par P, la droite $P'_1 P'_2$ détermine sur a un point P'_k identique à P_k. On suppose d'abord P et p' réels; les ponctuelles $(P_1 P_2 \ldots P_k)$ et $(P'_1 P'_2 \ldots P'_k)$ sont perspectives, car les pôles P_k, Q_k et A des droites concourantes p, p', a par rapport à Σ_k sont en ligne droite. Par suite $P_k P'_k$ doit passer par le point A et si ce point n'est pas situé sur sa polaire a, les points P_k et P'_k sont confondus.

Dans le cas contraire (a et A incidents) on remarque que les pôles du faisceau $(a\,p\,p'\ldots)$ par rapport à Σ_1 et Σ_2 forment respectivement les deux ponctuelles perspectives $(A\,P_1\,P'_1\ldots)$ et $(A\,P_2\,P'_2\ldots)$. Le centre de perspective $V \equiv (P_1 P_2,\ P'_1 P'_2)$ n'est pas situé sur a si les points P_k et P'_k sont distincts. Alors la droite $V\,Q_k$ coupe $A\,P_1$ et $A\,P_2$ en deux points P''_1 et P''_2 qui sont les pôles d'une même droite p'' du faisceau $(a\,p\,p'\ldots)$ par rapport à Σ_1 et Σ_2. Le point Q est supposé réel. Si dans la détermination de la ponctuelle $(P_k\,Q_k\ldots)$ projective à $(P\,Q\ldots)$ on substitue au faisceau $(p\,q\,r\ldots)$ le faisceau $(p''\,q\ldots)$ perspectif à $(P\,Q\ldots)$, on trouve une ponctuelle dont l'élément Q_k correspond à deux éléments P et Q de la ponctuelle $(P\,Q\ldots)$, ce qui est impossible; donc P_k et P'_k coincident.

Le lieu des pôles d'une droite imaginaire $(p\,p'\,p''\,p''')$ passant par le point réel P est la droite P_k $(P_1\,P'_1\,P''_1\,P'''_1)$, car on vient d'établir que les groupes $(P_1\,P'_1\,P''_1\,P'''_1)$ et $(P_2\,P'_2\,P''_2\,P'''_2)$ sont perspectifs et que le centre de perspectivité est le point P_k. Ainsi le lieu des pôles d'une droite imaginaire passant par P coupe a au point P_k.

Enfin, à un point imaginaire $(P\,Q\,R\,S)$ de a correspond dans la projectivité des ponctuelles $(P\,Q\,R\ldots)$ et $(P_k\,Q_k\,R_k\ldots)$ le point $(P_k\,Q_k\,R_k\,S_k)$. Ce point est indépendant de la droite imaginaire $(p\,q\,r\,s)$ menée par $(P\,Q\,R\,S)$, car P_k ne dépend pas de p mais seulement de P.

Il reste à établir que les ponctuelles $(P\,Q\,R\ldots)$ et $(P_k\,Q_k\,R_k\ldots)$ sont involutives. Cela résulte de ce que les pôles $T_1\,T_2\ldots T_k$ de la droite t support de la ponctuelle $(P_1\,P_2\ldots P_k)$ sont situés sur la droite p.

20. Corollaire. Une tangente commune aux coniques $\Sigma_1\,\Sigma_2\ldots\Sigma_k$ passe par l'un des points doubles de l'involution (I).

21. Si le point A n'est pas situé sur sa polaire a, par ce point passent deux droites b et c réciproques par rapport à Σ_1 et Σ_2.

Elles sont réelles ou imaginaires conjuguées et forment avec a un triangle conjugué à chacune des coniques Σ_1 et Σ_1. Ces droites b et c sont donc deux éléments doubles de (E_1) et (E_2) et par suite (14) de (E_1), (E_2), (E_3),... (E_k). Il en résulte que *le triangle* a b c *est conjugué à toutes les coniques* $\Sigma_1\,\Sigma_2\,\Sigma_3 \ldots \Sigma_k$. Les sommets $a\,c$ et $a\,b$ sont les points doubles B, C de (E_1), (E_2)..., (E_k).

Le points B *et* C *sont conjugués dans l'involution* I (19) *située sur la droite* a. Car une droite p issue de C a ses pôles $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sur c et le point P_k est identique à B.

22. On suppose le triangle $A\,B\,C$ réel et on designe par A' et A'', B' et B'', C' et C'' les points doubles des involutions (I) respectivement sur les droites BC, CA, AB. Les pôles de $A'\,B'$ par rapport aux coniques Σ sont sur une droite rencontrant BC au point A' et AC au point B'. Cette droite se confond avec $A'B'$ qui est par suite une tangente commune aux coniques $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$. La droite $A'B'$ passe par l'un des points C', C'' (20). Ainsi: *les coniques* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ *ont quatre tangentes communes* $A'B'$, $A'B''$, $A''B'$, $A''B''$. Elles ne peuvent en avoir aucune autre (20). Ces tangentes forment un quadrilatère complet dont le triangle diagonal est $A\,B\,C$. Ce triangle étant réel, *les tangentes communes sont toutes réelles ou toutes imaginaires conjuguées deux à deux.*

23. On suppose les points B et C imaginaires conjugués. Les points A' et A'' sont alors réels. Par A' on mène une tangente t à Σ_1; le lieux des pôles de t par rapport aux coniques $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ coupe BC au point A' et t au point de contact de cette tangente avec Σ_1. La droite t identique à ce lieu, est donc tangente à toutes les coniques Σ.

Ainsi les tangentes menées de A' et A'' à Σ_1 sont tangentes à toutes les coniques $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$. Ces droites sont les seules jouissant de cette propriété (20). Soient les points R' et R'' communs à la droite $B\,C$ et à la conique Σ_1. Ces derniers sont réels et le segment $R'R''$ empiètre sur $A'A''$; car l'involution $(A'A'', R'R'')$ est elliptique: l'un des points A', A'' est donc intérieur à Σ_1 et l'autre extérieur à la même courbe. Par suite:

Les coniques $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ *ont deux tangentes communes réelles et deux tangentes communes imaginaires conjuguées.*

24. Si les droites b et c (21) coïncident, les coniques Σ_1 et Σ_2 sont tangentes à la droite b au point $B \equiv (ab)$. Cette droite est un élément double des (E_1), (E_2),..., (E_k) et *les coniques* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ *sont tangentes au point* B *à la droite* b.

Les points A *et* B *sont conjugués dans l'involution* (I) (19) *rélative à la droite double* b; car une droite p issue de A a ses pôles $P_1, P_2, \ldots P_k$ sur a et le point P_k est identique à B.

Le point B *est un point double de l'involution* (I) *relative à la droite double*

a; car une droite p issue de B a ses pôles $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sur b et P_k est identique à B. Cette dernière involution a un second point double réel D, par lequel on peut mener deux tangentes à Σ_1, réelles ou imaginaires conjuguées. *Ces deux droites sont des tangentes communes à toutes les coniques* Σ_1 $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$.

REMARQUE. *Les droites* a *et* b *sont les seules droites doubles des systèmes* $(E_1), (E_2), \ldots, (E_k)$. En effet une troisième droite double x devrait passer par A ou B, sinon b serait le support d'une ponctuelle commune à (E_1) et (E_2) et ces systèmes seraient homologiques. Elle ne peut passer par B sans que ce point ne soit le sommet d'un faisceau commun à (E_1) et (E_2), ce qui entraine l'homologie de ces systèmes.

Enfin, si elle passe par A, les droites b, x, AX (X étant le pôle de x) sont communes à (E_1) et (E_2) et ces systèmes sont homologiques.

25. Si le point A est situé sur sa polaire a, les coniques $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ sont tangentes en ce point à la droite a. On considère la ponctuelle $(A\,L\,M\ldots)$ située sur a; les faisceaux des polaires $(a, l_1, m_1, \ldots)$ et $(a, l_2, m_2, \ldots)$ des points $A, L, M, \ldots$ par rapport à Σ_1 et Σ_2 sont projectifs et ont deux éléments doubles réels a et b. La droite b a même pôle B relativement à Σ_1 et Σ_2 et est une droite double de' (E_1) $(E_2), \ldots, (E_k)$. Ce cas a été traité (24); il reste à examiner le cas où les faisceaux $(a\,l_1\,m_1\ldots)$ et $(a\,l_2\,m_2\ldots)$ ont un rayon double unique a.

Par le point A ne peut passer une droite différente de a, et support d'une ponctuelle $(P_1\,P_2\ldots P_k)$, sinon la droite $A\,P_1\,P_2$ serait une droite double b des systèmes (E_1) et (E_2) et son pôle B par rapport à Σ_1 et Σ_2 serait un point de a; c'est le cas (24).

Par suite A est le point de contact de a avec la conique enveloppe des droites $P_1\,P_k$, $Q_1\,Q_k$, $R_1\,R_k, \ldots$; les points P_1, Q_1, R_1 étant les pôles par rapport à Σ_1 des rayons du faisceau $(p, q, r, \ldots)$. Un rayon s de ce faisceau passe par A et le pôle S_1 est à l'intersection des droites a et $P_1\,Q_1$. Le point S_1 de la ponctuelle $(P_1\,Q_1\,R_1\ldots)$ a pour homologue dans la ponctuelle $(P_k\,Q_k\,R_k\ldots)$ le point S_k qui est le point de contact de a avec la conique considérée; donc S_k et A coïncident et A est un point double de l'involution (I) (19) relative à la droite double a. *Les courbes* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_k$ *ont une seconde tangente réelle commune, issue du second point double de cette involution.*

REMARQUE. *La droite* a *est la seule droite double des systèmes* (E_1), $(E_2), \ldots (E_k)$.

En effet, une droite double x ne peut passer par A, à moins d'être identique à a. S'il existait une droite double x ne passant pas par A, le point $a\,x$ serait un élément double de $(E_1), (E_2), \ldots, (E_k)$, ainsi que sa polaire par rapport à Σ_1; mais cette polaire devrait passer par A, ce qui est impossible.

26. *L'ensemble des courbes* $\Sigma_1\,\Sigma_2\ldots\Sigma_k$ (10, 11, 17) *constitue un faisceau tangentiel de coniques; il est déterminé par deux courbes* Σ_1 *et* Σ_2.

THÉORÈMES. I. *Les pôles d'une droite réelle ou imaginaire par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel sont situés sur une droite* (7, 8, 13, 17).

II. *Les ponctuelles des pôles de deux droites réelles sont projectives; une droite réelle ou imaginaire ayant même pôle par rapport à chacune des coniques du faisceau joint deux points correspondants* (17, 12, 13).

III. *Les polaires d'un point réel* P *par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel enveloppent, en général, une conique tangente à toute droite ayant même pôle par rapport aux courbes du faisceau* (16, 17).

Les pôles d'une droite réelle ou imaginaire passant par P *sont situés sur une tangente à la conique* (12, 17).

Si le point P *est situé sur une droite ayant même pôle par rapport aux coniques du faisceau, les polaires sont concourantes* (7, 8, 16, 17).

27. On conclut du théorème I:

Deux droites conjuguées par rapport à deux coniques d'un faisceau tangentiel, sont conjuguées par rapport à toutes les courbes de ce faisceau.

Ces couples de droites déterminent sur une droite réelle ayant même pôle par rapport aux courbes du faisceau des couples de points en involution (19). *Le points doubles de cette involution sont les ombilics situés sur cette droite.*

Cette propriété n'a pas été démontrée pour les coniques Σ ayant un double contact, ou n'ayant en commun qu'une seule tangente et son point de contact S.

Les points de contact H et H' des coniques $\Sigma_1\,\Sigma_2 \ldots \Sigma_k$ sont deux ombilics; une droite p coupe la corde $s \equiv HH'$ en un point P; le support p' de la ponctuelle des pôles $P_1\,P_2 \ldots P_k$ de p, passe par S, pôle des contacts, et est la polaire de P par rapport à chacune des coniques Σ; par suite les droites conjuguées p et p' déterminent sur s deux points séparés harmoniquement par H et H'.

Sur les droites réelles issues de S, pôle de contact ou point de contact, il n'y a pas d'involution, l'une des droites p, p' passe toujours par S.

28. *Il existe une seule conique d'un faisceau tangentiel, tangente à une droite réelle donnée* p. Car la ponctuelle des pôles $(P_1\,P_2 \ldots P_k)$ de la droite p a un seul élément P_k sur p. Les points P_1, P_k définissent la projectivité des systèmes plans (E_1) et (E_k) et les systèmes réciproques involutifs (E) et (E_k) ont pour conique directrice la courbe cherchée Σ_k.

29. THÉORÈME DE STURM. *Les couples de tangentes menées par un point réel* M *aux coniques d'un faisceau tangentiel sont en involution.*

Car les couples de tangentes menées par le point M aux coniques Σ_1 et Σ_2 définissent une involution dont les rayons doubles sont conjugués par rapport à Σ_1 et Σ_2 et par suite conjugués par rapport aux courbes du faisceau (27).

Les droites qui projectent de M *deux ombilics situés sur une droite réelle ayant même pôle par rapport aux courbes du faisceau, sont conjuguées dans l'involution des tangentes* (27).

Si les courbes du faisceau ont un double contact, ou une seule tangente commune avec son point de contact, la droite MS, S étant le pôle des contacts,

ou le point de contact, est un rayon double de l'involution des tangentes (27).

30. Réciproquements, *deux droites* m *et* m' *réelles ou imaginaires conjuguées homologues dans l'involution des tangentes issues de* M, *sont tangentes à une même conique du faisceau.*

En effet, soient p et p' deux droites réelles séparées harmoniquement par m et m'; il existe une conique Σ_k du faisceau telle que p et p' soient deux droites conjuguées par rapport à cette conique; car la ponctuelle des pôles de p a un élément P_k situé sur p'. Cet élément P_k et le pôle P_1 de p par rapport à Σ_1 définissent la projectivité des systèmes (E_1) et (E_k) et les systèmes (E) et (E_k) sont réciproques par rapport à la conique cherchée Σ_k. Les tangentes menées de M à cette conique font partie de l'involution considérée et divisent harmoniquement p et p'; ces tangentes sont donc m et m'.

31. *Deux points* A' *et* A'' *réels ou imaginaires conjugués et une conique* Σ *déterminent un faisceau tangentiel de coniques dont* A' *et* A'' *sont des ombilics.*

La droite $A'A''$ n'est pas tangentes à Σ_1. On construit: 1° les pôles P et P_1 par rapport à Σ_1 de la droite $A'A''$ et d'une droite réelle p choisie arbitrairement; 2° les points B et C réels ou imaginaires conjugués, réciproques par rapport à Σ_1 et divisant harmoniquement les points A', A''; 3° le point P_k de la droite $A'A''$ séparé harmoniquement de p par le couple $A'A''$. On détermine la projectivité de deux systèmes plans (E_1) et (E_2) dont ABC sont trois points doubles, par un couple de points réels homologues P_1, P_2, P_2 étant choisi sur P_1P_k. Si (E) et (E_1) sont réciproques par rapport à Σ_1, (E) et (E_2) sont réciproques; ils sont d'ailleurs involutifs, car les sommets A, B, C du triangle ABC correspondent aux cotés opposés; (E) et (E_2) sont donc réciproques par rapport à une conique Σ_2. Les courbes Σ_1 et Σ_2 déterminent un faisceau tangentiel dont A' et A'' sont des ombilics.

COROLLAIRE. *Deux couples de tangentes réelles ou imaginaires conjuguées sont les cotés d'un quadrilatère complet dont le triangle diagonal est conjugué à la courbe.*

PROBLÈME. *Par un point imaginaire* A' *mener des tangentes à une conique* Σ_1. On détermine le triangle ABC conjugué aux coniques du faisceau tangentiel défini par la conique Σ_1, le point A' et son conjugué. Les points B et C sont réels. Les droites p et P_1P_k coupent les cotés AC et AB aux points X et Y, X' et Y'. Les points doubles des involutions (AC, XY), $(AB, X'Y')$ sont des ombilics du faisceau. Deux des points sont réels; en les joignant au point A' on a les tangentes cherchées.

32. Si on limite le théorème de STURM aux trois coniques dégénérées, formées dans le cas général par les trois couples d'ombilics, on retrouve la propriété involutive du quadrilatère complet, mais étendue au cas où chacun des couples de cotés opposés peut-être composé d'éléments imaginaires conjugués.

LE CENTENAIRE D'ABEL

(4-7 septembre 1902)

par P. MANSION

Professeur ordinaire à l'Université de Gand.

I

ESQUISSE BIOGRAPHIQUE (1)

Niels (Nicolas) Henrik Abel naquit le 5 août 1802, dans la petite paroisse de Finnö, près de Stavanger.

Son père, Sören Georg Abel, était pasteur de Finnö depuis 1799 ; il fut nommé en la même qualité à Gjerstad en 1803 et ce fut là qu'il mourut en 1820, laissant dans une position gênée, voisine de la misère, sa veuve et ses six enfants, cinq garçons et une fille.

Niels Henrik Abel passa son enfance au presbytère de Gjerstad où son père lui donna des leçons ainsi qu'à son frère aîné, tous deux étant destinés à faire des études. En 1815, il entra comme boursier à l'École cathédrale ou Collège de Christiania et il y resta jusqu'en 1821.

Il y fut un élève médiocre jusqu'en 1818, époque où Holmboe (1795-1850) fut nommé professeur de mathématiques à l'École cathédrale. Holmboe sut découvrir et éveiller le génie mathématique d'Abel. Il lui donna des leçons particulières et lut avec lui les grands traités d'Euler : l'*Introduction à l'analyse des infiniment petits*, le *Calcul différentiel*, le *Calcul intégral*. Ainsi armé, Abel continua facilement seul, étudiant non seulement les bons ouvrages encyclopédiques de Lacroix, Francœur,

(1) Nous résumons ici les documents réunis dans un bel ouvrage publié par MM. Elling Holst, Carl Störmer et L. Sylow sous le titre : *Niels Henrik Abel. Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*. Kristiania, Dybwad ; Paris, Gauthier-Villars ; Londres, Williams and Norgate ; Leipzig, Teubner (450 pp. in-4°, avec portrait, vue de Finnö et six fac-similé). Il y a une édition norvégienne.

Lalande, mais aussi ceux des maîtres de la science, Newton, d'Alembert, Lagrange (celui-ci avec prédilection), Poisson et même quelque peu les *Disquisitiones* de Gauss.

Pendant sa dernière année à l'École cathédrale, il crut trouver la résolution algébrique de l'équation du cinquième degré. Ni Holmboe, ni Hansteen (1784-1873), la plus haute autorité mathématique de la jeune Université de Christiania (elle avait été fondée en 1811), ni Degen (1766-1825) de Copenhague à qui la démonstration d'Abel avait été envoyée, ne découvrirent le défaut de son raisonnement. Mais il le trouva lui-même et cet essai, bien qu'il ne l'eût pas conduit au but, lui valut la protection des professeurs de l'Université : ils lui firent obtenir des subsides pour faire des études supérieures.

A l'Université (1821-1823), Abel subit ses examens d'une manière très ordinaire, sauf pour les mathématiques. Dès 1823, il publia quelques mémoires originaux peu remarquables. Mais un travail manuscrit sur le calcul intégral (maintenant perdu) qu'il soumit à ses professeurs leur parut si important qu'ils sollicitèrent et obtinrent pour lui, du Gouvernement norvégien, des bourses pour continuer ses études à l'Université pendant deux ans (1823-1825) et pour voyager à l'étranger, aussi pendant deux ans (1825-1827).

Pendant les vacances de 1823, Abel alla à Copenhague. C'est là que, pour la première fois, il s'occupa de l'*inversion des intégrales elliptiques* : Degen, dès 1821, l'avait engagé à étudier ces intégrales. C'est alors aussi qu'il fit la connaissance de Christine Kemp, qui, l'année suivante, devint sa fiancée.

Revenu à Christiania, il fit sa première grande découverte, *la démonstration de l'impossibilité de la résolution générale de l'équation du cinquième degré* et la publia sous une forme extrêmement brève, en une plaquette d'une demi-feuille in-4° : Abel était pauvre et avait réduit les frais d'impression au strict minimum.

Il est presque certain que ce fut également à cette époque qu'il trouva la double périodicité et les autres principes fondamentaux de sa théorie des fonctions elliptiques, et aussi, mais sous une forme moins générale et moins rigoureuse que plus tard, le célèbre théorème sur l'addition d'un nombre quelconque d'intégrales de différentielles algébriques.

Dans le programme de voyage qui lui avait été imposé, il devait aller à Goettingue, pour voir Gauss (1777-1855), et à Paris. Il quitta Christiania en septembre 1825, après avoir assuré

de son mieux le sort des siens, surtout de sa sœur Élisabeth-Madeleine, la seule qui, dans sa famille, lui ressemblât par les dons de l'esprit et du cœur. Voici quelles furent les étapes de ce grand voyage qu'il fit jusqu'à Paris, avec des amis norvégiens, jeunes comme lui et dont plusieurs se sont fait un nom honorable dans la science : Hambourg, où Abel vit Schumacher (1780-1850), l'éditeur des *Astronomische Nachrichten*, Berlin, où il se lia avec Crelle (1780-1856) et resta cinq mois, Freiberg, Dresde, Prague, Vienne, Graz, Trieste, Venise, Vérone, Botzen, Zurich, Bâle, Paris (du 10 juillet au 29 ou 30 décembre 1826), Bruxelles, Liége, Cologne, Berlin (du 10 janvier au commencement de mai 1827), Hambourg, Christiania (20 mai 1827).

Ni à l'aller, ni au retour, Abel ne passa par Goettingue : il ne vit pas Gauss et, au fond, cela fut heureux. L'illustre géomètre ne lui aurait probablement pas ouvert le trésor de ses pensées et ne l'aurait pas encouragé, comme le prouve sa conduite à l'égard des deux Bolyai (1). Mais après la mort de Gauss, la découverte de ses recherches sur les fonctions elliptiques dans son *Nachlass* eût pu faire croire à une influence de Gauss sur Abel, comme on a cru longtemps à son influence sur les Bolyai et sur Lobatchefsky.

Ce qui fut un vrai bonheur pour Abel, ce sont les relations qu'il noua à Berlin avec Crelle, homme excellent qui accueillit le jeune géomètre dans sa maison, l'encouragea de toute manière et devint pour lui un ami absolument dévoué. La rencontre d'Abel avec Crelle, dit M. Holst, fut pour tous deux le grand événement de leur vie et c'est dans leur première entrevue que furent jetées les bases du *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. C'est là que parurent les premiers mémoires d'Abel et tout d'abord *sa démonstration de l'impossibilité de la résolution générale de l'équation du cinquième degré*, developpée et complétée.

C'est à Berlin aussi qu'Abel abandonna le point de vue des géomètres du XVIII[e] siècle dans la théorie des séries. Le livre de Cauchy : *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), lui ouvrit les yeux et opéra une vraie révolution dans ses idées. Il écrivit alors, ou pendant son voyage, son admirable mémoire sur le binome où il complète si magistralement les recherches de Cauchy (1789-1857) sur ce sujet.

(1) Gauss n'a jamais rien dit d'essentiel à son vieil ami Wolfgang Bolyai sur les principes de la géométrie non euclidienne et quand Jean Bolyai eut trouvé ces principes, Gauss ne publia pas une ligne pour signaler cette découverte au monde mathématique.

A Paris, il vit ce savant lui-même et d'autres illustrations françaises. Mais, hélas ! il n'entra dans l'intimité et ne fut compris de personne. Il travailla avec acharnement à perfectionner et à étendre ses recherches sur les fonctions elliptiques et sur la résolution des équations par radicaux. Le 30 octobre 1826, il présenta à l'Institut un grand mémoire contenant sous sa forme la plus générale ce prodigieux théorème d'addition appelé aujourd'hui le *théorème d'Abel* (30 octobre 1826). Cauchy, chargé de juger ce mémoire, ne l'examina pas ou n'en vit pas la portée; ce n'est que longtemps après la mort d'Abel qu'on le retrouva dans les papiers de Cauchy et qu'il fut imprimé (1841) dans les Mémoires de l'Institut. Heureusement qu'Abel eut soin d'en publier la partie essentielle, en 1828 et 1829, dans le *Journal* de Crelle.

Rentré à Christiania en 1827, malgré les instances de Crelle qui voulait le fixer à Berlin, il s'y trouva dans la situation la plus gênée au point de vue pécuniaire, même lorsqu'il eut obtenu une maigre position de professeur suppléant à l'Université et à l'École militaire (1). Mais jamais sa productivité ne fut plus intense. Il publie, en septembre 1827, ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* qui contiennent la démonstration de la double périodicité, la multiplication et la division de ces fonctions, et deux questions qui prouvent qu'il possède la théorie de la transformation et même qu'il a déjà entamé la question de la multiplication complexe; en 1828, dans trois mémoires successifs, il traite à fond la théorie de la transformation (2) ; il publie dans

(1) En Norvège, on se reproche beaucoup aujourd'hui de n'avoir pas aidé Abel plus généreusement et, surtout, de ne l'avoir pas nommé plutôt que Holmboe à une chaire qui fut vacante à l'Université de Christiania pendant le voyage d'Abel. Mais la Norvège était bien pauvre à cette époque ; ensuite, Abel semble avoir trouvé toute naturelle la nomination à l'Université de Holmboe, son maître et son ami. Enfin, il ne faut pas oublier que personne, sauf Jacobi, ne pouvait alors apprécier, dans toute sa plénitude, la grandeur du génie mathématique d'Abel, pas même Crelle, le plus dévoué de ses amis.

(2) Jacobi (1804-1851) l'avait devancé dans la publication de la théorie de la transformation. Si, comme c'est probable, Jacobi a pu voir les *Recherches* d'Abel, publiées le 20 septembre 1827, avant d'écrire à Schumacher sa lettre du 18 novembre 1827, il n'a pas pu ne pas profiter des lumières qu'elles lui apportaient ; mais il avait trop conscience de son propre génie mathématique pour ne pas savoir qu'étant sur la voie, comme il l'était, il eût trouvé, comme Abel, la double périodicité et tout ce qui s'en déduit naturellement. " La manière dont chacun d'eux, dit Dirichlet, complétait immédiatement la découverte de l'autre, ne laisse aucun doute que chacun, si l'autre ne l'avait prévenu dans une partie de l'œuvre, aurait pu l'achever seul toute entière. "

le *Journal de Crelle* un fragment du mémoire présenté à l'Institut de France en 1826. C'est alors aussi qu'il écrivit son *Précis* (inachevé) *de la théorie des fonctions elliptiques* où il expose dans une unité saisissante l'ensemble de ses recherches ; mais ce mémoire ne parut qu'après sa mort.

Vers la fin de cette période de sa vie, grâce à Crelle, il sut comment Legendre (1752-1833), Fuss (1797-1855), Gauss et Jacobi appréciaient ses recherches; il entra en relations avec Legendre qui l'encouragea de son mieux, et enfin il put espérer d'obtenir une chaire à l'Université de Berlin.

Une mort prématurée empêcha la réalisation de toutes ses espérances. Abel passa les vacances de Noël (1828) à Froland, près Arendal, dans la famille d'un grand propriétaire de forges, S. Smith, où sa fiancée était institutrice.

Il y tomba sérieusement malade et bientôt personne, pas même lui, ne put se faire illusion sur le sort qui l'attendait.

Dès le début de sa maladie, quand la guérison semblait encore possible, le 6 janvier 1829, " voulant sauver le joyau de sa vie et de son œuvre, et ayant déjà sans doute le pressentiment de ce qui allait suivre „, il rédigea la démonstration générale de son grand théorème d'addition contenu dans le mémoire de Paris. Il l'envoya à Crelle qui put encore l'imprimer avant la mort d'Abel.

Ce fut sa dernière œuvre, son testament scientifique (1)

Quand un peu plus tard, il sut que tout espoir était perdu, il se préoccupa de faire quelque chose pour sa fiancée, dit M. Holst. " Son dernier vœu fut de charger son vieil ami Keilhau d'en prendre soin. Il la savait ainsi entre des mains fidèles et pieuses, bien que Keilhau ne connût pas alors personnellement Mlle Kemp. " Elle n'est pas belle, dit Abel, dans son adieu à Keilhau, mais c'est une femme admirable. „ L'agonie fut pénible. Sa fiancée ne le quitta point, et comme les autres voulaient partager sa tâche et l'aider à le soigner, elle refusa d'accepter leur aide *pour*

(1) Voici les vers singulièrement exacts de la cantate de Björnson relatifs à ce dernier mémoire d'Abel :

Dengang han kjendte,	Lorsqu'il reconnut
döden kom for at hente,	que la mort venait le chercher,
bad han den vente.	il la pria d'attendre.
Han regnet og regnet,	Il calcula, il calcula,
til han satte tegnet.	jusqu'à qu'il eut placé sa signature,
det sidste,	la dernière,
vidste under det, som ingen endnu	encore sous ce que personne ne savait
og knapt forstod.	et qu'à peine l'on comprit.
Nu er det forskningens rod.	Maintenant c'est une base de recherches.

posséder seule ses instants. Le 6 avril, à 4 heures de l'après-midi, tout fut fini. Il avait alors 26 ans et 8 mois. „ Le 8 avril, Crelle écrivait à Abel que sa nomination à Berlin était assurée !

" L'enterrement eut lieu au cimetière de Froland, le 13 avril. L'hiver avait repris toute sa rigueur et un violent tourbillon de neige se déchaînait. Des villages et de la campagne du voisinage on n'en vint pas moins en foule lui faire un grand cortège pour lui rendre les derniers honneurs, car on était près de la maison de son enfance. Le bruit que le fils du pasteur de Gjerstad était devenu quelqu'un de grand et de remarquable avait pénétré plus profondément dans le peuple de cette région qu'on n'aurait pu le soupçonner, et cette grande manifestation de sympathie montra combien sa mort les avait tous frappés. Ce fut donc dans le peuple de son pays natal qu'il trouva les premiers compatriotes qui honorèrent sa mémoire. „ Keilhau, qui épousa plus tard M^lle^ Kemp, et les amis intimes d'Abel placèrent sur sa tombe un monument très simple.

On verra plus bas comment un maître de la science d'aujourd'hui apprécie l'œuvre mathématique d'Abel, et l'on peut lire dans le *Mémorial* la belle et savante étude que M. Sylow lui a consacrée ; mais pour achever de faire connaître l'homme nous transcrirons ici le portrait si vrai qu'en a tracé Crelle : " Il était également distingué par la pureté et la noblesse de son caractère et par une rare modestie, qui le rendait aussi aimable que son génie était extraordinaire. La jalousie des mérites d'autrui lui était chose tout à fait étrangère. Il était bien éloigné de cette avidité d'argent ou de titre, ou même de renommée, qui porte souvent à se servir de la science comme d'un moyen de parvenir. Il estimait trop haut les vérités qu'il cherchait pour les vendre à si bas prix. Il trouvait la récompense de ses efforts dans leur résultat même ; il était presque aussi heureux d'une découverte nouvelle, qu'elle eût été faite par lui ou par un autre. Les moyens de se faire valoir étaient pour lui chose inconnue ; il ne faisait rien pour lui-même, mais tout pour sa chère science. Tout ce qui a été fait pour lui provient exclusivement de ses amis, sans la moindre intervention de sa part... Il a sacrifié sa vie pour la science, sans songer à sa propre conservation. „

Jusqu'à la fin de sa vie, Abel resta simple et bon comme un enfant. A Paris, le souvenir de sa fiancée le garda contre les séductions de la grande ville. Au point de vue religieux, il avait naturellement les préjugés habituels des protestants à l'égard du catholicisme ; après avoir dit de Cauchy qu'il est " le mathéma-

ticien qui sait comment il faut traiter les mathématiques „, que " ses travaux sont excellents „, qu'il " les lit assidûment „, il ajoute : " Cauchy est extrêmement catholique (1) et bigot, chose bien étrange pour un mathématicien „. En revanche, à Vienne, il est frappé de la grandeur du service divin à la cathédrale. On peut regretter qu'Abel ne soit pas entré à Paris dans l'intimité d'Ampère. Ampère, génie encyclopédique, n'avait pas seulement fait des découvertes de premier ordre en mathématiques et surtout en physique, il avait aussi approfondi les problèmes les plus ardus de la psychologie, de la métaphysique et de la religion ; mais il avait une âme simple et candide comme celle d'Abel, ils se seraient compris : Ampère aurait pu ouvrir au jeune géomètre norvégien des échappées sur les mystères de l'au-delà, et l'arracher, si cela a jamais été nécessaire, à ce que M. Holst appelle le *sec intellectualisme de son époque.*

II

LES FÊTES DU CENTENAIRE D'ABEL

L'Université et l'Académie des sciences de Christiania, aidées généreusement par le Storthing de Norvège, ont organisé les fêtes du centenaire du grand géomètre dont nous venons d'esquisser la biographie.

Le Comité des fêtes se composait de Nansen, président, Mohn, Guldberg, Sophus Torup, Sylow et E. Holst, membres, C. Störmer et L. Rieker, secrétaires.

Le Comité publia en août dernier, en français et en norvégien, le *Mémorial*, dont nous avons cité le titre plus haut. C'est un vrai monument élevé à la gloire d'Abel, qui le fait connaître tout entier comme homme et comme savant. Un beau portrait d'Abel et une vue du presbytère de Finnö, d'après une peinture et un lavis de 1826, se trouvent en tête du volume. Vient ensuite l'admirable cantate que Björnson a composée à l'occasion du jubilé ;

(1) On pouvait dire de lui ce que M. Borel a écrit d'Hermite : " la religion catholique était le centre de sa vie ; on ne pouvait s'empêcher d'admirer comment, ce point de départ une fois admis, toutes ses idées religieuses, morales, politiques, sociales formaient un tout admirablement logique et ordonné ; ses opinions et ses actes étaient aussi d'accord avec ses idées. Et ce n'est point là un mérite banal „.

une attachante biographie par M. E. Holst, avec toutes les lettres d'Abel qui nous restent, celles qui lui furent adressées ou qui se rapportent à lui. M. C. Störmer y a joint une collection de documents administratifs qui ne donnent qu'une idée trop exacte de la détresse dans laquelle Abel s'est trouvé, pour ainsi dire, pendant toute sa vie. Le livre se termine par une étude magistrale de M. Sylow sur l'œuvre mathématique d'Abel et, en particulier, sur ses recherches d'algèbre supérieure.

Le Comité avait invité les Universités et les Académies du monde entier à envoyer des délégués aux fêtes du centenaire. L'appel fut entendu. Dès le 4 septembre, de nombreux représentants des corps savants d'Europe, d'Amérique, d'Australie et même du Japon se trouvaient réunis à Christiania. Citons-en quelques-uns au hasard :

Allemagne : Engel, Hensel, Hilbert, Krause, Lampe, Meyer Pringsheim, Schwarz, H. Weber. *Angleterre :* Forsyth. *Autriche :* Czuber. *Belgique :* Le Paige. *Bohême :* Lerch. *Danemark :* Thiele, Zeuthen. *États-Unis :* Newcomb. *Finlande :* Lindelöf. *France :* Picard. *Grèce :* Stephanos. *Hollande :* Cardinaal. *Italie :* del Pezzo et Volterra. *Russie :* Backlund. *Suisse :* Fehr, Graf. *Suède :* Bendixon, Mittag-Leffler, Phragmen, etc.

La réception des délégués eut lieu le soir du 4 septembre. Nansen y souhaita (en anglais) la bienvenue aux savants étrangers, dans une allocution chaleureuse et pleine d'idées élevées sur le rôle des petites nations dans l'œuvre du progrès scientifique. Le souvenir d'Abel, dit-il en terminant, rappellera toujours aux générations futures le prix et le but de la vie, si bien exprimés par les beaux vers de Longfellow :

> Life is real ! Life is earnest !
> And the grave is not its goal :
> " Dust thou art, to dust returnest „
> Was not spoken of the soul.
> Not enjoyment and not sorrow
> Is our destined end or way,
> But to act that each to-morrow
> Finds us farther than to-day.

La séance du lendemain, à midi, sous la présidence du Recteur de l'Université, M. Brögger, et du Président de l'Académie des sciences, M. Mohn, fut à proprement parler, la première consacrée à la glorification d'Abel. Elle eut lieu, comme la seconde, en présence de S. M. le Roi Oscar II, venu exprès de Stock-

holm pour les fêtes du centenaire, de S. A. R. le prince Eugène, régent de Norvège. Toutes les autorités du pays et de la capitale, toute la haute société de Christiania, étaient réunies dans la grande salle communale.

Des discours de bienvenue furent prononcés par M. Blehr, ministre d'État (en français) et par M. Brögger (en allemand). MM. Weber et Volterra répondirent, le premier en allemand, le second en français, au nom des savants étrangers.

M. Sylow apprécia ensuite en quelques pages substantielles l'œuvre mathématique d'Abel, en résumant la belle et profonde étude publiée par lui dans le *Mémorial*. Son discours était en norvégien : une traduction française en avait été remise d'avance aux délégués étrangers.

Mais la cantate de Björnson, mise en musique par Sinding et très bien chantée par un chœur d'étudiants, de dames et d'enfants, semble avoir fait saisir à tous ceux qui assistaient à la belle séance de ce jour, mieux que les discours les plus savants, la grandeur de l'œuvre d'Abel. Grâce à une traduction française presque littérale, les étrangers quelque peu initiés aux langues germaniques parvenaient à suivre ces paroles ailées, si pleines de sens pour ceux qui connaissent la biographie d'Abel. Nous ne pouvons résister au plaisir d'en citer quelques strophes, même dans une traduction décolorée :

(Avant les discours). Impassible comme le temps — est la science des nombres. — Leurs combinaisons sont dans une éternelle aurore — plus pures que la neige, — plus subtiles que l'air, — mais plus fortes que le monde, — qu'elles pèsent sans balances, — qu'elles éclairent sans rayons.

Celles d'Abel ont — enfoncé de profondes racines — dans la loi de la science. — *Là où il a été — on ne pense plus sans lui.*

L'étoile sous laquelle il est né — brille au berceau — des savants, bien loin. — Cent ans — sont ici comme un jour.

(Après les discours). Là où la solitude s'accroît — de la brume de la mer et de la nuit, — rejeté vers la pensée intérieure, — on laisse le jeu et le travail — pour contempler le ciel — la mer et les montagnes. — Sur cent qui rêvent ainsi — un devient un penseur.

Pour celui-là tout est questions — qui trouvent en lui un écho ; — un livre qui veut répondre — ne fait qu'en poser de nouvelles. — Le vide a des yeux — qui questionnent sans repos, — les étoiles même parlent — de distance et de mesure.

Lorsqu'à un de ceux-là, il vient des ailes, — et qu'il s'envole librement, — il répond pour le monde — à des énigmes millénaires. — C'était un enfant du Vestland — d'une vingtaine d'années. — Maintenant il appartient au monde — *mais cet enfant était à nous.*

Il est à peine nécessaire de dire quels applaudissements accueillirent ces dernières paroles : *cet enfant était à nous* et, dans la première partie, celles-ci : *là où il a été, on ne pense plus sans lui,* qui répondaient si bien aux sentiments patriotiques de la Norvège.

Le soir, S. M. le Roi reçut les délégués au palais et, au souper qui suivit, il remercia à son tour dans un toast en français, les délégués venus de si loin pour honorer un géomètre norvégien.

La seconde séance en l'honneur d'Abel fut plus strictement académique que la première. Après un discours de M. Mohn, cinq délégués prenant la parole au nom de tous, MM. Forsyth, Gravé, Schwarz, Zeuthen, Picard, apprécièrent l'œuvre d'Abel ; M. Hensel parla au nom de la rédaction actuelle du journal de Crelle. M. Mittag-Leffler fit hommage au Comité d'un volume triple des *Acta mathematica* où se trouvent réunis les mémoires écrits par cinquante géomètres, en l'honneur d'Abel, en prenant comme point de départ l'une ou l'autre de ses idées, et aussi un mémoire inédit d'Abel lui-même, retrouvé récemment, savoir la seconde partie de ses *Recherches sur les fonctions elliptiques.*

D'innombrables adresses furent ensuite remises au Comité ; puis le Recteur proclama les noms de vingt-neuf savants nommés docteurs en mathématiques, *honoris causa,* par l'Université de Christiania : Appell, Backlund, Boltzmann, George Cantor, Cremona, Darboux, George Howard Darwin, Dedekind, Dini, Forsyth, Gibbs, Hilbert, Jordan, Lord Kelvin, Klein, Königsberger, Markof, Mittag-Leffler, Newcomb, Picard, Poincaré, Lord Rayleigh, Salmon, Schwarz, Stokes, Volterra, Weber, Wirtinger, Zeuthen.

Nous regrettons de ne pouvoir donner une idée des discours et adresses, écrites dans toutes les langues savantes (en particulier, un assez grand nombre en latin, entre autres celle de M. Mittag-Leffler). Nous nous contenterons d'emprunter un mot à celle de M. Forsyth, parce qu'il rend bien la pensée qui a conduit les délégués à Christiania : *We resemble,* dit-il, *pelgrims of old, on their way to a sacred shrine* et un autre à l'éloge de la Norvège : *The Norwegian knows no fear, and has shown his fearlessness through the ages even in the most recent days.* On pensait involontairement à Nansen et aussi, dans le domaine de la science, aux recherches si originales de Bjerkness, Guldberg, etc. Mais nous reproduisons en entier le discours de M. Picard, qui, dans sa belle concision, est une digne appréciation de l'œuvre scientifique d'Abel.

„ Sire, Altesse Royale,

„ Monsieur le Recteur, Monsieur le Président de la Société des Sciences,

„ Mesdames, Messieurs.

„ Les délégués de tous les pays sont heureux d'apporter à l'Université et à la Société des sciences de Christiania l'expression de leur admiration pour le grand géomètre dont la Norvège fête le centenaire. C'est pour eux une joie d'autant plus grande qu'ils ont en cette circonstance le grand honneur d'être reçus par le souverain éclairé qui a montré tant de sollicitude pour les sciences et a su, en poète, apprécier la profonde poésie des sciences mathématiques. Que Votre Majesté nous permette de lui en exprimer notre vive reconnaissance.

„ Le nom d'Abel est a jamais inscrit parmi les noms des mathématiciens les plus célèbres du XIX^e^ siècle, et la brièveté même de sa carrière si féconde a contribué encore à accroître sa renommée. La lecture des ouvrages d'Euler, puis de Lagrange et de Legendre, inspira à Abel tout jeune encore, le désir de contribuer aux progrès de la théorie des équations algébriques et de la théorie des fonctions elliptiques. On lui doit en algèbre la première démonstration rigoureuse de l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations de degré supérieur au quatrième, et une classe remarquable d'équations résolubles est restée dans la science sous le nom d'équations abéliennes. Comme l'ont montré les travaux ultérieurs, c'est à une suite d'équations abéliennes de degré premier que se ramène la résolution de toute équation résoluble par radicaux. — Dans la théorie des fonctions elliptiques, Abel s'élevant bien au-dessus des points de vue d'Euler et de Legendre, voit le premier l'importance capitale du problème de l'inversion et de la double périodicité ; ses mémoires sur la multiplication, la division et la transformation des fonctions elliptiques présentent une admirable unité et il a fallu une incomparable pénétration pour ramener à leurs véritables principes les problèmes traités.

„ Abel avait été frappé de bonne heure du peu de rigueur que présentaient certaines théories mathématiques dont se contentaient alors les géomètres à qui la Mécanique céleste et la Physique mathématique devaient pourtant de si grands progrès. Ses courtes notes sur les séries témoignent d'une remarquable perspicacité ; par une merveilleuse divination, il pressent l'im-

portance que vont prendre dans la science les séries entières, et il arrive à la notion de ce que nous appelons aujourd'hui le cercle de convergence d'une telle série. Ses remarques sur la continuité des fonctions appelaient en même temps, pour la première fois, l'attention sur les dangers de certains modes de raisonnement. Abel est donc, après Cauchy et Gauss, un des maîtres de la première heure dans la révolution d'un caractère hautement philosophique qui devait rendre de nos jours la mathématique si précise dans ses concepts fondamentaux, et si inflexible dans la rigueur logique de ses déductions.

„ Les intégrales et les fonctions elliptiques avaient occupé les premières années de la vie scientifique d'Abel ; mais ce sujet, si vaste qu'il fût, n'avait pas tardé à être trop étroit pour son génie. Le difficile problème de la réduction des intégrales hyperelliptiques à des logarithmes et à des intégrales l'occupe à plusieurs reprises, et il laisse sa marque profonde sur cette question qui sollicitera sans doute longtemps encore les efforts des géomètres. Entreprenant ensuite l'étude des intégrales de différentielles algébriques, il découvre la proposition connue sous le nom de *Théorème d'Abel*. Cette généralisation merveilleuse de l'intégrale d'Euler devait avoir d'immenses conséquences. Elle permit à Abel lui-même de définir le nombre entier que l'on devait appeler plus tard le *genre* d'une courbe algébrique, et dont l'étude, à d'autres points de vue d'ailleurs, fut faite complètement plus tard par Riemann et par Weierstrass. Jacobi rendit un juste hommage à celui qui avait été son émule et, sur certains points, son devancier, en proposant pour les intégrales de différentielles algébriques le nom resté dans la science *d'intégrales abéliennes*. De même, le nom d'Abel est attaché aux fonctions périodiques de plusieurs variables, dont son célèbre théorème établit l'existence et les propriétés fondamentales.

„ En apprenant la mort prématurée du jeune géomètre norvégien, l'excellent et vénéré Legendre écrivait qu'Abel avait élevé un monument suffisant à donner une idée de ce qu'on pourrait attendre de son génie *ni fata obstetissent*. Cet éloge nous paraît aujourd'hui bien faible. Tel qu'il est, le monument inachevé place Abel parmi les plus grands. Qu'il me soit permis, en pensant à sa carrière si courte et si tourmentée, d'évoquer la mémoire d'un géomètre français qui devait être brusquement enlevé à la science peu de temps après la mort d'Abel, en laissant aussi derrière lui un glorieux souvenir. Évariste Galois avait fait, on ne peut en douter, une étude approfondie de quelques mémoires

fondamentaux d'Abel, et ces deux grands inventeurs se ressemblent par leur étonnante puissance de généralisation et par l'ampleur des questions qu'ils soulèvent. Abel et Galois, quels rapprochements ces deux noms nous suggèrent ! Si quelques années de plus leur avaient été données, le développement des mathématiques au XIXe siècle eût été complètement modifié. Peut-être vaut-il mieux cependant, pour les génies de cet ordre, de disparaître tout jeunes encore, en laissant derrière eux un sillage éclatant, et, en ce sens, les Anciens avaient raison de dire que ceux qui meurent jeunes sont aimés des Dieux. La postérité la plus reculée rattachera toujours au nom d'Abel le domaine immense concernant les intégrales de différentielles algébriques quelconques, et dans les Traités sur la théorie des équations algébriques on verra toujours presque à chaque page les noms d'*équations abéliennes* et de *groupes abéliens.*

„ Je ne puis terminer sans associer à cette commémoration d'Abel le souvenir d'un mathématicien norvégien dont la perte récente est encore ressentie par tous les géomètres. Sophus Lie illustra la science norvégienne pendant le dernier tiers du XIXe siècle et sa *théorie des groupes de transformations* préservera à jamais son nom de l'oubli. Avec le grand Abel et l'illustre Sophus Lie, la Norvège est assurée d'occuper une place d'honneur dans l'histoire des mathématiques au XIXe siècle. „

Les fêtes qui suivirent furent les fêtes de l'hospitalité norvégienne en l'honneur des savants étrangers : banquet offert par le Conseil communal de Christiania, cortège aux flambeaux des étudiants ; fête pour les dames des délégués ; représentation de *Peer Gynt* d'Ibsen, avec la musique de Grieg ; excursions diverses, entre autres à Gjerstad où Abel avait passé son enfance. Nous ne devons pas oublier des réunions plus intimes dans les familles qui avaient tenu à honneur de donner l'hospitalité aux délégués : chacun y était accueilli avec une si franche et si sincère cordialité qu'il avait l'illusion de se retrouver au foyer de vieux amis après une longue absence.

Le banquet de la ville de Christiania fut particulièrement brillant. Le premier bourgmestre y porta un toast au Roi et aux souverains des nations représentées au jubilé d'Abel ; M. Anderson Aars but à la santé des délégués " dans une langue aussi internationale que celle des mathématiques, dans la langue du cœur „. M. Picard répondit au nom des étrangers par un toast où il sut rendre hommage à toutes les gloires de la Norvège.

Voici le toast de M. Picard :

" Les délégués des nations étrangères présents aux fêtes du centenaire d'Abel remercient la municipalité de Christiania du cordial accueil qu'ils ont trouvé dans cette belle cité. Ils n'oublieront pas la magnificence du paysage, qui se déroule autour de la capitale de la Norvège, ils n'oublieront pas surtout la grâce et l'amabilité de ses habitants.

„ Les ignorants comme les adeptes des sciences mathématiques emporteront un souvenir ému des cérémonies où ce pays vient de célébrer un de ses plus glorieux enfants. C'est, pour l'esprit comme pour le cœur, un spectacle fortifiant que cette communion d'hommes d'origines si diverses dans un même idéal de science pure et désintéressée. Qui peut mieux en être le type qu'un géomètre de génie comme votre Abel? Quand ils atteignent ces hauteurs, les mathématiciens sont de grands poètes, je veux dire de grands créateurs dans le monde des formes et des nombres où ils aiment à se mouvoir. C'est ce que nous ont si bien exprimé M. Björnson et M. Sinding dans l'admirable cantate qui nous a hier très vivement émus et dont il nous semble entendre encore retentir les échos.

„ Il ne faudrait pas croire cependant, comme on le fait quelquefois, que les mathématiciens sont nécessairement des isolés ensevelis dans leurs symboles et perdus dans leurs rêves. Tels sont les rapports entre les lois de l'esprit humain et celles du monde extérieur, que ces symboles nous sont indispensables pour formuler et développer nos connaissances sur la nature qui nous entoure. Les méditations profondes des géomètres concourent donc au moins indirectement au développement de la science générale, de la science, dont les progrès incessants ont été la grande caractéristique du siècle qui vient de finir, et tendent aujourd'hui à transformer les conditions mêmes d'existence de l'humanité.

„ Les mathématiciens ne sont pas seuls à cultiver le symbolisme. Beaucoup de grands artistes, en cela géomètres, aiment aussi les symboles. Il n'est pas besoin de le rappeler dans la patrie d'Ibsen. C'est ainsi que les penseurs se rejoignent venant des points les plus divers. Il y a bien des manières de travailler à la solution de ces questions sociales, dont l'étude fait aujourd'hui l'honneur et le tourment des nations civilisées. Poètes et dramaturges, mathématiciens, physiciens et naturalistes y concourent sous des formes diverses, et d'une façon plus ou moins

consciente. Dans toutes ces directions, la Norvège a des noms illustres à citer. Qui ne connaît au moins quelques-unes des productions de vos poètes et de vos auteurs dramatiques? M. Ibsen et M. Björnson ne vous appartiendront bientôt plus. Qui n'a entendu aussi quelques morceaux de vos musiciens et admiré les fraîches ou vigoureuses peintures des régions polaires?

„ Les hommes d'action et d'énergie sous toutes ses formes ne vous manquent pas non plus, véritables poètes encore dans leurs projets audacieux, et nous aimons à saluer dans M. Nansen un artiste par la grandeur de ses conceptions, en même temps qu'un savant armé d'une rigoureuse logique.

„ L'autorité des maîtres éminents qui enseignent à l'Université de Christiania est, pour l'avenir, un sûr garant des succès de la science norvégienne. De quelque côté que nous tournions nos regards, nous pouvons saluer vos progrès. Je ne crois pas me tromper, en disant que plus d'un grand pays en Europe pourrait envier votre développement pacifique, dont la continuité régulière est un gage de durée. Vos robustes populations, élevées parfois à la rude école de la lutte contre les éléments, ont appris qu'il n'y a de durable que ce qui se fixe lentement. Puissiez-vous jouir longtemps, dans le calme et la concorde, d'un bonheur que vous avez si bien mérité !

„ La cité de Christiania est la digne capitale de votre belle patrie. Sa position merveilleuse au fond de ce fjord magnifique contribue à son développement matériel, en même temps que la création d'institutions de bienfaisance et d'enseignement témoigne de son développement moral et intellectuel. Il ne manque aux mathématiciens que de voir sur une de vos places publiques la statue d'Abel; mais, d'après ce que nous avons appris ce matin, nous sommes assurés de la trouver à notre prochain voyage en Norvège.

„ Messieurs, je lève mon verre en l'honneur de votre patrie et de sa capitale.

„ Hurrah pour la Norvège !

„ Hurrah pour la ville de Christiania ! „

La musique joua ensuite les airs nationaux des pays qui avaient envoyé des délégués aux fêtes du centenaire et enfin celui de la Norvège qui fut chanté par toute la salle, au milieu d'un enthousiasme indescriptible.

Les étudiants avaient organisé un cortège aux flambeaux. Après le banquet, leurs délégués vinrent féliciter et remercier les savants venus de si loin pour acclamer Abel. Ce fut Newcomb

qui leur répondit en leur parlant du rôle de la science et de la dignité de l'homme de science : *In Nature there is nothing great but man, in man there is nothing great but mind.* Mais on ne s'en tint pas là. Malgré le tumulte du dedans et du dehors, Nansen, comme un Viking des vieux âges au milieu du bruit des vagues, harangua du haut d'une fenêtre la foule des étudiants massés dans la rue. MM. Picard, Schwarz et Mittag-Leffler leur parlèrent aussi et soulevèrent des applaudissements sans fin.

Tous ceux qui ont pris part aux fêtes du centenaire d'Abel garderont de la Norvège un souvenir impérissable. Quand on revient de fêtes pareilles et que l'on a vu la part qu'y a prise le peuple norvégien, on est persuadé de la vitalité de cette petite nation qui, depuis qu'elle est redevenue indépendante, a donné au monde Abel, Sylow, Guldberg, Bjerknes, Lie, Ibsen, Björnson, Grieg, Nansen, pour ne citer que des noms connus de tous. Les vieux Normands ont conquis une belle province de France, puis l'Angleterre et Naples, ils ont trouvé l'Islande, le Groënland et l'Amérique du Nord ; leurs descendants ne sont pas moins audacieux et en un siècle ont déjà fait de belles conquêtes dans le domaine de la pensée et de l'action (1).

(1) Le grand journal de Christiania, *Aftenposten*, a publié au jour le jour, un récit très complet des fêtes du centenaire d'Abel que nous avons largement utilisé dans ce qui précède.

Extrait de la *Revue des Questions scientifiques*, 3e série, t. II, octobre 1902, pp. 603-618.

TRAITÉ
D'ARITHMÉTIQUE
ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DES ÉLÈVES DES COURS PROFESSIONNELS
DES CANDIDATS AUX ÉCOLES SPÉCIALES DES UNIVERSITÉS
ET A L'ÉCOLE MILITAIRE DE BRUXELLES

PAR

L'ABBÉ E. GELIN

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE ET EN THÉOLOGIE
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES AU COLLÈGE SAINT-QUIRIN A HUY

Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique
adopté et spécialement recommandé
par le Conseil de perfectionnement de l'Enseignement moyen
pour les classes supérieures de la section scientifique des Athénées
et l'École militaire de Bruxelles

NAMUR
LIBRAIRIE WESMAEL-CHARLIER
RUE DE FER, 53

PARIS
LIBRAIRIE VICTOR RETAUX
RUE BONAPARTE, 82

Huy, chez l'auteur, Collège Saint-Quirin

1902

Tous droits réservés

PRÉFACE

L'accueil bienveillant fait à notre *Traité d'Arithmétique*, depuis sa première publication en 1881, nous engage à revoir avec de nouveaux soins chaque édition nouvelle.

Voici les principaux changements qui ont été apportés aux éditions de 1888, de 1897 et de 1902 (*) :

1[c] Outre la définition de la proposition *réciproque*, nous donnons celle de la proposition *contraire*, ainsi que les relations mutuelles de la proposition *principale*, de la proposition *réciproque*, de la proposition *contraire* et de la *réciproque de la contraire* (**5**) ;

2[b] Nous proposons, dans une note, une méthode nouvelle de *numération parlée*, pour la lecture des grands nombres (page **18**) ;

3[b] Nous indiquons, dans une autre note, une manière abrégée d'effectuer, *à l'aide du diviseur* **4**, les additions ayant une certaine longueur (page **23**) ;

4[b] La longueur d'une division provient souvent des essais à faire pour reconnaître si les chiffres posés au quotient ne sont pas trop forts. Nous donnons, dans une note, une règle qui peut servir à abréger ces essais (page **49**) ;

5[b] Nous donnons une règle, qui, sans doute, deviendra classique, pour la *formation du carré des nombres* (**86**) ;

6[b] Nous énonçons, dans trois notes, quelques règles particulières pour reconnaître, *à vue*, si un nombre entier peut être un carré (page **67**), ou un cube (page **78**), ou une puissance quatrième ou cinquième parfaite (page **79**) ;

(*) Les lettres *a*, *b*, *c* indiquent les changements propres respectivement aux éditions de 1888, de 1897 et de 1902.

Les modifications les plus importantes ou les plus intéressantes sont celles qui sont signalées sous les n[os] suivants : 2, 5, 11, 13, 17, 21, 25, 27, 28, 31, 34, 35, 43, 46, 49.

7° Un chapitre nouveau fait connaître divers procédés de *calcul apide* (**119**);

8° Un autre chapitre traite *du nombre et de la nature des opérations rithmétiques* (**120**);

9° Nous définissons le *caractère de divisibilité*, la condition *nécessaire* et *ffisante* pour qu'un nombre entier soit divisible par un diviseur donné (**138**). Faute d'avoir fait attention à cette définition, plusieurs auteurs ont onné une théorie incomplète des caractères de divisibilité;

10° Nous signalons, dans deux notes, divers caractères de divisibilité ar 4, 6, 8, 12, 15, 18, 45 (pages **95** et **99**);

11° Nous exposons les caractères de divisibilité par les diviseurs des ombres de la forme $10^n \pm p$ et $m10^n \pm 1$ (**154** à **161**);

12° Nous proposons, d'une manière plus générale, la démonstration du héorème relatif à la suite illimitée des nombres premiers (**173**); et nous joutons à la décomposition des neuf premiers nombres de la forme $.3.5.7... p + 1$, que nous avions déjà donnée en 1885, celle des neuf remiers nombres de la forme $2.3.5.7... p - 1$ (page **113**);

13° Il est d'usage de faire dépendre de la théorie du plus grand commun iviseur la démonstration de ce théorème fondamental, que *tout nombre remier, qui divise un produit de plusieurs facteurs, divise l'un au moins e ces facteurs* (**205**). Nous avons évité cet inconvénient, et nous avons ndu la théorie des nombres premiers indépendante de celle du plus rand commun diviseur, en introduisant ce théorème de GAUSS : *Si un ombre premier ne divise aucun des deux facteurs d'un produit, il ne ivise pas ce produit* (**176** et **177**). Grâce à ce théorème, il n'est plus écessaire de scinder en parties séparées la théorie des nombres remiers, celle du plus grand commun diviseur et celle du plus petit ommun multiple;

14° Nous démontrons ce théorème, qui n'est pas sans avoir une certaine tilité pratique : *on peut, dans la recherche du plus grand commun iviseur de plusieurs nombres, remplacer l'un de ces nombres par n excès sur l'un des autres nombres* (**187**, 3°);

15° Nous démontrons la règle suivante : *Pour trouver le plus grand*

commun diviseur de plusieurs nombres, on divise, par le plus pet de ces nombres, chacun des autres nombres; on opère de la mêm manière sur le plus petit nombre et les restes obtenus, et ainsi d suite, jusqu'à ce qu'on arrive à des nombres dont le plus petit divis chacun des autres : ce plus petit nombre est le plus grand commun diviseur cherché (**196**);

16[b] Nous démontrons ce théorème : *le produit de plusieurs nombre est égal à leur plus petit commun multiple multiplié par le plus grand commun diviseur de leurs produits* n — 1 *à* n — 1 (**217**);

17[c] Nous consacrons un nouveau chapitre à établir les *théorèmes* d FERMAT *et de* WILSON, lesquels toutefois sont plutôt du ressort d l'Arithmétique supérieure (**221, 222, 223**);

18[bc] Nous complétons la définition de la *fraction* par ce théorème : *to fraction est égale au quotient de la division de son numérateur par s dénominateur* (**226**, 6°); et nous démontrons, d'une manière plus abrégé les propositions relatives à la multiplication ou à la division d numérateur ou du dénominateur par un nombre entier (**226**, 3°, 4°, 5° enfin, nous apportons quelques modifications, utiles pour la pratique, a chapitre relatif à la réduction des fractions à un même dénominateur (**241**

19[c] Nous indiquons, dans une note, la règle à suivre pour extraire l racine m^e d'un nombre quelconque, à moins d'une fraction $\frac{a}{b}$ (page **180**

20[b] Nous avons entièrement refondu la théorie des *fractions déc males périodiques* (**321** à **342**). En particulier, nous démontrons le théorèmes suivants : 1° *deux fractions ordinaires égales donnent nais sance à la même fraction décimale* (**323**); 2° *deux fractions ordinair inégales ne peuvent donner naissance à la même fraction décimale* (**324** 3° *une fraction décimale périodique, dont la période est* 9, *admet un limite* (**332**), *mais n'a pas de génératrice* (**331**);

21[b] Nous avons aussi entièrement refondu le chapitre relatif au *nombres incommensurables* (**343** à **346**);

22[a] Nous démontrons le théorème fondamental de la théorie de logarithmes, à savoir, que *le logarithme d'un produit est égal à la somm des logarithmes de ses facteurs* (**416**);

23ª Dans un chapitre nouveau, nous expliquons l'usage de la *règle à calcul*, ou *règle logarithmique*, si commode pour obtenir rapidement le résultat approché d'une suite de multiplications ou divisions (**429** à **432**);

24ᶜ Nous ajoutons une note, tirée d'un passage peu connu de LAPLACE, relative aux avantages du système métrique (page **275**);

25ᵇᶜ Nous donnons, dans deux notes, les définitions du nouveau *mètre* et du nouveau *kilogramme*, adoptés par le *Comité international des Poids et Mesures*, le 29 septembre 1889, et nous faisons observer que le *mètre* et le *kilogramme* ne sont, à rigoureusement parler, que des *mesures de convention* (pages **276** et **281**); nous expliquons aussi pourquoi, dans la définition du *gramme*, on doit dire : *dans le vide*, mais non : *à Paris* et *au niveau de la mer* (page **274**); enfin, nous faisons connaître la différence qui existe entre la *tonne métrique* et le *tonneau de mer* (page **282**), entre le *stère* et le *mètre cube* (page **280**), entre le *litre* et le *décimètre cube* (page **280**);

26ᵇ A propos de la mesure du temps, nous exposons la théorie des *fuseaux horaires* (**456**);

27ᵇᶜ Après avoir donné une notion succincte des *calendriers julien* et *grégorien* (**457**), puis du *calendrier israélite* (**458**), nous reproduisons l'ingénieux *calendrier perpétuel*, dû à M. ÉD. LUCAS, qui sert à trouver le jour de la semaine qui correspond à une date donnée quelconque (**459**);

28ª Dans un chapitre important sur les monnaies, nous exposons la théorie de la monnaie, si controversée parmi les économistes; puis la question de l'étalon monétaire, que nous résolvons dans le sens de l'étalon d'or unique; enfin, nous faisons connaître les principales dispositions de la convention monétaire dite de l'*Union latine*, ainsi que les titres, poids et valeurs au pair des monnaies de compte des principaux pays (**466** à **471**);

29ᵇ Nous notons la différence qui existe entre le *carat* et le *denier*, unités de poids, et le *carat* et le *denier*, unités pour exprimer le titre des matières d'or et d'argent (page **299**);

30ᵇ Nous donnons la nomenclature des *anciennes dénominations des mesures métriques*, telles qu'elles ont été légalement en usage en Belgique, de 1820 à 1836 (**479**). La connaissance de ces dénominations est indispensable, par exemple, pour l'intelligence des documents relatifs au mesurage des terres, dressés durant cette époque;

31[b] Un chapitre nouveau traite la question de savoir *quel est le meilleur système de numération et de poids et mesures* et résout cette question dans le sens du *système octaval* plutôt que dans le sens du *système duodécimal* (**502**);

32[b] Nous traitons, dans trois chapitres spéciaux, de la *méthode de réduction au même coefficient* (**525** à **531**), des *solutions rétrogrades* (**539** à **542**) et de la *méthode de fausse position* (**543** à **548**);

33[b] Nous justifions, par une démonstration plus facilement applicable à l'universalité des cas, la *règle conjointe*, en la rattachant à la *méthode de réduction au même coefficient* (**533**);

34[c] Dans le chapitre sur les partages proportionnels, nous donnons plusieurs solutions du *problème du contingent* (**555**), et nous appliquons le *système* D'HONDT, adopté pour les élections belges, à un problème de *représentation proportionnelle* (**556**);

35[bc] Dans le chapitre sur les moyennes, nous traitons le cas où l'on n'accorde pas le même poids, la même autorité aux différents nombres dont on propose de trouver la *moyenne arithmétique* (**562**). De plus, nous définissons, dans une note, la *moyenne géométrique* et la *moyenne harmonique* (page **348**);

36[c] Nous rattachons au chapitre des mélanges des problèmes tels que ceux-ci : *Former la longueur du mètre avec* 30 *pièces d'argent, ayant un diamètre de* 21 *ou de* 19 *millimètres* (**570**); *Payer* 100[f] *avec* 100 *pièces de cinq francs, d'un franc et de cinq centimes* (**571**); enfin, nous donnons une méthode nouvelle, ou au moins peu connue, pour trouver les *solutions entières* des problèmes *indéterminés* de mélange, dans le cas où les quantités à mélanger ont une somme donnée (**572**);

37[c] Jusqu'au 1[er] janvier 1901, l'argent se cotait sur la base de 218[f]89[c] le kilogramme fin, avec tant pour mille de prime ou de perte (**603**); un problème fait connaître l'origine de ce nombre (**583**);

38[b] Nous expliquons aussi comment le rapport de l'or à l'argent, qui, dans le système monétaire de l'*Union latine*, est $15\frac{1}{2}$, équivaut, en mesures anglaises, à $60\frac{7}{8}$ deniers sterling d'or pour une once d'argent (**585**);

39[b] A propos des poids spécifiques, nous déduisons, du principe

d'ARCHIMÈDE, que *tout corps, pesé dans l'eau, y perd une partie de son poids, égale à l'inverse de sa densité* (**595**);

40[b] Le chapitre du tant pour cent ou pour mille est augmenté de deux articles, dont l'un concerne la *prime* ou la *perte* sur l'or (**603** et **604**) et l'autre les *centimes additionnels* (**609** et **610**);

41[c] Dans le même chapitre, nous ajoutons en note la proposition suivante, probablement nouvelle : *La différence entre l'inverse du bénéfice pour cent, calculé sur le prix d'achat, et l'inverse du bénéfice pour cent, calculé sur le prix de vente, est égale à* $\frac{1}{100}$ (page **363**);

42[b] Dans le chapitre relatif à l'escompte, nous faisons connaître la méthode THOYER pour le calcul rapide de la somme des escomptes d'un grand nombre de billets (**642**);

43[bc] Comparant les escomptes en dehors et en dedans, nous établissons ce théorème nouveau, que *la valeur nominale d'un billet est égale au produit de ses escomptes en dehors et en dedans, divisé par leur différence* (**653**), et cet autre encore, que *le temps dont on devance l'échéance est égal à la différence des inverses des taux par franc de l'escompte en dehors et de l'escompte en dedans, qui donnent le même escompte* (**654**);

44[c] Un chapitre nouveau fait connaître la manière d'établir, par la méthode hambourgeoise, les *comptes courants et d'intérêts*, le taux de l'intérêt étant ou non réciproque (**677** à **679**);

45[c] Différentes notes font connaître certains usages communément admis dans les Banques, relativement à l'intérêt et à l'escompte (pages **369, 380** et **381**);

46[b] On sépare aujourd'hui la notion d'*annuité* de celle de *capital*, et, dans le cas d'un capital à rembourser, on partage l'annuité en deux parties *fixes*, l'une destinée à payer l'intérêt annuel du capital emprunté, et l'autre à reconstituer, avec les intérêts accumulés, ce même capital. Nous avons rédigé à nouveau, d'après ces idées, le chapitre des *annuités* (**680** à **664**);

47[b] C'est une erreur grossière, mais assez commune, de calculer l'accroissement moyen annuel de la population en divisant l'augmentation totale

de plusieurs années par le nombre d'années. Il n'était donc pas inutile d'indiquer, dans un chapitre spécial, la manière de traiter les *problèmes sur la population* (**685** et **686**);

48° Dans un chapitre nouveau, nous donnons le moyen de résoudre, par l'Arithmétique, un certain nombre de *problèmes du second degré*, savoir, ceux qui se ramènent à *trouver deux nombres, connaissant leur produit, ainsi que leur somme ou leur différence, ou la somme ou la différence de leurs inverses* (**687** à **691**);

49° Il existe un nombre infini de propriétés des nombres, et un *Traité* classique *d'Arithmétique* ne peut faire connaître que les plus utiles et les plus élémentaires. On en propose souvent d'autres comme exercices, sous le nom de *questions d'Arithmologie*. C'est pourquoi nous présentons, dans un chapitre particulier, un choix très varié de ces questions, soit comme complément à tout notre ouvrage, soit afin de donner au lecteur un aperçu des divers procédés de démonstration qui peuvent être employés (**692** à **710**);

50° Il serait trop long de mentionner d'autres problèmes, ajoutés à divers chapitres de cet ouvrage. Nous n'indiquerons que le suivant, dont la solution arithmétique nous a été souvent demandée : **42** *bœufs ont brouté en* 30 *jours l'herbe d'un pré de* 45 *ares*, 74 *bœufs ont brouté en* 20 *jours l'herbe d'un pré de* 60 *ares. Combien pourra-t-on mettre de bœufs pendant* 21 *jours dans un pré de* 84 *ares* (**717**)?

Nous ne doutons pas que l'on nous saura gré de ces améliorations successives apportées à notre œuvre, et nous avons la confiance que notre *Traité d'Arithmétique* continuera d'être favorablement accueilli des maîtres et des élèves.

CHAPITRE XXII

QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE

692. L'*Arithmologie* est la *science des nombres*, et ainsi elle est la même chose que l'*Arithmétique théorique*. Mais on la restreint aux propositions sur les nombres et à leurs applications qu'il n'est pas d'usage de donner dans les *Traités* classiques *d'Arithmétique* (*).

693. Problème **148.** *Quel est le nombre de chiffres nécessaire pour écrire tous les nombres de* 1 *à* 99999? *Si l'on écrit la suite naturelle des nombres sans séparer les différents chiffres, quel sera le millionième chiffre de cette suite, et à quel nombre appartiendra-t-il?*

1° La suite des nombres de 1 à 99999 se compose de 9 nombres d'un chiffre, de 90 nombres de deux chiffres, de 900 nombres de trois chiffres, de 9000 nombres de quatre chiffres, de 90000 nombres de cinq chiffres. Il faut donc, pour écrire tous les nombres de 1 à 99999, un nombre de chiffres égal à $9 + 2.90 + 3.900 + 4.9000 + 5.90000 = \mathbf{488889}$.

2° Le nombre de chiffres nécessaire pour écrire tous les nombres de 1, 2, 3, 4, 5 chiffres est 488889. Pour avoir un million de chiffres, il faut donc encore en écrire 511111. Or, si l'on divise 511111 par 6, le quotient est 185185 et le reste 1. Il faut donc écrire, à partir du nombre 100000, 185185 nombres de six chiffres, plus encore le premier chiffre du nombre suivant. Il résulte de là que le millionième chiffre cherché est le premier chiffre 1 du nombre **185185**.

694. Théorème **149.** *La différence entre un nombre de trois chiffres et ce nombre renversé est égale à* 99 *fois la différence des chiffres extrêmes; elle a* 9 *pour chiffre du milieu et* 9 *pour somme des chiffres extrêmes.*

(*) On ne peut exposer convenablement un grand nombre de questions d'Arithmologie sans recourir à l'emploi des notations ou même des opérations algébriques.

1° Soient c le chiffre des centaines, d le chiffre des dizaines et u le chiffre des unités d'un nombre quelconque de trois chiffres. Ce nombre est égal à $100c + 10d + u$, et le nombre renversé est égal à $100u + 10d + c$. On a donc, en supposant c plus grand que u,

$$(100c + 10d + u) - (100u + 10d + c) = 99(c - u).$$

2° Si du nombre donné on soustrait (**32**) le nombre renversé, le chiffre des unités du reste sera $(10 + u) - c$; le chiffre des dizaines sera $(10 + d) - (d + 1)$ ou 9; enfin, le chiffre des centaines sera $c - (u + 1)$. Ainsi, dans le reste, le chiffre du milieu sera **9**, et la somme des chiffres extrêmes sera $(10 + u) - c + c - (u + 1) = 9$.

695. Problème **150.** *Former, avec les dix chiffres* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *employés chacun une seule fois, des nombres dont la somme soit* 100. *Le problème est-il possible en nombres entiers?*

Le problème est impossible en nombres entiers ou décimaux. Car la somme des dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 est égale à 45, nombre divisible par 9 : donc la somme de nombres quelconques, entiers ou décimaux, formés avec ces dix chiffres, pris chacun une seule fois, est aussi divisible par 9; par suite, cette somme ne peut être égale à 100. Il ne peut donc y avoir de solutions qu'en nombres fractionnaires, ou en nombres les uns entiers et les autres fractionnaires.

Ces solutions ne peuvent être trouvées que *par tâtonnements*. Il en existe un grand nombre, dont nous citerons seulement les suivantes :

$$9 + 8 + 7 + 60 + 5 + 4 + \frac{21}{3} = 100,$$

$$1 + 4 + 5 + 7 + 80 + \frac{96}{32} = 100,$$

$$9 + 23 + 67 + \frac{4}{8} + \frac{5}{10} = 100,$$

$$47 + \frac{6}{3} + \frac{10}{5} + \frac{98}{2} = 100,$$

$$1 + 90 + \frac{7524}{836} = 100.$$

696. Problème **151.** *Trouver un nombre qui, divisé par* 7, 8, 9, 10, **12**, 14, 15, *donne toujours pour reste* 1.

Si l'on *diminuait* le nombre cherché de 1, il serait divisible par 7, 8, 9, **10**, 12, 14, 15 : il serait donc un commun multiple de ces nombres, ou (**213**) un multiple de leur plus petit commun multiple **2520**. Par suite, le nombre cherché est un multiple de **2520**, plus 1, c'est-à-dire l'un des nombres **2521**, **5041**, **7561**, **10081**, **12601**, etc.

697. Problème **152.** *Trouver un nombre qui, divisé par* 7, 8, 9, 10, **12**, 14, 15, *donne respectivement pour restes* 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9.

Si l'on *augmentait* le nombre cherché de 6, il serait exactement divisible par 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15 : il serait donc un commun multiple de ces nombres, ou (**213**) un multiple de leur plus petit commun multiple **2520**. Par suite, le nombre cherché est un multiple de **2520**, moins 6, c'est-à-dire l'un des nombres **2514**, **5034**, **7554**, **10074**, **12594**, etc.

***698.** Problème **153.** *On pense un nombre, moindre que* 1000; *on le divise par* 42, *par* 48, *par* 56 *et par* 63, *et on multiplie les restes respectivement par* 96, *par* 21, *par* 90 *et par* 800; *enfin, on fait la somme des quatre produits. Connaissant cette somme, trouver le nombre pensé.*

Soient S la somme donnée et N le nombre pensé. Appelons A, B, C, D les quotients et a, b, c, d les restes de la division de N par **42**, **48**, **56** et **63**. On aura

$$a = \mathrm{N} - 42\mathrm{A}, \quad b = \mathrm{N} - 48\mathrm{B}, \quad c = \mathrm{N} - 56\mathrm{C}, \quad d = \mathrm{N} - 63\mathrm{D}.$$

Multipliant ces égalités respectivement par 96, 21, 90 et 800, et ajoutant, on a

$$96a + 21b + 90c + 800d = 1007\,\mathrm{N} - 4032\,\mathrm{A} - 1008\,\mathrm{B} - 5040\,\mathrm{C} - 50400\,\mathrm{D},$$

ou

$$\mathrm{S} = \mathfrak{M}.1008 - \mathrm{N}.$$

Donc N, *supposé moindre que* 1008, est le *reste négatif* (**66**) de la division de S par 1008. On trouvera donc N en divisant S par 1008, et en prenant le complément du reste à 1008. Ou bien on ajoutera 1008 à S, et on divisera la somme par 1008 : le reste de la division sera le nombre pensé.

Si, par exemple, la somme donnée est 23 415, on ajoute 1008 à 23 415, et on divise la somme 24 423 par 1008 : le reste 777 de la division est le nombre pensé.

*699. Théorème 154. *Parmi* n *nombres consécutifs, il y en a un qui est divisible par* n.

Soient les n nombres consécutifs $m, m+1, m+2, m+3, \ldots m+n-1$.

Si m est divisible par n, le théorème est évident.

Si m n'est pas divisible par n, divisons m par n, et soit r le reste, moindre que le diviseur n. Le nombre $m - r$ sera divisible par n, et, par suite, aussi le nombre $(m - r) + n$, ou $m + (n - r)$. Or celui-ci est l'un des n nombres donnés, puisque $n - r$ est moindre que n. Donc, parmi n nombres consécutifs, il y en a un qui est divisible par n.

700. Théorème 155. *Tout nombre premier, autre que* 2 et 3, *est un multiple de* 6, *augmenté ou diminué de* 1. *La réciproque n'est pas vraie.*

Si l'on divise un nombre entier par 6, le reste de la division est 0, 1, 2, 3, 4 ou 5. Par rapport au diviseur 6, un nombre entier est donc de l'une des formes $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$ ou $6m+5$, $6m$ désignant un multiple de 6. Mais, si l'on excepte 2 et 3, les formes $6m$, $6m+2$, $6m+3$ et $6m+4$ ne renferment que des nombres composés, ou des nombres divisibles respectivement par 6, 2, 3 et 2. Un nombre premier ne peut donc être que de l'une des formes $6m+1$ et $6m+5$, ou, si l'on veut, $6m+1$ et $6m-1$, ce qui démontre le théorème.

La réciproque n'est pas vraie. Ainsi les nombres 25 ou 24 + 1, 35 ou 36 — 1, 49 ou 48 + 1, 55 ou 54 + 1, 65 ou 66 — 1, etc., ne sont pas premiers.

*701. Théorème 156. *De deux nombres quelconques, le plus grand est égal à leur demi-somme plus leur demi-différence, et le plus petit est égal à leur demi-somme moins leur demi-différence.*

On a, en effet, a et b étant deux nombres quelconques, et a le plus grand,

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a, \qquad \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b.$$

702. Problème 157. *Quel même nombre faut-il ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{5}{17}$ pour que la nouvelle fraction soit égale à $\frac{2}{7}$?*

La différence entre les deux termes de la fraction $\frac{5}{17}$ est 17 — 5 ou 12.

Si l'on ajoute un même nombre aux deux termes de cette fraction, la différence entre les deux termes de la nouvelle fraction, *non simplifiée*, sera encore 12 (**28**, 4°).

Mais, *après simplification*, cette différence est 7 — 3 ou 4.

Pour la rendre égale à 12, il faut donc multiplier les deux termes de la fraction $\frac{3}{7}$ par 12 : 4 ou par 3, ce qui donne $\frac{9}{21}$.

Ainsi la nouvelle fraction, non simplifiée, est $\frac{9}{21}$: donc le nombre que l'on doit ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{5}{17}$ est 9 — 5 ou 21 — 17 ou **4**.

703. Problème **158.** *Lorsqu'on soustrait un même nombre des deux termes d'une fraction plus grande que l'unité, cette fraction augmente* (**232**). *Qu'y a-t-il à dire si le nombre que l'on soustrait est égal au dénominateur de la fraction donnée?*

Soit la fraction $\frac{13}{8}$. Si, des deux termes de cette fraction, on soustrait le dénominateur 8, on obtient $\frac{5}{0}$, *symbole qui n'offre pas de sens par lui-même.*

Pour l'interpréter, supposons qu'au lieu de soustraire 8 des deux termes de la fraction $\frac{13}{8}$, on soustraie successivement les nombres

7·9, 7·99, 7·999, 7·9999, 7·99 999, etc.,

qui ont pour limite 8 (**332**) ; on obtiendra respectivement

51, 501, 5001, 50 001, 500 001, etc.

Ainsi, quand on soustrait des deux termes de la fraction $\frac{13}{8}$ des nombres de plus en plus rapprochés du dénominateur 8, la fraction prend des valeurs de plus en plus grandes, et *qui peuvent dépasser tout nombre donné, quelque grand qu'il soit.* C'est ce que l'on exprime en disant que la fraction *tend vers l'infini*, ou que $\frac{5}{0}$, forme qu'elle prend à la limite, est le *symbole de l'infini.*

704. Problème **159.** *Trouver les dénominateurs des fractions ordinaires irréductibles donnant naissance à des fractions décimales périodiques simples, dont la période ait trois chiffres.*

Puisque la fraction périodique est simple et que la période a trois chiffres, la génératrice est une fraction dont le dénominateur est 999 (**333**) Après réduction de cette fraction à sa plus simple expression, le nouveau dénominateur est un diviseur de 999. Or les diviseurs de 999 sont **1, 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999.** Tels sont donc les dénominateurs demandés.

Toutefois, on ne peut admettre les dénominateurs 1, 3, 9, diviseurs de 9, qu'à la condition de prendre trois périodes pour une seule.

705. THÉORÈME **160.** *La somme de deux nombres inverses l'un de l'autre est supérieure à* **2** (**266**).

Considérons la somme $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, et supposons a plus grand que b. On a

$$\frac{a}{b}=1+\frac{a-b}{b}, \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{a}=1-\frac{a-b}{a},$$

d'où

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2+\frac{a-b}{b}-\frac{a-b}{a}.$$

Or, puisqu'on suppose a plus grand que b, la fraction $\frac{a-b}{b}$ est plus grande que $\frac{a-b}{a}$. Donc a somme $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ surpasse 2 d'une certaine quantité, savoir, d'une quantité égale à l'excès de $\frac{a-b}{b}$ sur $\frac{a-b}{a}$.

706. THÉORÈME **161.** *Pour faire le carré d'un nombre terminé par* 5, du nombre 395, par exemple, *on multiplie le nombre* 39 *de ses dizaines par le nombre suivant* 40, *et on écrit* 25 *à la droite du produit.*

Soient d le nombre des dizaines et 5 le chiffre des unités du nombre N. On a

$$N=10\,d+5,$$

et, par suite,

$$N^2=100\,d^2+100\,d+25, \qquad \text{ou} \qquad N^2=100\,d\,(d+1)+25.$$

Ainsi le carré du nombre N égale 25, plus un nombre de centaines égal à $d\,(d+1)$, c'est-à-dire au nombre des dizaines d multiplié par le nombre suivant $d+1$.

Il est facile, d'après cette règle, d'écrire, *à vue*, les carrés des nombres **15**, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105,... 195, 205,... 295, 305... Il suffit, en effet, d'écrire 25 à la droite respectivement des produits **1.2**, 2.3, 3.4, 4.5, 5.6, 6.7, 7.8, 8.9, 9.10, 10.11,... 19.20, 20.21,... **29**.30, 30.31,... ce qui donne 225, 625, 1225, 2025, 3025, 4225, 5625, **7225**, 9025, 11025,... 38025, 42025,... 87025, 93025...

On peut aussi observer que le nombre des centaines du carré étant $d\ (d+1)$, le chiffre des centaines de ce carré est 0, 2 ou 6.

707. Problème **162.** *Quelle est la plus grande puissance du nombre premier* 7 *qui divise le produit des* 1000 *premiers nombres?*

Il faut chercher le nombre des facteurs 7 qui entrent dans le produit des 1000 premiers nombres.

Or, dans la suite des 1000 premiers nombres, il y en a 1000 : 7 ou **142** qui renferment le facteur 7 au moins une fois. Ce sont les nombres 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, etc. Dans ces 142 nombres, il y en a **142** : 7 ou 20 qui renferment le facteur 7 au moins deux fois. Ce sont les nombres 49, 98, 147, etc. Enfin, dans ces 20 nombres, il y en a **20** : 7 ou 2 qui renferment le facteur 7 trois fois.

Le nombre des facteurs 7 qui entrent dans le produit des 1000 premiers nombres est donc $142 + 20 + 2 = \mathbf{164}$.

Par suite, la plus grande puissance de 7, qui divise le produit des 1000 premiers nombres, est 7^{164}.

708. Problème **163.** *Quelle est la plus grande puissance de* 12 *qui divise le produit des* 1000 *premiers nombres?*

On a : $12 = 2^2 \times 3$. Or le nombre des facteurs 2, qui entrent dans le produit des 1000 premiers nombres, est (**707**) $500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 = 994$, et le nombre des facteurs 3 est $333 + 111 + 37 + 12 + 4 + 1 = 498$. Le produit des 1000 premiers nombres est donc divisible par $2^{994}.3^{498} = 4^{497}.3^{498} = 4^{497}.3^{497}.3 = 12^{497}.3$. Par suite, la plus haute puissance de 12, qui divise le produit des 1000 premiers nombres, est 12^{497}.

709. THÉORÈME **164.** *La différence des quatrièmes puissances de deux nombres, non divisibles par* 5, *est divisible par* 5.

Soit a un nombre quelconque, non divisible par 5 : a sera de la forme $5m + 1$, $5m + 2$, $5m + 3$ ou $5m + 4$; son carré a^2 sera de la forme $5n + 1$ ou $5n + 4$; enfin, sa quatrième puissance a^4 sera de la forme $5p + 1$.

Soit b un autre nombre non divisible par 5 : b^4 sera pareillement de la forme $5q + 1$.

Par conséquent, la différence $a^4 - b^4$ est divisible par 5.

Autrement :

Le chiffre des unités d'un nombre non divisible par 5 est 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 ou 9; le chiffre des unités de son carré est 1, 4, 6 ou 9; enfin, le chiffre des unités de sa quatrième puissance est 1 ou 6. Les quatrièmes puissances de deux nombres, non divisibles par 5, sont donc terminées par 1 ou par 6. Par conséquent, leur différence est terminée par 0 ou par 5, et, par suite, elle est divisible par 5.

710. THÉORÈME **165.** n *étant un nombre entier, démontrer que* $n^7 - n$ *est divisible par* 120.

On a : $120 = 2^3 . 3 . 5$. Il suffit donc de démontrer que $n^7 - n^3$ ou $n^3(n^4 - 1)$ est divisible séparément par 2^3 ou 8, par 3 et par 5.

1° Si n est pair, n^3 est divisible par 2^3 ou 8. Si n est impair et de la forme $2x + 1$, n^2 est de la forme $8y + 1$ et n^4 de la forme $16z + 1$; par suite, $n^4 - 1$ est divisible par 16. Donc $n^3(n^4 - 1)$ est, dans tous les cas, divisible par 2^3 ou 8.

2° Si n est divisible par 3, n^3 est divisible par 3^3 ou 27. Si n est de la forme $3x \pm 1$, n^4 est de la forme $3y + 1$, et, par suite, $n^4 - 1$ est divisible par 3. Donc $n^3(n^4 - 1)$ est, dans tous les cas, divisible par 3.

3° Si n est divisible par 5, n^3 est divisible par 5^3 ou 125. Si n est premier avec 5, $n^4 - 1$ est divisible par 5; car *la différence des quatrièmes puissances de deux nombres, non divisibles par* 5, *est divisible par* 5 (**709**). Donc le nombre $n^3(n^4 - 1)$ est, dans tous les cas, divisible par 5.

Puisque le nombre $n^3(n^4 - 1)$ est divisible séparément par les nombres 2^3, 3 et 5, qui sont premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit $2^3 . 3 . 5$ ou 120 (**208**).

MATHESIS

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ETRANGERS.

Ut pictura mathesis
Ph. Breton

TROISIÈME SÉRIE.

TOME III. — ANNÉE 1903.

(TOME XXIII DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
23, RUE DU CALVAIRE, 23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1903

ABRÉVIATIONS.

BB., Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

CR., Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales Mathématiques (depuis 1842).

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

JME., (ou JMS.), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS de 1881 à 1897, ensuite par G. MARIAUD de 1897 à 1901.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE.

AF., Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER etc. (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

MATHESIS

UNE LEÇON SUR LES CUBIQUES GAUCHES,(*)

par M. Stuyvaert (Gand).

Nous allons passer en revue quelques unes des propriétés principales des cubiques gauches. Comme prémisses indispensables à l'intelligence de ce qui va suivre, nous ne devrons guère exiger que la connaissance des coordonnées homogènes, ponctuelles et tangentielles, et des généralités relatives aux courbes gauches, comme les définitions de la tangente, du plan osculateur, etc.

Une des méthodes utilisées pour l'étude des courbes gauches consiste à les envisager comme des intersections de surfaces.

Or, d'après le théorème de Bezout, deux surfaces algébriques, d'ordres m et n, se coupent suivant une courbe d'ordre mn ou suivant un système de lignes dont l'ordre total est mn.

Si $mn = 3$, on a $m = 1$ ou $n = 1$, et l'une des surfaces est un plan. Ainsi, les seules cubiques qui peuvent être l'intersection totale de deux surfaces sont des courbes planes.

Par suite, s'il existe des cubiques gauches, elles seront des intersections partielles de surfaces.

Le problème se pose alors de la manière suivante.

Deux surfaces algébriques, d'ordres m et n, ayant en commun un système de droites, de coniques ou d'autres courbes connues, dont l'ordre total est $mn - 3$, peuvent-elles avoir encore en commun une courbe gauche, du troisième ordre, non décomposable?

Nous verrons que la réponse à cette question est affirmative; que, de plus, la solution du problème est unique, c'est-à-dire que les diverses courbes que l'on peut obtenir ainsi, ne sont pas génériquement distinctes.

Par définition, ces courbes sont les cubiques gauches.

Prenons d'abord un cas particulier, celui de deux quadriques ayant une droite commune.

Spécialisons encore davantage : imaginons deux cônes du second ordre

---

(*) Leçon publique faite le 10 juillet 1902 pour l'obtention du grade de docteur spécial de l'Université de Gand.

ayant une génératrice commune; donc le sommet de chacun de ces cônes est situé sur l'autre.

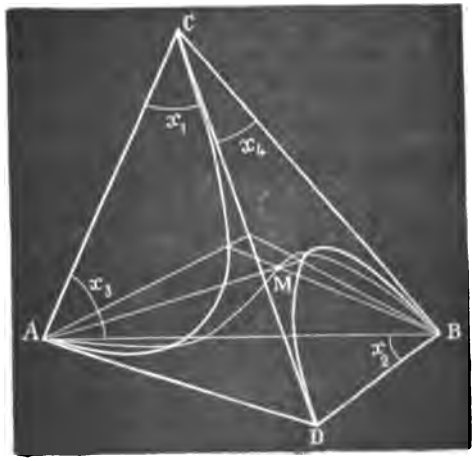
A nous restreindre ainsi, nous trouvons un double avantage.

D'abord, nous aurons à écrire des équations très simples.

Ensuite, moyennant une petite précaution, la courbe qui complètera l'intersection des deux cônes ne pourra se décomposer, ni en une droite et une conique, ni en trois droites. Car, si l'un de ces cas se présentait, les deux cônes auraient deux droites communes; celles-ci devraient coïncider avec la droite qui joint les sommets; les cônes devraient donc se toucher le long de la génératrice commune. Or, cette circonstance, nous pouvons l'exclure par hypothèse.

Le plus ou moins de simplicité des relations à écrire dépendra essentiellement du choix des coordonnées.

Rapportons la figure à un tétraèdre de référence $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$.



La génératrice commune des deux cônes est l'arête AB($x_2 = x_3 = 0$) du tétraèdre.

Le point A($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) est le sommet du premier cône; le point B($x_2 = x_3 = x_4 = 0$) est le sommet du second cône.

La face x_2 du tétraèdre est tangente au cône (B), mais non au cône (A), qu'elle coupe suivant AB et suivant une autre génératrice AD; le plan tangent au cône (A) le long de AD est choisi pour face x_1 du tétraèdre.

La face x_3, tangente au cône (A), coupe le cône (B) suivant BA et BC; le plan tangent à (B) le long de BC est choisi pour face x_4.

Le plan x_4 coupe le cône (A) suivant une conique passant par B et par D et y touchant BC et DC; son équation est

$$x_1 x_3 - p x_2^2 = 0,$$

et l'équation du cône (A) est de la même forme.

Le plan x_1 coupe le cône (B) suivant une conique passant par A et C, y touchant AD et CD. Le cône (B) a donc pour équation

$$x_2x_4 - qx_3^2 = 0.$$

Pour simplifier, supposons que les deux cônes passent par le point M dont les coordonnées sont égales. Alors, $p = q = 1$, et les équations simultanées

$$x_1x_3 = x_2^2$$
$$x_2x_4 = x_3^2$$

représentent la droite AB et la cubique gauche.

La simplification introduite ici ne nuit pas à la généralité. On sait, en effet, que l'on peut toujours disposer des facteurs arbitraires affectant les coordonnées homogènes, de manière à rendre égales les coordonnées d'un point pris à volonté.

Les équations précédentes donnent, en divisant par x_2x_3

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4}.$$

Sous cette forme, elles ne représentent plus que la cubique gauche. Car, pour un point de AB, les termes du rapport médian sont nuls, et ce rapport médian est égal aux deux extrêmes, mais ces rapports extrêmes, ne sont pas, en général, égaux entre eux.

Posons chacun des rapports précédents égal à ω :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = \omega. \tag{1}$$

On en déduit facilement

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1. \tag{2}$$

En vertu de ces relations, toute valeur de ω donne un point de la cubique.

Réciproquement, les coordonnées d'un point de la courbe satisfont aux relations (1) et l'on en déduit une valeur de ω.

La valeur de ω qui répond à un point de la courbe s'appelle le *paramètre* de ce point.

Dans l'équation d'un plan u,

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

remplaçons les x par leurs valeurs tirées de (2) :

$$u_1 \omega^3 + u_2 \omega^2 + u_3 \omega + u_4 = 0.$$

Les racines de cette équation sont les paramètres des points de rencontre du plan u avec la courbe représentée par les équations (2) ou (1). Cette courbe est donc du troisième ordre. Les trois intersections peuvent être trois points réels, ou un réel et deux imaginaires conjugués, ou un réel et deux coïncidents, ou trois coïncidents.

En particulier, le point $A(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ répond au paramètre $\omega = 0$, le point $B(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$ au paramètre $\omega = \infty$.

Tout plan par AD,

$$x_4 + m x_2 = 0$$

donne

$$\omega^3 + m\omega^2 = 0;$$

et cette équation a toujours deux racines nulles : deux des intersections coïncident toujours avec A, et AD est une tangente en A à la cubique. De même BC est la tangente en B.

Le plan $x_1 = 0$ donne l'équation $\omega^3 = 0$, à trois racines nulles. Ce plan rencontre la courbe en trois points coïncidents : donc ACD est le plan osculateur, en A, à la cubique. De même BCD est le plan osculateur en B.

Ainsi, d'après ce que nous venons de voir, un point qui parcourt la cubique gauche entraîne la variation continue et complète d'un paramètre ω, depuis $-\infty$ jusque $+\infty$; absolument comme un point parcourant une droite.

En général, on appelle courbe gauche *unicursale* ou *rationnelle* une courbe telle que les coordonnées d'un point variable sont proportionnelles à des fonctions entières et rationnelles d'un paramètre.

De cette définition découle un fait important : toute la théorie des formes binaires, c'est-à-dire des équations à une inconnue, donc aussi la théorie des involutions s'interprète géométriquement par des propriétés des courbes unicursales et notamment des cubiques gauches, à condition que l'on établisse que toute cubique gauche est rationnelle.

Le moment est donc venu de montrer que la courbe

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4}$$

n'est pas, malgré les apparences contraires, un cas spécial, mais bien la courbe gauche du troisième ordre la plus générale.

On peut présenter cette démonstration, par exemple de la manière suivante.

Imaginons une ligne courbe, non décomposable en lignes du premier et du second ordre, représentable par deux équations algébriques, et coupée, par tout plan, en trois points.

Prenons, sur cette courbe, un point arbitraire S et joignons-le aux autres points de la courbe. Nous formons un cône de sommet S; tout plan, mené par ce sommet, rencontre encore la courbe en deux points M et N et coupe donc le cône suivant deux génératrices SM et SN.

Ceci montre déjà que *le cône qui projette la courbe d'un de ses points est du second ordre.*

Considérons ensuite un autre point T sur la courbe, et le cône de sommet T perspectif à la courbe. Les deux cônes de sommets S et T ont en commun la droite ST et la cubique considérée.

Ce raisonnement prouve d'abord que toute cubique gauche est l'intersection partielle de deux cônes du second ordre.

Il établit aussi que deux points quelconques S et T de la courbe, peuvent être amenés, par un simple changement de coordonnées, à jouer le rôle des sommets A et B du tétraèdre de référence.

Ainsi, il n'y a qu'une seule cubique gauche. Entendons par là que deux courbes pareilles, proprement dites, peuvent se ramener l'une à l'autre par transformation des coordonnées, donc par collinéation.

A la vérité, il y a bien une classification des cubiques, classification fondée sur leurs rapports avec le plan de l'infini. Mais les formes que l'on distingue ainsi sont de simples variétés, analogues aux variétés des coniques, et cette classification est sans influence sur les faits généraux, les faits projectifs, les seuls dont il nous soit possible de parler ici.

Occupons-nous à présent des cordes ou *bisécantes* de la cubique gauche.

L'équation

$$\varepsilon \equiv \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0,$$

où λ, μ, ν sont trois coefficients arbitraires, représente un plan mené par A.

Les paramètres de ses points d'intersection avec la courbe sont les racines de l'équation

$$\lambda\omega^3 + \mu\omega^2 + \nu\omega = 0;$$

l'une de ces racines est nulle ; les deux autres vérifient l'équation

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu = 0. \tag{3}$$

Le plan

$$\varphi \equiv \lambda x_2 + \mu x_3 + \nu x_4 = 0$$

passe par B ($\omega = \infty$) et les paramètres de ses autres intersections avec la courbe sont racines de l'équation (3).

Les plans ε et φ passent donc toujours par les deux mêmes points de la courbe, et leur intersection est une bisécante réelle, une bisécante idéale, ou une tangente, suivant que les racines de l'équation (3) sont réelles et inégales, imaginaires conjuguées, ou égales.

Réciproquement, soient ω_1 et ω_2 les paramètres, réels, imaginaires ou égaux, de deux points de la courbe ; on peut toujours former une équation du second degré en ω, ayant pour racines ω_1 et ω_2. Soit $\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu = 0$ cette équation ; dès lors, les plans

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0$$
$$\lambda x_2 + \mu x_3 + \nu x_4 = 0$$

se coupent suivant la bisécante qui joint les points ω_1 et ω_2.

Ainsi les équations $\varepsilon = 0$ et $\varphi = 0$ représentent toutes les bisécantes et toutes les tangentes. Elles contiennent trois paramètres homogènes λ, μ, ν ; si x_1, x_2, x_3, x_4 sont donnés, on peut résoudre les équations par rapport à λ, μ, ν, sauf dans un seul cas, celui où les coefficients de λ, μ, ν sont proportionnels, c'est-à-dire où le point x est sur la cubique.

Donc, *par tout point non situé sur la courbe, on peut mener une bisécante réelle ou idéale ou une tangente* (Hesse).

Les bisécantes de la cubique forment un système doublement infini, ou une *congruence* de droites. Par tout point, il passe un rayon de ce système. Et tout plan en contient trois rayons, puisque tout plan coupe la cubique en trois points qu'on peut réunir deux à deux par trois cordes.

Pour que les équations $\varepsilon = 0$ et $\varphi = 0$ représentent une tangente, il faut et il suffit que l'équation

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu = 0$$

ait des racines égales, c'est-à-dire que l'on ait

$$\mu^2 = 4\lambda\nu.$$

Mais, des équations $\varepsilon = 0$ et $\varphi = 0$, on tire

$$\lambda : \mu : \nu = (x_2x_4 - x_3^2) : (x_2x_3 - x_1x_4) : (x_1x_3 - x_2^2),$$

et, en substituant dans la relation précédente, on obtient

$$(x_2x_3 - x_1x_4)^2 = 4(x_2x_4 - x_3^2)(x_1x_3 - x_2^2).$$

Cette équation est vérifiée par un point quelconque d'une tangente quelconque. Par conséquent, elle représente une surface du quatrième ordre engendrée par les tangentes à la courbe.

Cette surface, comme on sait, est aussi l'enveloppe des plans osculateurs et s'appelle la *développable osculatrice*.

On voit donc que la développable osculatrice est du quatrième ordre; par suite, toute droite rencontre, en général, quatre tangentes de la cubique, ce que l'on exprime encore en disant : la cubique gauche est de *quatrième rang*.

Les équations $\varepsilon = 0$ et $\varphi = 0$ d'une bisécante, en y regardant λ, μ, ν comme des paramètres variables, représentent deux plans homologues de deux gerbes collinéaires ayant pour centres A et B, c'est-à-dire deux points quelconques de la courbe.

Donc, *le système des bisécantes d'une cubique gauche est engendré par les intersections des plans homologues de deux gerbes collinéaires ayant leurs sommets en deux points quelconques de la courbe.*

Si deux rayons homologues de ces gerbes se rencontrent en un point M, il passe, par ce point, une infinité de bisécantes, donc M est sur la cubique, et réciproquement.

Donc, *la cubique gauche est le lieu des intersections des rayons homologues de deux gerbes collinéaires ayant leurs sommets en deux points quelconques de la courbe.*

On remarquera l'analogie de ce théorème avec un mode de génération des coniques.

Nous nous occuperons à présent du plan osculateur.

Il est bien facile d'écrire une équation cubique en ω, à trois racines égales :

$$(\omega - \omega_1)^3 \equiv \omega^3 - 3\omega_1\omega^2 + 3\omega_1^2\omega - \omega_1^3 = 0.$$

Par suite le plan

$$x_1 - 3\omega_1 x_2 + 3\omega_1^2 x_3 - \omega_1^3 x_4 = 0$$

rencontre la courbe en trois points coïncidents et de paramètre ω_1. C'est donc le plan osculateur à la courbe, au point de paramètre ω_1.

Conséquemment, si x est fixe et ω_1 inconnu, les racines de l'équation précédente sont les paramètres des points d'osculation des plans osculateurs passant par x.

Donc, *d'un point x hors de la courbe, on peut mener trois plans osculateurs.*

Ou, la développable osculatrice est de troisième classe; ce que l'on exprime encore en disant que la *cubique gauche est de troisième classe.*

Voici une autre conséquence : si X est le point de paramètre ω, et si les x sont les coordonnées courantes, l'équation du plan osculateur en X est donc

$$x_1X_4 - 3x_2X_3 + 3x_3X_2 - x_4X_1 = 0.$$

Si x est fixe et X variable, c'est l'équation d'un plan passant par les contacts des trois plans osculateurs menés de x.

Or, cette équation est vérifiée identiquement pour $x = X$.

Donc, *les plans osculateurs en trois points de la cubique gauche se coupent dans le plan de ces trois points* (CHASLES).

L'équation

$$(f) \qquad x_1X_4 - 3x_2X_3 + 3x_3X_2 - x_4X_1 = 0,$$

où les X sont variables, représente un plan qui dépend d'un point x. Appelons ce plan le *plan focal* de x.

A cause de la symétrie, pour x variable, l'équation (f) représente le plan focal de X.

Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées tangentielles du plan focal de x. On aura

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = -x_4 : 3x_3 : -3x_2 : x_1.$$

Ces relations étant linéaires, le point x et son plan focal se correspondent dans deux *espaces réciproques.*

Mais l'équation (f) étant vérifiée identiquement par $x = X$, tous les points du premier espace sont *incidents* ou situés dans leur plan focal. Nous avons donc affaire ici à la réciprocité toute spéciale, connue sous le nom de *système focal.*

L'équation (f) est celle du plan osculateur, quand x est sur la courbe. Sinon, c'est celle du plan contenant les contacts des trois plans osculateurs qu'on peut mener de x.

Ainsi, dans le système focal, chaque point de la cubique répond à son plan osculateur; la courbe a pour transformée sa développable osculatrice, ce qu'on énonce parfois en disant :

La cubique gauche détermine un système focal dont elle est une courbe double.

Le principe de dualité reçoit ici son application la plus complète. On ne peut guère se figurer, en effet, un lien plus étroit entre deux figures réciproques que celui qui existe entre la cubique et sa développable osculatrice.

Ce fait a des conséquences importantes : il double, sans démonstration nouvelle, le nombre des propriétés projectives de la cubique.

Ainsi, de même que, par un point, on peut mener une bisécante unique, de même *tout plan contient une seule droite intersection de deux plans osculateurs.*

On voit encore, puisque le cône qui projette la cubique d'un de ses points est du second ordre, que *la section de la développable osculatrice par un plan osculateur est une conique.*

Etc.

Nous chercherons maintenant toutes les surfaces du second ordre qui peuvent contenir la cubique. Soit

$$\begin{aligned} S \equiv\ & \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 \\ & + \nu x_1 x_3 + \nu' x_2^2 + \mu x_2 x_3 + \mu' x_1 x_4 + \lambda x_2 x_4 + \lambda' x_3^2 \\ & + \gamma x_3 x_4 + \delta x_4^2 = 0 \end{aligned}$$

l'équation d'une quadrique. Elle rencontre la cubique en six points dont les paramètres sont racines de l'équation

$$\alpha\omega^6 + \beta\omega^5 + (\nu + \nu')\,\omega^4 + (\mu + \mu')\,\omega^3 + (\lambda + \lambda')\,\omega^2 + \gamma\omega + \delta = 0.$$

Si la surface contient la cubique tout entière, l'équation précédente est satisfaite pour toute valeur de ω et tous les coefficients sont nuls ; donc

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0, \quad \lambda' = -\lambda, \quad \mu' = -\mu, \quad \nu' = -\nu;$$

Par suite l'équation de toute quadrique circonscrite à la cubique gauche peut s'écrire

$$\nu(x_1x_3 - x_2^2) + \mu(x_2x_3 - x_1x_4) + \lambda(x_2x_4 - x_3^2) = 0,$$

ou encore

$$S_x \equiv \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Et réciproquement, toute quadrique représentée par une équation de cette forme passe par la cubique, car les coordonnées d'un point

quelconque de la courbe rendent proportionnels les termes de la seconde et de la troisième ligne du déterminant.

Ainsi, l'équation des quadriques circonscrites S contient trois paramètres homogènes au premier degré. Ces surfaces forment donc un réseau.

Si un point y situé sur la quadrique S est donné, on peut généralement résoudre l'équation $S_y = 0$ par rapport à une des inconnues λ, μ, ν. Il y a exception seulement quand les mineurs de λ, μ, ν sont tous nuls, c'est-à-dire quand le point y est sur la courbe. Ecartons cette hypothèse. Dès lors un des paramètres λ, μ, ν s'exprime en fonction des deux autres, l'équation S_y ne dépend plus que de deux paramètres homogènes.

Par tout point non situé sur la cubique gauche, on peut mener un faisceau de quadriques circonscrites.

La bisécante issue du point y a trois points sur chaque surface de ce faisceau et appartient donc tout entière à la base de ce faisceau. Donc, par la cubique gauche et une de ses bisécantes on peut mener un faisceau de quadriques.

En d'autres termes, *une cubique gauche et une de ses bisécantes forment l'intersection complète de deux quadriques.*

Réciproquement, soient S et S′ deux quadriques circonscrites à la cubique. Un plan les coupe suivant deux coniques à quatre points communs, dont trois sur la cubique. Soit P le quatrième ; les deux quadriques S et S′ contiennent la bisécante issue de P.

Donc, *deux quadriques circonscrites à la cubique gauche ont encore en commun une bisécante réelle ou idéale ou une tangente.*

Par deux points P et Q extérieurs à la cubique, on peut faire passer une quadrique S, sauf quand P et Q sont sur une même bisécante, puisque c'est le seul cas où les deux points P et Q appartiennent à un faisceau de quadriques S.

On sera donc certain de ne pas se trouver dans ce cas exceptionnel, quand les bisécantes issues de P et Q sont distinctes ; et, en particulier, quand P et Q sont sur une même semi-sécante, c'est-à-dire quand la droite PQ rencontre la cubique en un seul point.

On peut donc énoncer les deux théorèmes suivants.

Deux bisécantes de la cubique gauche déterminent une quadrique circonscrite ; cette surface contient toutes les semi-sécantes s'appuyant sur les deux bisécantes.

Une semi-sécante détermine une quadrique circonscrite; et les bisécantes issues de tous les points de la semi-sécante sont des génératrices de même système de cette surface.

De ces deux théorèmes, on déduit facilement ce corollaire :

Toute quadrique circonscrite a deux systèmes de génératrices rectilignes, le premier formé de semi-sécantes, le second de bisécantes.

Cette propriété est le point de départ d'une série de recherches sur les différentes cubiques gauches qui peuvent exister sur une quadrique.

Tels sont, esquissés à grands traits, les faits géométriques principaux de la théorie des cubiques gauches.

Comme on l'a vu, ces courbes sont, en somme, analogues aux coniques, mais infiniment plus riches en propriétés,

Facilement abordables par les procédés les plus divers, même par des procédés élémentaires, en relation intime avec les doctrines principales de la géométrie de l'espace, elles fournissent, à presque toutes les méthodes de recherches, leurs premières et leurs plus élégantes applications.

Enfin, elles ne sont pas sans utilité pratique : on les a vu faire leur apparition dans l'optique physiologique; leur rôle en mécanique rationnelle est connu depuis longtemps.

C'est même à l'occasion d'un problème de statique qu'elles ont été étudiées d'abord par Möbius, il y a moins d'un siècle. L'illustre auteur du *Calcul barycentrique* avait déjà donné la représentation paramétrique dont nous nous sommes servi dans cette leçon.

Pourtant, à partir de Möbius, les premières acquisitions de la théorie sont dues à la géométrie projective. C'est de cette manière que Chasles, Cremona, von Staudt, étudièrent la cubique. Il convient de rappeler ici que, pour l'interprétation géométrique des imaginaires, von Staudt a trouvé un continuateur éminent en la personne de M. C. Servais.

Mais bientôt le calcul reprit ses droits; bientôt les manuels de Géométrie analytique un peu complets, celui de Salmon par exemple, ne purent se dispenser de consacrer un chapitre aux cubiques.

La seule monographie de ces courbes est analytique. Elle est due à von Drach et elle a été reproduite, en grande partie, dans les *Vorlesungen über Geometrie*, ce monument que M. Lindemann élève à la mémoire de Clebsch.

MM. Reye, Schröter, Sturm ont puissamment contribué à enrichir

la théorie des cubiques gauches. En 1890 M. Reye fit paraître un inventaire de nos connaissances sur ces courbes. A la fin de ce travail, le savant professeur de Strasbourg signalait les points encore peu étudiés de la théorie; ce sont, pour la plupart, des propriétés métriques, relatives à la courbure, à la torsion, aux plans normaux, développantes, développée, etc.

Bien que l'appel de M. Reye ait trouvé plus d'un écho, on peut dire que les lacunes signalées par lui ne sont pas toutes comblées.

Que les chercheurs se rassurent donc. Tout n'a pas été dit sur les cubiques gauches. C'est un domaine où le géomètre aussi bien que l'analyste peuvent encore espérer d'abondantes moissons de découvertes.

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE ED. LUCAS,

par M. A. Demoulin, professeur à l'Université de Gand.

Si dans un polygone inscrit d'un nombre pair de côtés, le produit des côtés de rang pair est égal au produit des côtés de rang impair, on peut inscrire une couronne de cercles tangents, consécutifs et tangents au cercle circonscrit aux sommets du polygone, quel que soit le premier cercle.

Ce théorème, dû à Ed. Lucas, fait l'objet de la question 797 proposée, dans *Mathesis*, en novembre 1892, (2), II, p. 264, et résolue, dans le tome suivant, p. 121. Il admet la généralisation que voici : *Si un polygone, plan ou gauche, d'un nombre pair de côtés, inscrit dans une sphère, est tel que le produit des côtés de rang pair égale le produit des côtés de rang impair, on pourra inscrire une couronne de sphères tangentes, consécutives et tangentes à la sphère circonscrite aux sommets du polygone, quelle que soit la première sphère.*

Je traiterai d'abord la question suivante : Deux points A_1 et A_2 étant marqués sur une sphère S, traçons deux sphères variables S_1 et S_2 tangentes à S aux points A_1 et A_2 et tangentes entre elles. Quelle relation existe-il entre leurs rayons ?

Rapportons la figure à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz passant par le centre de la sphère S et soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des points A_1 et A_2. Les coordonnées des centres des sphères S_1 et S_2 ont des expressions de la forme

$$x_1(1+\lambda_1),\ y_1(1+\lambda_1),\ z_1(1+\lambda_1);\quad x_2(1+\lambda_2),\ y_2(1+\lambda_2),\ z_2(1+\lambda_2),$$

et les rayons de ces sphères sont respectivement, en grandeur et en signe, $\lambda_1 R$, $\lambda_2 R$, R désignant le rayon de la sphère S. Exprimons que les sphères S_1 et S_2 sont tangentes, nous obtiendrons la relation cherchée :

$$[x_1(1+\lambda_1)-x_2(1+\lambda_2)]^2+[y_1(1+\lambda_1)-y_2(1+\lambda_2)]^2 \\ +[z_1(1+\lambda_1)-z_2(1+\lambda_2)]^2=(\lambda_1+\lambda_2)^2R^2.$$

En tenant compte des relations

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=R^2,\quad x_2^2+y_2^2+z_2^2=R^2,$$

$$\overline{A_1A_2}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=2R^2-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2),$$

on peut lui donner la forme plus simple :

$$\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\cdot\frac{1+\lambda_2}{\lambda_2}=\frac{4R^2}{\overline{A_1A_2}^2}.$$

Cela posé, inscrivons dans la sphère S un polygone $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$ et cherchons à déterminer 2n sphères $S_1, S_2, \dots, S_{2n-1}, S_{2n}$ tangentes à S respectivement aux points $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}, A_{2n}$ et telles, en outre, que S_1 soit tangente à S_2, S_2 à S_3, ..., S_{2n-1} à S_{2n}, S_{2n} à S_1. Le problème ne sera possible que si le polygone satisfait à une certaine condition que nous allons établir. Soient, en grandeur et en signe, $\lambda_1 R, \dots, \lambda_{2n} R$ les rayons des sphères $S_1, \dots, S_{2n}$. On a, d'après ce qui précède,

$$\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\cdot\frac{1+\lambda_2}{\lambda_2}=\frac{4R^2}{\overline{A_1A_2}^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{4R^2}{\overline{A_2A_3}^2}=\frac{1+\lambda_2}{\lambda_2}\cdot\frac{1+\lambda_3}{\lambda_3}, \qquad (2)$$

. . . . . .

$$\frac{1+\lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n-1}}\cdot\frac{1+\lambda_{2n}}{\lambda_{2n}}=\frac{4R^2}{\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2}, \qquad (2n-1)$$

$$\frac{4R^2}{\overline{A_{2n}A_1}^2}=\frac{1+\lambda_{2n}}{\lambda_{2n}}\cdot\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}, \qquad (2n)$$

d'où, par multiplication,

$$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_3A_4}\dots\overline{A_{2n-1}A_{2n}}=\overline{A_2A_3}\cdot\overline{A_4A_5}\dots\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}. \qquad (L)$$

C'est la condition donnée par Ed. Lucas. Si elle est vérifiée, il y aura une infinité de systèmes de sphères $S_1, \dots, S_n$ jouissant de la pro-

priété indiquée. On pourra, en effet, prendre la sphère S_1, c'est-à-dire λ_1, arbitrairement; la relation (1) donnera λ_2, la relation (2), λ_3, ..., la relation $(2n-1)$, λ_{2n}, et la relation $(2n)$ sera vérifiée en vertu de (L).

Plus généralement, le théorème de Lucas s'étend à un polygone d'un nombre pair de côtés inscrit dans une sphère de l'espace à n dimensions.

En prenant deux variables au lieu de trois, on obtient le théorème de Lucas. On peut encore établir cette proposition comme il suit.

Soient $A_1A_2 \ldots A_{2n-1}A_{2n}$ un polygone inscrit dans un cercle C de centre O, et $C_1, C_2, \ldots, C_{2n-1}, C_{2n}$ $2n$ cercles tangents, consécutifs et tangents à C aux sommets du polygone.

Appelons S la sphère dont C est un grand cercle et P un des pôles de C. Projetons les points du plan du cercle C sur la sphère S, le centre de projection étant en P. Aux cercles C_k correspondront des cercles C'_k tangents, consécutifs et tangents à C en $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}, A_{2n}$.

Soient $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{2n-1}, O'_{2n}$ les pôles des plans de ces cercles par rapport à la sphère. Ces points sont respectivement situés sur les droites $d_1, d_2, \ldots, d_{2n-1}, d_{2n}$ menées par $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}, A_{2n}$ parallèlement à OP. Le polygone $O'_1O'_2 \ldots O'_{2n-1}O'_{2n}$ est circonscrit à la sphère(*). En effet, le côté $O'_kO'_{k+1}$ qui joint les pôles des plans de deux cercles tangents est tangent à la sphère; d'une manière plus précise, il est tangent au cercle situé dans le plan des droites d_k, d_{k+1} et décrit sur A_kA_{k+1} comme diamètre.

En résumé, à la couronne formée par les cercles C_k, nous faisons correspondre un polygone $O'_1O'_2 \ldots O'_{2n-1}O'_{2n}$ circonscrit à la sphère et dont les sommets sont situés sur les droites $d_1, d_2, \ldots, d_{2n-1}, d_{2n}$ *et réciproquement*. Or, on a, en général,

$$A_kO'_k \cdot A_{k+1}O'_{k+1} = \frac{\overline{A_kA_{k+1}}^2}{4}.$$

En écrivant une égalité analogue pour chacun des côtés du polygone et en multipliant ces égalités membre à membre, après avoir échangé les deux membres des égalités de rang pair ou de rang impair, on obtiendra la relation de Lucas. Réciproquement, si cette relation est

---

(*) Signalons, en passant, cette autre propriété de la figure, conséquence immédiate d'un théorème bien connu, dû à Chasles : les centres $O_1, O_2, \ldots, O_{2n-1}, O_{2n}$ des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_{2n-1}, C_{2n}$ sont situés sur les droites PO'_1, $PO'_2, \ldots, PO'_{2n-1}, PO'_{2n}$.

vérifiée, on pourra choisir arbitrairement le sommet O'_1, les sommets suivants se détermineront de proche en proche et la droite $O'_{n}O'_1$ sera tangente à la sphère, ce qui démontre le théorème de Lucas. Le théorème analogue relatif à l'espace à n dimensions ($n \geq 3$) peut être établi au moyen d'une projection centrale des points de l'espace à n dimensions sur une sphère convenablement choisie de l'espace à $n+1$ dimensions.

La démonstration précédente m'a été inspirée par l'étude d'une correspondance entre les sphères d'un espace à n dimensions et les points d'un espace à $n+1$ dimensions. Dans le cas où $n=2$, cette correspondance est celle dans laquelle on associe à tout cercle Γ du plan du cercle C (*Voir plus haut*) le pôle du plan du cercle dont Γ est la projection stéréographique.

Je me propose de faire connaître prochainement les propriétés et les principales applications de ladite correspondance.

BIBLIOGRAPHIE.

Hauptsätze der Differential- und Integral-Rechnung als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammen gestellt von Dr R. Fricke, Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig. Dritte, umgearbeitete Auflage (un volume de XVI-214 p. in-8° et 74 figures). Braunschweig, Vieweg 1902.

Table des matières. Introduction, p. 1-15. Section I, Fondements du Calcul différentiel. I. Définition et calcul de la dérivée de $f(x)$ (p. 16-28). II. Dérivées et différentielles d'ordres supérieurs (p. 29-35). Section II. Applications du calcul différentiel. I. Maxima et minima de $f(x)$ (p. 36-38). II. Étude des courbes planes (p. 39-51). III. Séries (p. 52-71). IV. Indéterminations apparentes (p. 72-78). Section III. Fondements et applications du calcul intégral. I. Définition de l'intégrale indéfinie ou définie et applications géométriques (p. 79-97). II. Méthodes d'intégration (p. 98-115). Section IV. Fonctions de plusieurs variables indépendantes. I. Différentiation et intégration. II. Théorème de Taylor. — Maxima et minima (p. 129-139). III. Applications géométriques (p. 140-155). Section V. Introduction à la théorie des équations différentielles. I. Considérations générales sur les équations différentielles (p. 156-163). II. Equations différentielles ordinaires du premier ordre entre deux variables (p. 164-176). III Equations différentielles ordinaires d'ordre supérieur entre deux variables (p. 177-193). — Appendice. Quantités complexes et fonctions de variables imaginaires (p. 98-215).

L'ouvrage est un simple canevas ou précis pour les leçons d'Analyse aux écoles techniques. Le point de vue auquel il a été rédigé, est conforme aux idées qu'un

éminent géomètre, M. Felix Klein, a développées dans son discours Ueber Arithmetisierung der Mathematik (*Göttinger Nachrichten*, 1895, cahier 2) :

« C'est surtout dans les leçons destinées aux auditeurs qui doivent naturellement travailler beaucoup au moyen de l'intuition, c'est-à-dire dans les leçons s'adressant aux étudiants en sciences naturelles et aux futurs ingénieurs que l'intuition doit être prise pour point de départ; c'est dans ces milieux que l'exagération de la forme logique dans un seul sens a fait perdre aux mathématiques de l'importance qui devrait leur revenir à juste titre. » L'accueil favorable que les deux premières éditions du Précis de M. Fricke ont rencontré, prouve que l'auteur à su allier une rigueur suffisante à une grande richesse de fond; les améliorations et ajoutes introduites dans la nouvelle édition ne peuvent qu'augmenter le succès du livre. (J. N.)

Étude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre. Dissertation inaugurale présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Gand, pour l'obtention du grade de docteur spécial, par M. STUYVAERT, professeur à l'Athénée royal de Gand (VIII-73 pp. in-8°). Prix : fr. 2-50.

Le travail de M. Stuyvaert fait suite à la théorie des surfaces réglées algébriques en ce sens qu'il substitue aux génératrices rectilignes de ces dernières des génératrices planes ou gauches d'ordre supérieur, notamment des coniques et des cubiques gauches.

CHAPITRE I. *Sur les plans coupant un système de lignes de l'espace en six points d'une conique.* L'auteur suppose d'abord que le système de lignes soit une courbe unicursale unique C_m; les quadriques passant par quatre points fixes A, B, C, D choisis arbitrairement, déterminent sur C_m une I_6^{2m}; les plans passant par une droite d, déterminent sur C_m une I_1^m. Les involutions I_6^{2m} et I_1^m ont $(2m-5)\,C_5^{m-1}$ groupes de six points communs. Dans chacun des plans (dA), (dB), (dC), $dD)$ il y a C_6^m groupes de six points sur une quadrique dégénérée et non sur une conique. Par suite, les plans des coniques reposant par six points sur une courbe unicursale C_m enveloppent une surface de classe $(2m-5)\,C_5^{m-1} - 4C_6^m$. Ce nombre subit une réduction si la courbe C_m se décompose. Telle est l'idée simple et originale qui a servi à mettre en évidence de nombreux résultats généralement nouveaux et très-intéressants.

CHAPITRE II. *Sur certaines surfaces algébriques engendrées par des systèmes de coniques.* Signalons la surface S_3 engendrée par les coniques situés dans les plans d'un faisceau et reposant sur cinq droites indépendantes. L'auteur étudie cette surface d'une manière approfondie, il en détermine l'ordre, la classe, les singularités et en fait connaître diverses propriétés. L'étude de S_3 est le point de départ de deux séries de recherches, les unes en ordre ascendant sont relatives à des

surfaces analogues dont le système de directrices est plus compliqué; les autres en ordre descendant portant sur des cas particuliers de S_8. Sauf le point de départ et quelques conséquences se rattachant à des travaux connus ce chapitre paraît nouveau.

Chapitre III. *Gerbe de cubiques gauches.* Les cubiques ont en commun deux points et trois bisécantes; cette gerbe contient comme cas particuliers celles de Reye et de Sturm. L'étude de cette gerbe est basée sur une représentation analytique simple et symétrique au moyen de six formes linéaires; l'auteur utilise des notations symboliques commodes pour l'interprétation géométrique.

Ce chapitre ainsi que l'ensemble du travail de M. Stuyvaert mérite de fixer l'attention des géomètres. Dans un domaine difficile et peu connu, où les méthodes d'investigation sont pénibles ou insuffisantes, l'auteur a fait preuve d'une grande habileté. (Cl. S.)

Annuaire pour l'an 1902, publié par le bureau des Longitudes, avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars, 1902 (808 p. in-18). Prix : 1 fr. 50.

Sommaire. Calendriers (pp. 3-80). Phénomènes célestes et renseignements astronomiques (pp. 81-340). Poids, mesures, Monnaies (pp. 341-394). Tables d'amortissement et d'intérêt (pp. 395-420). Géographie, statistique, heure légale (pp. 421-500). Tables de mortalité (pp. 501-512). Données physiques (pp. 514-654). Données chimiques (pp. 655-668).

Notices. 1. Etoiles filantes et Comètes; par M. R. Radau (68 pages). 2. Science et poésie, par M. J. Janssen (10 pages). 3. Travaux de l'observatoire du Mont-Blanc, par M. J. Janssen (4 pages). 4. Discours prononcés aux obsèques de M. A. Cornu, par MM. Bassot et Poincaré (13 pages). Discours prononcés aux obsèques de M. Faye, par MM. Bouquet de la Grye, Janssen, Lœwy, Bassot et Bakhuyzen (21 pages).

Tables diverses (38 pages).

A partir de 1904, une partie des renseignements astronomiques, les données physiques et les données statistiques et géographiques ne seront plus publiés que tous les deux ans dans l'Annuaire.

Nomenclature des thèses de sciences mathématiques soutenues en France dans le courant du XIX^e^ siècle devant les Facultés des Sciences de Paris et des départements par E. Estanave, Docteur ès Sciences. Paris, Gauthier-Villars, 1903 (VIII-44 p. in 8).

Précieux recueil bibliographique contenant les titres de 292 thèses.

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Notes de géométrie*, par M. H. VAN AUBEL (*). La dernière équation de notre article (*Mathesis*, 1902, (3), II, p. 250) peut être mise sous la forme :

$$\alpha(b'^2\beta - c'^2\gamma)\beta'\gamma' + \beta(c'^2\gamma - a'^2\alpha)\gamma'\alpha' + \gamma(a'^2\alpha - b'^2\beta)\alpha'\beta' = 0.$$

Il en résulte que, si l'on considère le point M comme fixe, le lieu du point N tel que les perpendiculaires à AN, BN, CN menées par M rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite, est une conique circonscrite passant par M et par l'orthocentre. Donc N *étant un point donné dans le plan d'un triangle* ABC *et* M *un point quelconque de la conique circonscrite passant par* N *et par l'orthocentre*, 1° *les perpendiculaires à* AN, BN, CN *menées par* M *rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite;* 2° *il en est de même des perpendiculaires abaissées de* N *sur* AM, BM, CM (Comparez *Mathesis*, 1902, p. 250).

Cherchons l'enveloppe de la droite A'B'C' pour le cas où A', B', C' sont les points de rencontre des côtés BC, CA, AB avec les perpendiculaires abaissées du point fixe N sur les droites variables AM, BM, CM.

On obtient les coordonnées des points A', B', C', en changeant (α, β, γ) en $(\alpha', \beta', \gamma')$ et inversement dans celles de la p. 250. En les ordonnant par rapport à α, β, γ et faisant usage des mêmes notations, on trouve

$$\begin{matrix} 0, & n\beta + (n+n')\gamma, & -m'\beta + m\gamma, \\ -n'\gamma + n\alpha, & 0, & l\gamma + (l+l')\alpha, \\ m\alpha + (m+m')\beta, & -l'\alpha + n\beta, & 0, \end{matrix}$$

de sorte que la droite A'B' sera représentée par l'équation

$$[n\beta + (n+n')\gamma]\,[l\gamma + (l+l')\alpha]\,x + (m'\beta - m\gamma)(n'\gamma - n\alpha)y + (n'\gamma - n\alpha)\,[n\beta + (n+n')\gamma]\,z = 0.$$

Le point C' devant appartenir à cette droite, on a encore

$$la'\beta\gamma + m\beta'\gamma\alpha + n\gamma'\alpha\beta = 0.$$

(*) Nous publierons plus tard des recherches déjà anciennes de M. Déprez sur des questions un peu plus générales, dont quelques-uns des résultats de M. Van Aubel peuvent se déduire facilement. (*Rédaction.*)

Eliminant α, ordonnant par rapport à β, γ et remarquant que

$$n\gamma' - (l+l')\alpha' = -m'\beta', \quad n'\gamma' + l\alpha' = (m+m')\beta',$$

on trouve l'équation

$$p\beta^2 + q\beta\gamma + r\gamma^2 = 0,$$

dans laquelle

$$p = n\,[(m+m')(m'y+nz) - lm'x]$$

$$q = [mn - (n+n')m']\,lx + [m'n' - (m+m')n]\,my + [mn' + (m+m')(n+n')]\,nz$$

$$r = m\,[(n+n')(m'z+lx) - mn'y].$$

L'enveloppe de la droite A'B'C' est représentée par l'équation

$$q^2 - 4pr = 0.$$

Si, après avoir remplacé p, q, r par leurs valeurs, on développe le premier membre de cette équation, on trouve que les coefficients de x^2, y^2, z^2 sont les produits respectifs de l^2, m^2, n^2 par le facteur $(mn + m'n + mn')^2$, et ceux de yz, zx, xy les produits de $-2mn$, $-2nl$, $-2mn$ par le même facteur ; par suite, l'équation devient :

$$lx^2 + m^2y^2 + n^2z^2 - 2mnyz - 2nlzx - 2lmxy = 0.$$

Comme d'ailleurs $l+m+n=0$, on en conclut que *l'enveloppe de la droite* A'B'C' *est une parabole tangente aux trois côtés du triangle* ABC *aux points où ils sont rencontrés par les droites qui joignent les sommets opposés au point* $\left(\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$.

Remarque. Les équations

$$ny - mz = 0, \quad lz - nx = 0, \quad mx - ly = 0$$

représentent les diamètres passant par les sommets du triangle ABC(*).

(*) *Enveloppe de* A'B'C'. Les faisceaux A (M...) et B (M...) projetant de A et B les points M de l'hyperbole sont projectifs. Les faisceaux N (A'...) et N (B'...) directement égaux respectivement à A (M...) et B (M...) sont projectifs; les ponctuelles décrites par A' et B' sur BC et AC sont donc projectives et la droite A'B'C' enveloppe une conique inscrite à ABC. Si M coincide avec l'orthocentre de ABC, la droite A'B'C' est à l'infini et l'enveloppe est une parabole. Si M est l'orthocentre de ANC, le point A' vient en C et B' est le point de contact du côté AC avec la parabole. Si M coincide successivement avec chacun des points à l'infini de l'hyperbole, on trouve que les tangentes menées de N à la parabole sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère. (C. S.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1250.

(Voir *Mathesis*, (3), t. II, p. 56.)

Trouver les valeurs de k et de l les plus rapprochées telles que l'on ait

$$1 - kx \lessgtr \frac{1}{\sqrt{1+x}} \lessgtr 1 - lx,$$

1° *quand x varie de* 0 *à* $\frac{1}{2}$; 2° *quand x varie de* 0 *à* $-\frac{1}{2}$.

Solution par M. Emmerich. De $1 - kx \lessgtr \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ on tire successivement

$$kx \lessgtr \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x}},$$

$$kx \lessgtr \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} + 1)},$$

$$kx \lessgtr \frac{x}{1+x+\sqrt{1+x}},$$

de sorte que la relation proposée prend la forme

$$kx \lessgtr \frac{x}{1+x+\sqrt{1+x}} \lessgtr lx.$$

1° Si x varie de 0 à $\frac{1}{2}$, on a

$$k \lessgtr \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x}} \lessgtr l.$$

On satisfait à cette condition en donnant à k la valeur la plus petite et à l la valeur la plus grande que la fraction $\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x}}$ a dans l'intervalle de 0 à $\frac{1}{2}$. Dans le premier cas on fera $x = \frac{1}{2}$, dans le second $x = 0$. C'est ainsi qu'on trouve

$$k = \frac{1}{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}} = 2 - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad l = \tfrac{1}{2}.$$

2° Quand x varie de 0 à $-\frac{1}{2}$, on aura

$$k \leqq \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x}} \leqq l.$$

En posant successivement $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, on trouve alors

$$k = \frac{1}{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2} - 2, \quad l = \frac{1}{2}.$$

×Question 1372.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 126.)

Résoudre le système

$$a^2(m+x+y+z)^2 = k^2(y^2+z^2+yz)$$
$$b^2(m+x+y+z)^2 = k^2(z^2+x^2+zx)$$
$$c^2(m+x+y+z)^2 = k^2(x^2+y^2+xy)$$

× *Solution par* M. Emmerich. Soient a_1, b_1, c_1 les côtés d'un triangle $A_1B_1C_1$, x, y, z les distances de son premier centre isogone I_1 aux sommets. Les triangles $B_1C_1I_1$, C_1A_1I, $A_1B_1I_1$ donnent

$$y^2+z^2+yz = a_1^2, \quad z^2+x^2+zx = b_1^2, \quad x^2+y^2+xy = c_1^2. \qquad (1)$$

En calculant les aires de ces triangles on trouve

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{3}(yz+zx+xy) = S_1 = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}R_1,$$

où l'on a posé

$$-a_1^4 - b_1^4 - c_1^4 + 2b_1^2c_1^2 + 2c_1^2a_1^2 + 2a_1^2b_1^2 = 3R_1^2. \qquad (2)$$

L'équation

$$yz+zx+xy = R_1, \qquad (3)$$

ajoutée trois fois à la somme des équations (1) donne

$$2(x+y+z)^2 = 2u^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 3R_1. \qquad (4)$$

C'est ainsi qu'on représente géométriquement la fonction $u \equiv x+y+z$ et les fonctions y^2+z^2+yz, z^2+x^2+zx, x^2+y^2+xy.

En substituant $a_1 = \frac{a}{R}(m+u)$, $b_1 = \frac{b}{R}(m+u)$, $c_1 = \frac{c}{R}(m+u)$, les équations (1) se transforment en celles du système proposé. On aura

$$R_1 = \frac{(m+u)^2}{R^2} \cdot R, \quad 3R^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 \qquad (5)$$

Les équations (3) et (4) deviennent alors

$$yz + zx + xy = \frac{(m+u)^2}{R^2} R, \tag{6}$$

$$2u^2 = \frac{(m+u)^2}{R^2}(a^2 + b^2 + c^2 + 3R); \tag{7}$$

l'équation (7) donne

$$u = \frac{mP}{R\sqrt{2} - P}, \quad P^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 3R. \tag{8}$$

Les équations proposées donnent enfin

$$z - x = \frac{a^2 - c^2}{R^2} \cdot \frac{(m+u)^2}{u}, \quad x - y = \frac{b^2 - a^2}{R^2} \cdot \frac{(m+u)^2}{u},$$

$$-2x + y + z \equiv u - 3x = \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{R^2} \cdot \frac{(m+u)^2}{u},$$

$$\frac{3x}{u} = 1 - \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{R^2} \cdot \frac{(m+u)^2}{u^2} = 1 - \frac{2(2a^2 - b^2 - c^2)}{a^2 + b^2 + c^2 + 3R};$$

$$\frac{x}{u} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2 + R}{a^2 + b^2 + c^2 + 3R}. \tag{9}$$

Les équations (5), (8), (9) résolvent la question. Il y a quatre solutions à cause de l'ambiguïté de R et de P. — Exemple : $a = 3$, $b = 7$, $c = 8$, $m = 194$, $R = 388$;

$$x_1 = 128, \quad y_1 = 48, \quad z_1 = 18;$$
$$x_2 = -42\tfrac{2}{3}, \quad y_2 = -16, \quad z_2 = -6;$$
$$x_{3,4} = \tfrac{8}{5}u, \quad y_{3,4} = 0, \quad z_{3,4} = -\tfrac{3}{5}u$$

avec $388\,u^2 = 25(194 + u)^2$.

Question 1380.

(Voir *Mathesis* (3), II, p. 184.)

Par les sommets d'un tétraèdre ABCD *et un même point* P, *on mène des droites qui percent les faces opposées aux points* A_1, B_1, C_1, D_1. *Soient* A_2, B_2, C_2, D_2 *les points qui divisent les droites* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *dans des rapports donnés* a, b, c, d.

1° *Sur quelle surface doit se mouvoir le point* P *pour que le tétraèdre* A_2, B_2, C_2, D_2 *ait un volume donné?* 2° *Quelle est cette surface, lorsque*

les points A_2, B_2, C_2, D_2 *sont dans un même plan? Montrer qu'elle se compose du plan de l'infini et d'une surface cubique si* a, b, c, d *vérifient une certaine relation. Si* P *se meut sur cette surface cubique, le plan* $A_2B_2C_2D_2$ *tourne autour d'un point fixe.* (DÉPREZ.)

Solution par MM. BASTIN et EMMERICH. Soient α, β, γ, δ les coordonnées barycentriques absolues du point P par rapport au tétraèdre donné, de sorte que, tant que P est à une distance finie,

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1.$$

La droite AA_1 ayant pour équations $\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\frac{u}{\delta}$, on trouve pour coordonnées de A_1

$$0,\ \frac{\beta}{s-\alpha},\quad \frac{\gamma}{s-\alpha},\quad \frac{\delta}{s-\alpha},$$

s désignant la somme

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta.$$

Soient $AA_2=a.A_2A_1$..... Les coordonnées de A étant (1, 0, 0, 0), on obtient pour coordonnées de A_2 :

$$(a+1)x_2=1,\quad (a+1)y_2=a\beta:(s-\alpha),\quad (a+1)z_2=a\gamma:(s-\alpha),$$
$$(a+1)u_2=a\delta:(s-\alpha).$$

Des expressions semblables fournissent les coordonnées des points B_2, C_2, D_2.

Représentons par V le volume du tétraèdre fondamental, par V_2 le volume $A_2B_2C_2D_2$; on sait que le rapport $V_2 : V$ est égal au déterminant formé avec les coordonnées barycentriques absolues des points A_2, B_2, C_2, D_2. Donc si l'on pose

$$K=\frac{abcd}{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)},\quad P=(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)(s-\delta),$$

on a

$$\frac{V_2P}{V}=K\begin{vmatrix} \frac{s-\alpha}{a} & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \frac{s-\beta}{b} & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \frac{s-\gamma}{c} & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \frac{s-\delta}{d} \end{vmatrix}.$$

Écrivons au-dessus du dernier déterminant la ligne $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, puis à gauche la colonne 1, 0, 0, 0, 0, et retranchons ensuite la nouvelle première ligne de chacune des suivantes; en posant

$$\frac{s-\alpha}{a}-\alpha=\alpha', \quad \frac{s-\beta}{b}-\beta=\beta', \ldots,$$

on obtient

$$\frac{V_2P}{V}=K\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -1 & \alpha' & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \beta' & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \gamma' & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \delta' \end{vmatrix}.$$

Enfin, si on développe le déterminant suivant les produits des éléments de la première diagonale, il vient

$$\frac{V_2P}{V}=K(\alpha'\beta'\gamma'\delta'+\alpha\beta'\gamma'\delta'+\alpha'\beta\gamma'\delta'+\alpha'\beta'\gamma\delta'+\alpha'\beta'\gamma'\delta).$$

On en conclut que le lieu d'un point P tel que le volume $A_2B_2C_2D_2$ soit constant est une surface du 4e ordre passant par A, B, C, D.

2. Pour que les points A_2, B_2, C_2, D_2 soient dans un même plan, on doit avoir $V_2=0$, c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned}&[s-\alpha(a+1)][s-\beta(b+1)][s-\gamma(c+1)][s-\delta(d+1)]\\&\quad+\Sigma a\alpha\,[s-\beta(b+1)][s-\gamma(c+1)][s-\delta(d+1)]\end{aligned}\right\}=0. \quad (2)$$

Si on développe les produits indiqués et qu'on ordonne par rapport à s, on trouve

$$s^4-s^3\Sigma\alpha+s^2\Sigma\alpha\beta(1-ab)+s\Sigma d_1\alpha\beta\gamma+m\alpha\beta\gamma\delta=0,$$

après avoir posé

$$d_1=2abc+ab+bc+ca-1, \quad \text{etc.}$$

$$m=(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)-\Sigma a(b+1)(c+1)(d+1);$$

comme $\Sigma\alpha=s$, l'équation $V_2=0$ se réduit à

$$s^2\Sigma\alpha\beta(1-ab)+s\Sigma d_1\alpha\beta\gamma+m\alpha\beta\gamma\delta=0. \quad (3)$$

Par conséquent, si $m=0$, le lieu de P est le plan de l'infini et la surface du troisième ordre

$$s\Sigma\alpha\beta(1-ab)+\Sigma d_1\alpha\beta\gamma=0. \quad (4)$$

L'équation (2) peut encore s'écrire

$$\Sigma \frac{a\alpha}{s-\alpha(a+1)}+1=0, \qquad (5)$$

d'où en tenant compte de l'hypothèse $m=0$ sous la forme

$$\Sigma \frac{a}{(a+1)}-1=0 : \qquad (6)$$

$$\Sigma\left[\frac{a\alpha}{s-\alpha(a+1)}+\frac{a}{a+1}\right]=0, \quad \text{ou} \quad \Sigma\frac{a}{(a+1)[s-\alpha(a+1)]}=0. \qquad (7)$$

Cherchons maintenant l'équation du plan $A_2B_2C_2D_2$. En exprimant que le plan $Ax+By+Cz+Dw=0$ passe par le point A_2 dont les coordonnées sont proportionnelles aux quantités $s-\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$, $a\delta$, on trouve

$$A\frac{s-\alpha}{a}+B\beta+C\gamma+D\delta=0, \quad \text{ou} \quad A\left(\frac{s-\alpha}{a}-\alpha\right)+\Sigma A\alpha=0.$$

En écrivant de même que le plan passe par les points B_2, C_2, D_2, on voit que les coefficients A, B, C, D sont inversement proportionnels aux quantités $\frac{a}{s-\alpha(a+1)}, \cdots$; donc l'équation du plan est

$$\Sigma \frac{ax}{s-\alpha(a+1)}=0.$$

L'égalité (7) exprime que ce plan passe par le point $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1}, \frac{1}{d+1}$.

×Question 1383.

(Voir *Mathesis* (3); II, p. 216).

Résoudre l'équation

$$\cos 5x \cos^5 x+\sin 5x \sin^5 x=a$$

(Déprez.)

Solution par MM. V. Cristesco (Bucarest) et Convert (Besançon). On a

$$\cos 5x=5\cos x-20\cos^3 x+16\cos^5 x,$$
$$\sin 5x=5\sin x-20\sin^3 x+16\sin^5 x;$$

par suite, l'équation proposée devient

$$16(\sin^{10}x+\cos^{10}x)-20(\sin^6 x+\cos^6 x)+5(\sin^2 x+\cos^2 x)=a. \qquad (1)$$

Si l'on élève au cube l'égalité

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{2}$$

on obtient

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2x. \tag{3}$$

L'égalité (2) donne aussi

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2x; \tag{4}$$

et en élevant l'égalité (4) au carré, on trouve

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 1 - \sin^2 2x + \tfrac{1}{8}\sin^4 2x. \tag{5}$$

Enfin, multiplions membre à membre les égalités (3) et (4); il vient

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x + \sin^4 x \cos^4 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \tfrac{5}{4}\sin^2 2x + \tfrac{3}{8}\sin^4 2x,$$

ou

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1 - \tfrac{5}{4}\sin^2 2x + \tfrac{5}{16}\sin^4 2x. \tag{6}$$

A l'aide des relations (3), (5) et (6), l'équation (1) devient

$$10\sin^4 2x - 15\sin^2 2x + 4(1 - a) = 0. \tag{7}$$

Discutons l'équation (7) en $\sin^2 2x$. Pour que les racines de cette équation conviennent, il faut qu'elles soient réelles, positives et inférieures à $+1$

Ces racines sont réelles si

$$a \geq -\tfrac{13}{21}.$$

Elles sont positives si $a \leq 1$, et de signes contraires si $a > 1$.

Le résultat de la substitution de $+1$ dans l'équation (7) est

$$f(+1) = -(1 + 4a).$$

La demi-somme des racines est $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} < 1$; par suite, si les deux racines sont réelles et positives, et si $+1$ n'est pas compris entre elles, alors elles sont inférieures à $+1$.

Résumé de la discussion :

$-\infty < a < -\frac{13}{21}$. *Racines imaginaires.*

$-\frac{13}{21} < a < -\frac{1}{4}$. Racines réelles, positives et inférieures à $+1$; on a *deux solutions pour* $\sin^2 2x$.

$-\frac{1}{4} < a < +1$. Racines réelles et positives, $+1$ est compris entre les racines; on a *une seule solution pour* $\sin^2 2x$.

$+1 < a < +\infty$. Racines réelles et de signes contraires; $+1$ est compris entre les racines; *aucune solution.*

Solution par M. Rius y Casas. On a

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x,$$
$$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x,$$

et puisque, successivement,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$
$$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x,$$
$$\cos^{10} x + \sin^{10} x = 1 - 5\sin^2 x \cos^2 x (\cos^6 x + \sin^6 x) - 10\sin^4 x \cos^4 x$$
$$= 1 - 5\sin^2 x \cos^2 x + 5\sin^4 x \cos^4 x,$$

l'équation à résoudre se transforme en

$$5\sin^4 x \cos^4 x - 10\sin^2 x \cos^2 x (1 - 3\sin^2 x \cos^2 x)$$
$$+ (1 - 5\sin^2 x \cos^2 x + 5\sin^4 x \cos^4 x) = 0,$$

ou,

$$40\sin^4 x \cos^4 x - 15\sin^2 x \cos^2 x + 1 = a,$$

d'où, multipliant par 4,

$$10\sin^4 2x - 15\sin^2 2x - 4(a - 1) = 0,$$

équation bicarrée, qui donne

$$\sin 2x = \pm\sqrt{\tfrac{3}{4} \pm \sqrt{\tfrac{9}{16} + \tfrac{2}{5}(a - 1)}}.$$

Si $a = 1 - \frac{5}{2}k^2$, on peut transformer le radical double en une somme de deux radicaux simples, et on obtient

$$\sin 2x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{2} + 2k} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{2} - 2k}.$$

Solution analogue par M. Lez.

Solution par M. Audibert. On a les formules :

$$2^4 \cos^5 x = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x,$$
$$2^4 \sin^5 x = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x.$$

Multipliant la première par $\cos 5x$, la seconde par $\sin 5x$ et ajoutant, on a l'égalité

$$2^4(\cos^5 x \cos 5x + \sin^5 x \sin 5x) = 1 + 5\cos 8x + 10\cos 4x = 2^4 a.$$

Posant $\cos 4x = z$, $\cos 8x = 2z^2 - 1$, la résultante est l'équation

$$5z^2 + 5z - 2(4a + 1) = 0,$$

d'où l'on tirera la valeur de $\cos 4x$ en fonction de a.

M. Emmerich trouve la même équation en cos $4x$ par d'autres transformations et fait observer qu'on doit avoir $1 \geqq a \geqq -\frac{13}{32}$ et qu'il y a deux valeurs admissibles pour cos $4x$ si $-\frac{1}{4} \geqq a \geqq -\frac{13}{32}$.

Solution par M. G. Verheugen. En exprimant cos $5x$, $\cos^5 x$, sin $5x$ et $\sin^5 x$ en fonction de tg x, on trouve

$$\cos 5x \cos^5 x = \frac{1 - 10\,\mathrm{tg}^2 x + 5\,\mathrm{tg}^4 x}{(1 + \mathrm{tg}^2 x)^5},$$

$$\sin 5x \sin^5 x = \frac{\mathrm{tg}^{10} x - 10\,\mathrm{tg}^8 x + 5\,\mathrm{tg}^6 x}{(1 + \mathrm{tg}^2 x)^5},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{tg}^{10} x - 10\,\mathrm{tg}^8 x + 5\,\mathrm{tg}^6 x + 5\,\mathrm{tg}^4 x - 10\,\mathrm{tg}^2 x + 1}{(1 + \mathrm{tg}^2 x)^5} = a.$$

Posons $y = \mathrm{tg}^2 x$, on aura, en divisant les deux membres par $1 + y$,

$$\frac{y^4 - 11y^3 + 16y^2 - 11y + 1}{(1 + y)^4} = a$$

d'où l'*équation réciproque*

$$(1 - a)y^4 - (11 + 4a)y^3 + (16 - 6a)y^2 - (11 + 4a)y + 1 - a = 0.$$

MM. Malengreau, Rose et Prange ont résolu la même question.

Question 1387.

(Voir *Mathesis*, (3), II, p. 216).

Soient A′, B′, C′ *les pieds des bissectrices intérieures des angles d'un triangle* ABC. *Démontrer que le triangle* A′B′C′ *peut être isoscèle sans que le triangle* ABC *soit isoscèle.* (V. Cristesco.)

Solution par M. P. Bastin. On a

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{AB'}^2 - 2AA' \cdot AB' \cos\frac{A}{2},$$

$$\overline{A'C'}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2AA' \cdot AC' \cos\frac{A}{2}.$$

Supposons A'B' = A'C'; on conclut des égalités précédentes :

$$\left(AB' - AC'\right)\left(AB' + AC' - 2AA' \cos\frac{A}{2}\right) = 0.$$

Si le premier facteur est nul, il est aisé de voir que le triangle ABC est isocèle.

Il suffira, pour démontrer le théorème, d'établir que le second facteur peut s'annuler. Or,

$$AB' = \frac{bc}{a+c}, \quad AC' = \frac{bc}{a+b},$$

$$AA' = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Le second facteur devient, par conséquent,

$$\frac{bc}{a+c} + \frac{bc}{a+b} - \frac{4p(p-a)}{b+c}.$$

Faisant abstraction de facteurs positifs et ordonnant par rapport à a, on obtient

$$a^3 + a^2(b+c) - a(b^2+bc+c^2) - (b^2+c^2)(b+c). \qquad (1)$$

En égalant à 0 ce polynome, on obtient une équation du 3e degré en a, dont une racine est réelle et positive. Cette racine convient à la question, car la substitution de $b+c$ et de $b-c$ à a dans le polynome donne des résultats de signes contraires.

Note. MM. Emmerich, Déprez et Delahaye ont résolu la même question : nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette de reproduire de leur solution que les remarques intéressantes qui les accompagnent.

I. Soit $f(a)$ la quantité (1); la nouvelle espèce de triangles *pseudo-isocèles* signalés par M. Cristesco est caractérisée par la relation

$$f(a) = (a+b+c)(b^2+c^2-a^2) + abc = 0. \qquad (2)$$

MM. Delahaye et Déprez la mettent sous les formes

$$Rr + bc\cos A = 0, \quad a + 4p\cos A = 0, \quad R\tan A + 2p = 0 \qquad (3)$$

qui montrent immédiatement que l'angle A est obtus.

II. M. Emmerich étudie les relations entre les angles A, B, C. L'équation (2) lui donne successivement

$$\cos A = \frac{-a}{2(a+b+c)} = \frac{-\sin A}{2(\sin A + \sin B + \sin C)},$$

$$1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{-\sin\frac{A}{2}}{4\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{-\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B-C}{2}},$$

$$3\sin\frac{A}{2} - 4\sin^3\frac{A}{2} + 2\cos A\cos\frac{B-C}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{3A}{2} + 2\cos A\cos\frac{B-C}{2} = 0. \qquad (3)$$

Comme $b+c > a$, la valeur $\cos A = -a : (a+b+c)$ montre que A est plus petit que l'angle obtus qui a pour cosinus $\frac{1}{4}$, ou $< 104°28'39''$. D'autre part, comme $\cos\frac{B-C}{2} < 1$, on conclut de l'équation (3),

$$\sin\frac{3A}{2} + 2\cos A < 0,$$

d'où successivement, en faisant $\sin\frac{A}{2} = z$,

$$3z - 4z^3 + 2(1 - 2z^2) < 0,$$
$$(2z+1)(2z^2 + z - 2) > 0, \quad 2z^2 + z - 2 > 0,$$
$$z > \tfrac{1}{4}(\sqrt{17} - 1), \quad A > 102°39'48''.$$

Cette limite inférieure de l'angle A correspond à $B = C$ ou $b = c$, c'est-à-dire à un triangle isoscèle ABC. Si l'on introduit l'hypothèse $b = c$ dans l'équation (2), on trouve

$$a^3 + 2a^2b - 3ab^2 - 4b^3 \equiv (a^2 + ab - 4b^2)(a+b) = 0;$$

d'où

$$a = \frac{b(\sqrt{17} - 1)}{2},$$

valeur qui résulte aussi de $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1)$.

On peut remarquer que

$$AB' = AC' = \tfrac{1}{4}a,$$

$$B'C' = BC' = CB' = \frac{a^2}{4b}, \quad \frac{B'C'}{B'A'} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

En écrivant $\frac{a^2}{4} = b \cdot BC'$ ou $\overline{BA'}^2 = BA \cdot BC'$, on trouve que A'C' est perpendiculaire à BA.

M. Emmerich démontre également que l'équation (1) a deux racines négatives en déterminant les signes des quantités $f(-\infty)$, $f(-b-c)$, $f(0)$.

III. Pour étudier plus facilement les racines négatives, changeons a en $-a$ dans l'équation (1); celle-ci devient

$$f_1(a) = (b+c-a)(b^2+c^2-a^2) - abc = 0.$$

Supposons $b > c$. On a d'abord

$$f_1(0) > 0, \quad f_1(b+c) < 0, \quad f_1(\infty) > 0;$$

il en résulte que l'équation $f_1(a) = 0$ a une racine supérieure à $b+c$, qui ne peut former de triangle avec b et c; une seconde racine est inférieure à $b+c$. Ensuite,

$$f_1(b) < 0, \quad f_1(c) > 0, \quad f_1(b-c) = bc(5c-b);$$

par conséquent, si $b < 5c$, la seconde racine est comprise entre c et b et surpasse $b-c$; elle forme donc un triangle avec b et c.

Nous allons voir que, dans ce triangle, le pied A' de la bissectrice intérieure de l'angle A et les pieds B'', C'' des bissectrices extérieures en B et C sont les sommets d'un triangle isoscèle.

De ce que $b > a > c$, le point C'' tombe sur le prolongement de AB au-delà de B, et B'' sur le prolongement de CA au-delà de A. Les triangles AA'C'', AA'B'' donnent

$$\overline{A'C''}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{AC''}^2 - 2AA' \cdot AC'' \cos\frac{A}{2},$$

$$\overline{A'B''}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{AB''}^2 + 2AA' \cdot AB'' \cos\frac{A}{2}.$$

L'égalité $\overline{A'C''}^2 - \overline{A'B''}^2 = 0$, revient à

$$\left(AC'' + AB''\right)\left(AC'' - AB'' - 2AA' \cos\frac{A}{2}\right) = 0.$$

Remplaçons dans le second facteur AC'', AB'', AA', $\cos\frac{A}{2}$ par les

valeurs

$$AC'' = \frac{bc}{b-a}, \quad AB'' = \frac{bc}{a-c};$$

$$AA' = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

on trouvera $f_1(a) = 0$.

Existe-t-il d'autres propriétés remarquables des triangles de la question 1387? Quelle est la construction la plus simple de ces triangles si l'on en donne deux côtés (b et c ou a et b) ou a et A, etc.?

La relation $a = -2p\cos A$ (ou $a = 2(p-a)\cos A$) permet de construire p (ou $p-a$), étant donnés a et A, et par suite les points de contact des côtés de l'angle A avec les cercles tritangents I, I_a. (J. N.)

Question 1388.

(Voir *Mathesis*, (3), II, pp. 216 et 259).

Une courbe Δ *étant rapportée à deux axes rectangulaires, soit* M' *le point où l'ordonnée* MP *d'un point quelconque* M *de* Δ *est rencontrée par la perpendiculaire élevée en* O *sur le rayon* OM; *le point* M' *décrit une seconde courbe* Δ'. *On demande de trouver la tangente* M', *connaissant la tangente en* M. (Petit-Bois).

Solution par M. R. Van Cauwenberghe. La solution géométrique que nous nous proposons de donner, est basée sur la théorie des lignes de rappel exposée par M. Massau dans son traité de Statique (éd. 1891, p. 71-75 et fascicule II, p. 367-407).

Soient m un point de Δ infiniment voisin de M, et m' son correspondant sur Δ'. Soit MT la tangente en M à Δ.

Faisons tourner la figure OMmT de 90° autour de O, de manière que OM prenne la direction de OM'; M viendra en M'', m en m'' sur om', T en T''. Menons M'n parallèle à M''m''.

Nous obtenons trois figures infiniment petites (M, m), (M'', m''), (M', m', n) dont les pôles de convergence sont respectivement M, M'', M'; m'', n, m' sont sur une même ligne de rappel dont le foyer est O.

Passons aux limites relatives(*) et posons

$$lr\mathrm{M}m = \mathrm{M}\mu,$$

μ étant l'intersection de MT et de OX.

Alors

$$lr\mathrm{M}''m'' = \mathrm{M}''\mu'',$$

μ'' étant l'intersection de M''T'' et de OY.

Mais m'' et n restent aux limites relatives sur une même ligne de rappel puisque M''m'' et M'n' sont parallèles.

Donc V ou lrn se trouve sur OY ; et comme

$$\frac{On}{Om''} = \frac{\mathrm{OM}'}{\mathrm{OM}''} = \frac{\mathrm{OM}'}{\mathrm{OM}},$$

on a

$$\frac{\mathrm{OV}}{O\mu''} = \frac{\mathrm{OM}'}{\mathrm{OM}}.$$

La limite relative de nm' est une parallèle à ON', menée par V ; μ' ou lrm' se trouvera sur cette droite et sur la perpendiculaire élevée en μ à OX ; M'μ' est la tangente demandée.

(*) Etant donné un segment de droite infiniment petit, $\bar{a}$, on peut toujours le mettre sous la forme $\frac{\bar{a}}{dt}dt$. Par définition :

$$lr\bar{a} = \left(\lim\frac{\bar{a}}{dt}\right)dt$$

dt est arbitraire, mais à la même valeur pour tous les éléments d'une même figure infiniment petite ; la notation lr signifie *limite relative*.

La limite relative d'une figure infiniment petite, est la figure obtenue en remplaçant les divers éléments de la figure primitive par leurs limites relatives. Les angles infiniment petits disparaissent aux limites relatives. Donc la limite relative d'une corde infiniment petite est une longueur finie portée sur la tangente en son pôle de convergence.

La limite absolue du rapport de deux infiniment petits est égale au rapport de leurs limites relatives.

Résumé de la théorie des lignes de rappel. Si a et b ont pour pôles de convergence (position limite) A, B et si l'intersection de ab et AB a pour limite O, O est le *foyer* de la ligne de rappel AB, et on démontre que 1° tout portion infiniment petite de ab a pour limite relative un segment de droite parallèle à AB ; 2° si Aa et Bb sont et restent parallèles, les limites relatives de a et b sont en ligne droite avec O.

On voit facilement que

$$OV = \frac{\mu\mu'}{2}.$$

Le tracé se réduit donc à ce qui suit :

Prolonger OM′ jusqu'à sa rencontre en λ avec la perpendiculaire en μ à OX, porter $\lambda\mu' = \mu\lambda$, joindre Mμ'.

Question 1389.

(*Mathesis*, (3); II, p. 240.)

Soient OD, OE *les asymptotes d'une hyperbole. La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque* M *de la courbe sur* OD *coupe* OE *en* N ; *la perpendiculaire menée de* M *sur* OE *coupe* OD *en* P.

Démontrer que la droite qui unit les projections de M *sur les axes de l'hyperbole et la normale en* M *concourent au milieu de la droite* NP.

(Déprez).

Solution par MM. G. Verheugen, Andrien, A. D. (Malonne), François, Rose, Malengreau, Barisien, P. Bastin, Lebouq et Emmerich. Soit l'équation de l'hyperbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0;$$

on en déduit, en désignant par x_1, y_1 les coordonnées de M, les coordonnées de N

$$x = \frac{a(ax_1 + by_1)}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{-b(ax_1 + by_1)}{a^2 - b^2},$$

et les coordonnées de P

$$x = \frac{a(ax_1 - by_1)}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{b(ax_1 - by_1)}{a^2 - b^2};$$

d'où, les coordonnées de R, milieu de NP,

$$x = \frac{a^2x_1}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{-b^2y_1}{a^2 - b^2},$$

valeurs qui satisfont à la fois, à l'équation

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1$$

de la droite qui unit les projections de M sur les axes de l'hyperbole, et à l'équation

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1), \quad \text{ou} \quad \frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 + b^2,$$

de la normale en M.

Remarques. Appelons I le milieu de NP, N′ le point de rencontre de OD et MN, P′ le point de rencontre de OE et MP. On a les propriétés suivantes :

a. I décrit l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^6} - \frac{y^2}{b^6} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^2}.$$

b. Le milieu J de N′P′ décrit l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^6} - \frac{y^2}{b^6} = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}.$$

c. Les droites NP, N′P′ ont des directions symétriques par rapport à un axe de l'hyperbole donnée.

d. Les milieux des droites NN′, PP′ parcourent les droites

$$b^2 x + a^2 y = 0, \quad b^2 x - a^2 y = 0.$$

e. La droite IJ est normale à une hyperbole fixe.

f. Le milieu de la distance entre les milieux des droites de NN′ et PP′ décrit une hyperbole. (Barisien.)

Démonstration géométrique par MM. Canon, Emmerich et P. Bastin. Appelons D, E les projections de M sur les asymptotes, et L, L′ ses projections sur les axes de l'hyperbole, I le milieu de NP.

La tangente en M rencontre les asymptotes en deux points H, K tels que M est le milieu du segment HK. Par suite, les droites OD, OE, HK, OM ont les directions des rayons d'un faisceau harmonique, et il en est de même des droites MN, MP, NP, MI. Mais trois rayons du premier faisceau sont perpendiculaires à trois rayons du second; par conséquent MI est perpendiculaire à HK.

La circonférence de diamètre OM passe par les points L, L′, D, E. L et L′ sont les milieux des arcs soustendus par la corde DE de ce cercle; donc LL′ est perpendiculaire au milieu de DE et passe par le centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère NPDE, centre qui est en I.

Autre démonstration géométrique, par M. A. Claeys.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1401. Trouver une courbe telle que l'angle de deux tangentes quelconques soit proportionnel à l'angle des rayons vecteurs menés de l'origine aux points de contact de ces tangentes.

(St. N. Mirra.)

×**1402.** Résoudre en nombres entiers l'équation

$$\begin{vmatrix} 4(x+y) & 2(3xy-1) & 2(y-x) \\ 1-xy+5(x+y) & 10xy+x+y & 5(y-x) \\ 7(x+y) & 14xy+x-y & 1+xy+7(y-x) \end{vmatrix} = 0.$$

1403. Déterminer les trajectoires sous un angle quelconque d'une famille de courbes situées dans un même plan et déduites de l'une d'elles: 1° en lui imprimant un mouvement de translation de direction constante; 2° en la faisant tourner autour d'un point fixe; 3° en prenant son homothétique par rapport à un point fixe, le rapport d'homothétie étant variable.

Démontrer que chacun de ces familles de trajectoires jouit de la même propriété que la famille à laquelle elle correspond.

(A. Demoulin.)

1404. Soient P, P′ deux points donnés du plan d'une conique. Trouver le lieu du point d'intersection d'une droite quelconque δ menée par P avec la droite δ' qui joint P′ au pôle de δ par rapport à la conique.

Ce lieu est une conique. Interpréter géométriquement les conditions nécessaires pour que ce lieu soit une circonférence, une hyperbole équilatère ou une parabole. (A. Gob.)

×**1405.** Soient D, E, F les points de contact des côtés du triangle ABC avec les cercles exinscrits correspondants I_a, I_b, I_c. Le triangle DEF ne peut être isoscèle que lorsque le triangle ABC est lui-même isoscèle. Pour qu'il soit rectangle en D, on doit avoir

$$\cos A = \frac{r}{2R-r}. \qquad \text{(J. N.)}$$

1406. On joint le foyer F d'une conique à un point quelconque M de la courbe et, par l'autre foyer F′, on mène une parallèle à FM. Trouver le lieu du point de rencontre N de cette parallèle avec la tangente ou avec la normale au point M. (G. Andrieu.)

RELATIONS ENTRE DEUX SYSTEMES D'AXES

par C. SERVAIS, professeur à l'Université de Gand.

1. On a défini le signe de l'angle trièdre (XYZ) formé par les semi-droites X, Y, Z (*Mathesis* (3), II, p. 14). On désigne par $(l'_1 m'_1 n'_1)$, $(l'_2 m'_2 n'_2)$, $(l'_3 m'_3 n'_3)$ les coefficients de projection des semi-droites X, Y, Z, par rapport aux axes $x'y'z'$ formant un trièdre $(x'y'z')$ trirectangle et positif. Par définition, *le sinus de l'angle trièdre* (XYZ) *est égal en grandeur et en signe au déterminant*

$$\begin{vmatrix} l'_1 & m'_1 & n'_1 \\ l'_2 & m'_2 & n'_2 \\ l'_3 & m'_3 & n'_3 \end{vmatrix}$$

Il y a lieu d'établir que le sinus de l'angle (XYZ) est indépendant de la position du trièdre trirectangle positif $x'y'z'$, qui sert à le définir.

2. Soient xyz un troisième système d'axes quelconques, $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$, $(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$ les coefficients de projection de x, y, z par rapport à $x'y'z'$; $(l_1 m_1 n_1)$, $(l_2 m_2 n_2)$, $(l_3 m_3 n_3)$ ceux de XYZ par rapport à xyz. Les formules de transformation pour passer du système $x'y'z'$ au système xyz sont :

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \quad y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \quad z' = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,$$

par suite,

$$| l'_1 m'_2 n'_3 | = | \alpha_1\beta_2\gamma_3 | \, | l_1 m_2 n_3 |$$

Ainsi

$$| l_1 m_2 n_3 | = \frac{\sin (XYZ)}{\sin (xyz)}, \qquad (1)$$

3. Dans la détermination du volume d'un tétraèdre ABCD (*Mathesis*, ibid., p. 16), on suppose que le trièdre trirectangle positif auxiliaire XYZ est celui qui a servi à définir le sinus de l'angle solide.

Cela étant, on a encore pour la nouvelle définition du sinus :

$$(ABCD) = -\tfrac{1}{6} (1234) \sin (xyz). \qquad (2)$$

Cette formule montre que $\sin(xyz)$ est indépendant de la position du trièdre $(x'y'z')$.

4. On prend sur les semi-droites x, y, z respectivement les segments positifs OA, OB, OC égaux à l'unité. D'après la formule (2), on a :

$$\text{OABC} = \frac{1}{6} \sin (xyz).$$

Ainsi 1° *un angle solide* (xyz) *et son sinus sont toujours de même signe.* 2° *la valeur absolue de sin* (xyz) *est au plus égale à* 1.

5. Soient $(a_1b_1c_1)$, $(a_2b_2c_2)$, $(a_3b_3c_3)$ les cosinus des angles que les semi-droites X, Y, Z font avec x, y, z; on a :

$$| l'_1m'_2n'_3 | \alpha_1\beta_2\gamma_3 | = | a_1b_2c_3 |$$

par suite

$$| a_1b_2c_3 | = \sin (xyz) \sin (\text{XYZ}).$$

LA CONSTRUCTION DE NICOLLIC POUR LE PROBLÈME DE HALLEY,

par M. G. Fontené.

Problème. *Construire une conique connaissant un foyer* F *et trois points* A, B, C.

Halley a résolu ce problème (*Transactions philosophiques*, 1676) en cherchant le second foyer F′ par l'intersection de coniques ayant un foyer commun (*). La solution par la directrice a été donnée par De la Hire (*Sectiones conicae*, 1685), et légèrement modifiée par Newton (*Ph. nat. principia*, 1687).

Pour le cas où, l'excentricité étant très petite comme dans les orbites planétaires, la directrice est trop éloignée, Nicollic a donné une construction remarquable (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1746) :

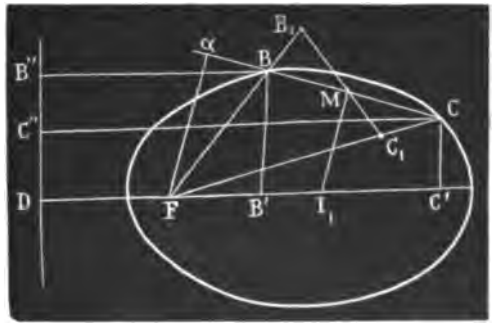
« De F comme centre, avec un rayon quelconque r, tracer une circonférence qui coupera les rayons vecteurs FA, FB, FC aux points a, b, c. Les milieux des cordes BC, CA, AB de la conique étant M, N, P, les droites FM, FN, FP rencontrent les cordes correspondantes du cercle aux points m, n, p; les perpendiculaires abaissées de ces points sur les

---

(*) On peut obtenir F′ comme centre d'un cercle tangent aux trois cercles de centres A, B, C qui passent en F; le problème se décompose ici en trois problèmes du premier degré, à cause du point commun F.

cordes correspondantes de la conique se coupent en un même point I qui appartient à l'axe focal, et l'on a $e = \frac{FI}{r}$. (Les points A, N, P a, b, c, m, n, p et le cercle de rayon r ne sont pas tracés sur la figure).

On obtient trois autres solutions en remplaçant l'un des points a, b, c par le point diamétralement opposé. »



M. Housel a donné de cette construction une démonstration assez compliquée (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1855). En voici une très-simple.

La figure donne

$$\overline{FC}^2 - \overline{FB}^2 = 2BC \times M\alpha,$$

ou

$$(FC - FB)(FC + FB) = 2B'C' \times FI_1;$$

à cause de

$$e = \frac{FC}{CC''} = \frac{FB}{BB''} = \frac{FC - FB}{B'C'},$$

on a donc

$$FI_1 = e\frac{FB + FC}{2}.$$

Menons par M la droite B_1C_1 perpendiculaire à la bissectrice de l'angle BFC; les triangles MB_1B, MC_1C donnent $BB_1 = CC_1$, et l'on a

$$FI_1 = e \times FC_1. \tag{1}$$

Le reste va de soi, par homothétie.

Remarques. I. On a

$$\frac{MC_1}{MB_1} = \frac{FB}{FC};$$

on peut donc écrire

$$\frac{mc}{mb} = \frac{FB}{FC},$$

et Nicollic définit le point m par cette propriété.

II. Nicollic observe encore que, si l'on prolonge cI jusqu'au cercle en c', on a, pour le second foyer F',

$$\frac{CF'}{CF} = \frac{Ic}{Ic'};$$

cela revient à démontrer que l'on a

$$\frac{2a}{CF} - 1 = \frac{\overline{I_1C_1}^2}{\overline{FC_1}^2 - \overline{FI_1}^2},$$

ou, en imitant ici le calcul de M. Housel,

$$\frac{2a}{CF} - 1 = \frac{1 + e^2 + 2e\cos\omega}{1 - e^2},$$

ω désignant l'angle DFC; cela donne

$$\frac{a}{CF} = \frac{1 + e\cos\omega}{1 - e^2}, \quad \text{ou} \quad CF = \frac{p}{1 + e\cos\omega},$$

résultat exact.

III. Le foyer F est un centre d'homologie pour la conique et le cercle de centre F'; on s'explique ainsi le rôle de ce cercle.

NOTES MATHÉMATIQUES.

2. *Sur les asymptotes des coniques*, par Ad. Mineur, professeur à l'Université de Bruxelles. 1° Définition. On dit que la droite AB est une asymptote de la branche de courbe CD quand, le point E s'éloignant indéfiniment sur CD, la distance EF de ce point à la droite AB a zéro pour limite.

2° Corollaire. Pour qu'une courbe ait une asymptote parallèle à l'axe des x, il faut et il suffit que l'ordonnée d'un point de cette courbe ait une limite finie et déterminée quand l'abscisse devient infinie.

3° Théorème. Pour que la conique

$$\gamma \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

ait une asymptote parallèle à l'axe des x, il est nécessaire et suffisant qu'on ait $a = 0$ et $h \neq 0$; lorsque ces conditions sont remplies, la conique γ est une hyperbole et l'équation de l'asymptote parallèle à l'axe des x est

$$hy + g = 0.$$

En effet, lorsque $a \neq 0$, l'équation (1) mise sous la forme

$$a + \frac{2hy + 2g}{x} + \frac{by^2 + 2fy + c}{x^2} = 0$$

montre que, pour $x = \infty$, y ne tend pas vers une limite finie et déterminée.

Au contraire, si $a = 0$ et $h \neq 0$, l'équation (1) peut s'écrire

$$hy + g + \frac{by^2 + 2fy + c}{2x} = 0$$

et pour $x = \pm\infty$, y a une limite finie et déterminée qu'on obtient à l'aide de

$$hy + g = 0.$$

Enfin, pour $a = h = 0$ et $g = 0$ ou $g = \neq 0$, y n'a pas une limite finie et déterminée quand x devient ∞.

4° Corollaire. L'ellipse et la parabole n'ont pas d'asymptote.

5° Théorème. Les asymptotes de l'hyperbole

$$\gamma \equiv \varphi(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

sont représentées par l'équation

$$\varphi'_x + \omega\varphi'_y = 0$$

dans laquelle ω est une racine de l'équation

$$a + 2h\omega + b\omega^2 = 0.$$

Faisons tourner les axes de coordonnées autour de l'origine; si (λ, μ), (λ', μ') sont les coefficients directeurs des nouveaux axes, les formules de transformation sont

$$x = \lambda X + \lambda' Y, \quad y = \mu X + \mu' Y. \qquad (1)$$

Donc, avec les nouveaux axes, γ a pour équation

$$X^2(a\lambda^2 + 2h\lambda\mu + b\mu^2) + 2X[\lambda(a\lambda'Y + h\mu'Y + g) + \mu(h\lambda'Y + b\mu'Y + f)] + \varphi(\lambda'Y, \mu'Y) = 0.$$

L'équation de l'asymptote parallèle à l'axe des X est donc

$$\lambda(a\lambda'Y + h\mu'Y + g) + \mu(h\lambda'Y + b\mu'Y + f) = 0 \qquad (2)$$

pourvu qu'on ait

$$a\lambda^2 + 2h\lambda\mu + b\mu^2 = 0. \qquad (3)$$

En tenant compte des relations (1) et (3), l'équation (2) se transforme en

$$\lambda(ax + hy + g) + \mu(hx + by + f) = 0.$$

Dès lors, en posant $\omega = \frac{\mu}{\lambda}$, les asymptotes de γ sont déterminées par les équations

$$\varphi'_x + \omega\varphi'_y = 0 \quad \text{et} \quad a + 2h\omega + b\omega^2 = 0.$$

6° Remarques. *a*) Le coefficient angulaire de chaque asymptote est la valeur de ω qui figure dans son équation.

b) Chaque asymptote coupe l'hyperbole en deux points rejetés à l'infini.

c) Lorsque la courbe γ est une ellipse, les droites déterminées par le théorème précédent sont des droites imaginaires conjuguées passant par le centre de la courbe.

Lorsque la courbe γ est une parabole proprement dite, ces droites sont rejetées à l'infini; et elles sont indéterminées, quand la parabole est décomposable.

8. *Sur la définition générale des asymptotes.* Si la distance MP d'un point M d'une courbe à une droite d a zéro pour limite lorsque M s'éloigne à l'infini sur la courbe, il en est de même de la distance oblique MQ = MP séc QMP, dans toute direction fixe, sauf si cette direction est celle de la droite d.

Mais la réciproque n'est pas vraie, quand on considère (comme on le fait en géométrie analytique et en géométrie synthétique générale) aussi bien les figures imaginaires que les figures réelles. Les distances perpendiculaires d'un point à une droite isotrope sont toujours infinies et

se confondent d'ailleurs avec les distances comptées parallèlement à ces droites, tandis qu'il n'en est pas de même des distances obliques.

Dans la définition générale des asymptotes, il semble donc préférable de considérer des distances obliques, l'angle MQP n'étant ni nul, ni droit. (P. M.)

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES(*).

1. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissensschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.

XIV^tes Heft. Leipzig, Teubner, 1902 (VIII-388 pp. in-8°, avec 113 figures dans le texte). Prix : 16 marcs.

Sommaire. A. A. Björno : Études sur la sphérique de Ménélaus, contributions à l'histoire de la sphérique et de la trigonométrie des Grecs. H. Suter. Additions et rectifications à son livre : *die Mathematiker und Astronomen der Araben und ihre Werke* (voir *Mathesis* 1901, p. 251). K. Bopp : Antoine Arnaud, le grand Arnaud, comme mathématicien.

2. Abhandlungen, etc. XV^tes Heft. Leipzig, Teubner, 1902 (VI-166 pp. in-8°, 76 fig. dans le texte. Prix : 8 marcs.

Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiscussion von Dr. Paul Sauerbeck, Professor am Gymnasium Reutlingen.

Sommaire. 1. Historique de la discussion des courbes : Descartes, Newton, Stirling, Maclaurin, Saurin, Maupertuis, Nicole, Clairaut, de Braguelongne, de Gua. 2. Procédés auxiliaires : résultante, discriminant, transformation linéaire, fonctions symétriques. 3. Théorie analytique des courbes d'après de Gua : diamètres, centres, asymptotes, points singuliers, etc. 4. Exercices divers d'après de Gua, particulièrement sur les cubiques. Appendice : notices biographiques sur les auteurs cités.

3 Traité de la résolution des Problèmes par l'abbé Gelin, etc. Extrait du *Traité d'Arithmétique élémentaire* du même auteur. Namur, Wesmael-Charlier. Paris, Retaux. Huy, chez l'auteur, Collège Saint Quirin, 1902 (In-8° de 114 pp.) Prix : 1 fr.

4. Recueil de Problèmes d'Arithmétique par l'abbé E. Gelin. Quatrième édition. Huy, Collège Saint-Quirin, 1902. (In-8° de 340 pages). Prix : 2 fr.

Nouvelle édition d'un recueil vraiment admirable dont nous avons parlé plusieurs fois dans *Mathesis*.

(*) **Nous signalons ici à nos lecteurs les ouvrages récents reçus par la direction de *Mathesis*, en nous réservant de revenir plus tard, s'il y a lieu, sur ceux qui rentrent plus spécialement dans notre programme.**

5. Theoretische Arithmetik von Dr. O. Stolz, Professor a. d. Universität Innsbruck und Dr. J. A. Gmeiner, a. o. Professor a. d. deutschen Universität Prag. II. Abtheilung. Die Lehren von den reellen und von den complexen Zahlen. Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte V-VIII, X, XI des I. und I, II, V des II. Theiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. Leipzig, Teubner, 1902 (XI-304 p. in-8; 19 fig. dans le texte). Prix : 7 marcs 20.

Sommaire. 5. Systèmes continus à une dimension de grandeurs absolues et relatives. 6. Théorie des proportions d'après Euclide. 7. Théorie des nombres irrationnels d'après G. Cantor et Méray. 8. Puissances réelles, racines, logarithmes. 9. Séries réelles. 10. Théorie analytique des imaginaires. 11. Théorie géométrique des imaginaires. 12. Puissances, racines et logarithmes imaginaires. 13. Séries imaginaires. — Index.

6. R. Bettazzi, Prof. nella R. Accademia militare, etc. Aritmetica razionale ad uso dei ginnasi. Torino, tipografia salesiana, 1902 (VIII-177 in-12). Prix : 2 lire.

7. Elementi di aritmetica ragionata e di algebra ad uso dell' istruzione secondaria per A. Capelli, Prof. ord. nella R. Universita di Napoli. Napoli, Pellerano, 1902 (XI-112 pp. in-12). Prix : 1,80 lira.

8. Aritmetica generale e algebra elementare di G. Peano, Professore nella R. Universita di Torino, 1902. Ditta G. B. Paravia et C., Torino, Roma, Firenze, Milano, Napoli. (VIII-144 p. in-8). Prix : 2,40.

Ce dernier manuel, extrêmement remarquable au point de vue logique, est écrit au moyen des symboles de la Logique mathématique et est extrait du *Formulaire mathématique* publié par l'auteur en collaboration avec plusieurs mathématiciens italiens.

9. Niedere Zahlentheorie von Prof. Dr. P. Bachmann zu Weimar. Erster Teil. Leipzig, Teubner, 1902 (X-402 pp. in-8°, cartonné). Prix : 14 marcs.

Sommaire. Introduction historique. 1. Le nombre entier et les opérations les plus simples. 2. Divisibilité. 3. Résidus et congruences. 4. L'algorithme d'Euclide, les fractions continues, etc. 5. Théorèmes de Fermat et de Wilson. 6. Théorie des résidus quadratiques. 7. Congruences supérieures.

10. Lehrbuch der Combinatorik von Dr. E. Netto. Leipzig, Teubner, 1901 (VIII-260 pp. in-8°, cartonné). Prix : 9 marcs.

Sommaire 1. Opérations combinatoires les plus usitées (permutations, combinaisons, arrangements, etc.). 2. Puissances d'un binome et d'un polynome. 3. Arrangements où tous les éléments ne peuvent pas prendre toutes les places (vers-protées, problèmes des huit reines, permutations où aucun élément ne peut être à sa place, etc.). 3. Inversions et séquences. 5. Cas où les opérations combinatoires portent sur des éléments de somme donnée. 6-7. Problèmes de partition d'Euler et ses applications à l'analyse. 8. Expressions combinatoires considérées comme produits. 9. Autres opérations combinatoires : division des polygones en triangles, etc. 10-11. Problème des trois éléments de Steiner et de Kirkman

(promenade des 15 jeunes filles). 12. Applications au calcul des probabilités, au calcul algébrique, à la théorie des déterminants, à l'invariantotogie. 13. Formules. Index.

Il a paru dans *Mathesis* maintes démonstrations relatives à la *Combinatorik* qui ne sont pas citées dans le livre annoncé ici, bien qu'il soit très riche en renseignements bibliographiques.

11. Dr. E. Bardey's Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage von F. Pietzker. Leipzig und Berlin, Teubner, 1903 (viii-160 p. in-12, cartonné). Prix : 2 marcs 60.

Opuscule méthodologique sur la mise en équation des problèmes. L'auteur, après quelques généralités, traite 133 problèmes classés comme il suit : 1. Nombres abstraits. 2. Concrets. 3. Problèmes divers. 4. Questions de mélange. 5. Problèmes de mouvement. 6. Progressions, art combinatoire, probabilités, trigonométrie. 8-9. Applications de formules ou de lois mécaniques, physiques, chimiques : centre de gravité, levier, moment d'inertie, chute des corps, mouvement des projectiles, principe d'Archimède, loi de Mariotte (Boyle), capacité de travail, acoustique, optique, calorimétrie, électricité, chimie.

12. Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. Aufgabe A : für Vollanstalten. Zweiter Teil : Trigonometrie. Leipzig und Berlin, Teubner, 1903 (vii-112 pp., une planche ; cartonné). Prix : 1 marc 60.

Questions innombrables de trigonométrie avec des tables, distribuées en dix chapitres. 1-2. Triangles rectangles. 3-4. Triangles quelconques. 5-6. Formules relatives à la somme de deux angles et applications. 7-8-9. Trigonométrie sphérique ; applications à la géographie mathématique et à l'astronomie. 10. Tables trigonométriques, géographiques, astronomiques. Index.

L'auteur fait usage de la division décimale du degré.

13. Cours d'algèbre supérieure, par J. Neuberg, Professeur à l'Université de Liège, membre de l'Académie royale de Belgique. Liège, Gnusé, 1903 (279 pp. in-8). Prix : 5 francs.

Sommaire. Introduction. 1. Imaginaires. 2-3. Déterminants ; équations linéaires. 4. Fonctions entières. 5. Principes sur les équations algébriques. 6. Transformation des équations. Limites des racines. 7. Théorème de Descartes. 8. Recherche des racines commensurables. 9. Solutions communes à deux équations. 10. Théorie des racines égales. 11. Théorème de Rolle. 12. Théorème de Sturm. 13. Équations réciproques. 14. Équations binômes. 15. Équations du 3e et du 4e degré. 16. Recherche des racines incommensurables. 17. Décomposition des fractions rationnelles. 18. Calcul des différences. 19. Fonctions symétriques. — A la suite de chaque chapitre d'excellentes notes et de bons exercices.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1268.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 104 et 226).

Si deux triangles ABC, A'B'C' *sont tels que les parallèles à* B'C', C'A', A'B' *menées respectivement par* A, B, C *concourent en un même point* D, *on sait que les parallèles à* BC, CA, AB *menées respectivement par* A', B', C' *concourent en un même point* D' (*Mathesis* (1), III, p. 86).

Si ces triangles sont homologiques, démontrer que l'axe d'homologie passe au milieu de la distance DD'. (FUHRMANN.)

Solution analytique par M. EMMERICH. En prenant l'axe d'homologie et une seconde droite quelconque pour axes coordonnés, les équations des côtés de deux triangles homologiques ABC, A'B'C' peuvent s'écrire

$$x + ay = l, \quad x + by = m, \quad x + cy = n;$$
$$x + a'y = l, \quad x + b'y = m, \quad x + c'y = n.$$

La parallèle à B'C' par le point A peut être représentée par l'équation

$$(x + by - m) = \alpha(x + cy - n),$$

sous la condition

$$\frac{1 - \alpha}{b - c\alpha} = \frac{1}{a'}, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{a' - b}{a' - c};$$

cette équation est donc

$$(x + by - m)(a' - c) = (x + cy - n)(a' - b). \qquad (1)$$

Ecrivons par analogie les équations des parallèles à C'A' par B et à A'B' par C; en les multipliant membre à membre, on trouve la condition pour que ces parallèles concourent :

$$(a' - c)(b' - a)(c' - b) = (a' - b)(b' - c)(c' - a)$$

ou

$$\Sigma aa'(b - c) + \Sigma aa'(b' - c') = 0. \qquad (2)$$

La symétrie de l'égalité (2) par rapport aux lettres (a, b, c), (a', b', c') démontre l'existence du point D'.

L'équation (1) peut s'écrire ainsi :

$$(b-c)x + a'(b-c)y = bn - cm + a'(m-n). \qquad (3)$$

En multipliant alors l'équation (3) et les deux autres analogues par a, b, c respectivement et en faisant la somme, nous trouvons l'équation

$$y\Sigma aa'(b-c) = \Sigma aa'(m-n),$$

qui détermine l'ordonnée de D. L'ordonnée de D' sera déterminée par

$$y'\Sigma aa'(b'-c') = \Sigma aa'(m-n).$$

En vertu de l'équation (2), on a $y' = -y$. Donc l'axe d'homologie passe par le milieu de DD'.

Solution par M. P. Bastin. Prenons ABC pour triangle de référence et appelons a, b, c les coordonnées barycentriques absolues de D. Les droites A'C', C'A', A'B', respectivement parallèles à AD, BD, CD auront pour équations

$$cy - bz + \alpha(x+y+z) = 0, \quad az - cx + \beta(x+y+z) = 0,$$
$$bx - ay + \gamma(x+y+z) = 0.$$

En résolvant les deux dernières équations et l'équation $x+y+z=1$, on trouve, eu égard à l'égalité $a+b+c=1$,

$$x = a + \beta - \gamma,$$

qui est l'équation de A'D' parallèle à BC. Par analogie, les équations des droites B'D', C'D' sont

$$y = b + \gamma - \alpha, \quad z = c + \alpha - \beta.$$

La somme $x+y+z$ de ces valeurs étant égale à 1, on voit que les parallèles menées par A', B', C' à AD, BD, CD concourent en un point D' ayant pour coordonnées ces mêmes valeurs.

Le milieu I du segment DD' a pour coordonnées

$$\tfrac{1}{2}(2a+\beta-\gamma), \quad \tfrac{1}{2}(2b+\gamma-\alpha), \quad \tfrac{1}{2}(2c+\alpha-\beta).$$

Or, les coordonnées des points A_1, B_1, C_1 où se coupent les côtés opposés des deux triangles ABC, A'B'C' sont

$$(0, b-\alpha, c+\alpha), \quad (a+\beta, 0, c-\beta), \quad a-\gamma, b+\gamma, 0).$$

La condition pour que ces points soient en ligne droite est

$$\begin{vmatrix} 0 & b-a & c+a \\ a+\beta & 0 & c-\beta \\ a-\gamma & b+\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on ajoute à la première ligne les deux autres, les éléments de la première deviennent les doubles des coordonnées de I; donc I est sur la droite B_1C_1.

Solution par M. Déprez. Le théorème de M. Fuhrmann est déjà connu dans un cas particulier, celui où les deux triangles ABC, A'B'C' sont orthohomologiques; en effet, d'après un théorème de M. Sondat (*Mathesis*, (2) V, pp. 265-268 et (2) VI, p. 81), l'axe d'homologie passe alors au milieu de la distance des orthocentres des deux triangles.

Or, on peut faire une projection cylindrique d'un triangle ABC et d'un point quelconque D de manière que la projection D_1 de D devienne l'orthocentre H_1 de la projection $A_1B_1C_1$ de ABC; donc etc.

Remarques. I. D'un théorème de M. Neuberg (*Mathesis*, (1) VI, p 116), on déduit, par projection :

Le centre d'homologie S de deux triangles homologiques métaparallèles ABC, A'B'C' appartient aux coniques circonscrites à ces triangles et ayant leurs centres respectivement aux points complémentaires des métapôles D, D', dans les mêmes triangles.

II. Les projections de S sur BC, CA, AB parallèlement à B'C', C'A', A'B' appartiennent à une même droite parallèle à l'axe d'homologie des deux triangles.

Les projections de S sur B'C', C'A', A'B' parallèlement à BC, CA, AB se trouvent sur une même droite parallèle à l'axe d'homologie.

(Déprez.)

Note. Étant donnés un triangle ABC et un point D de son plan, peut-on faire de cette figure une projection orthogonale $A_1B_1C_1$, D_1 telle que D_1 soit l'orthocentre de $A_1B_1C_1$?

Soient α, β, α_1, β_1 les points de rencontre des droites (BC, AD), (CA, BD), (B_1C_1, A_1D_1), (C_1A_1, B_1D_1). Comme on a

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\alpha_1 B_1}{\alpha_1 C_1}, \quad \frac{\beta C}{\beta A} = \frac{\beta_1 C_1}{\beta_1 A_1},$$

on peut construire un triangle $A_2B_2C_2$ semblable à $A_1B_1C_1$, et la question

est ramenée à projeter ABC suivant un triangle semblable à $A_2B_2C_2$. Si l'on donne au triangle $A_2B_2C_2$ pour base BC, il suffit de mener par β une parallèle à $A\alpha$ qui rencontre BC en m, d'élever en m une perpendiculaire à BC qui coupe en β_1 la circonférence décrite sur BC comme diamètre, enfin de mener la droite $C\beta_1$ qui coupe en A_1 la perpendiculaire élevée en α sur BC. La solution peut être imaginaire, mais alors on peut s'appuyer sur le principe de continuité pour démontrer la question 1368.

(J. N.)

Question 1399.

(Voir *Mathesis* (3); II, p. 240).

On considère les ellipsoïdes qui ont deux axes principaux communs en grandeur et en direction. Trouver le lieu des normales parallèles à une direction donnée. (G. ANDRIEN.)

Solution par M. CL. SERVAIS. 1. LEMME. *Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné* M *aux coniques d'un faisceau ayant un double contact, est une conique ou une droite.* (*)

Soient P, H, H′ le pôle et les points de contact; S_1 et S_2 les points de rencontre d'une courbe (C) du faisceau avec la polaire correspondante du point M; O le point (HH′, S_1S_2). Ce point O est fixe et la droite PM est sa polaire par rapport à (C). PM est donc une diagonale du quadrangle $HH'S_1S_2$. On sait que les deux triangles PHH′, MS_1S_2 formés chacun par deux tangentes à (C) et leur corde de contact sont inscrits dans une conique (Σ). La droite PM diagonale du quadrangle inscrit $HH'S_1S_2$ dans (Σ) est la polaire de O par rapport à cette conique. Cette courbe déterminée par les points H, H′, P, M et les tangentes OP, OM est le lieu des points S_1, S_2.

Si le point M est sur la tangente PH, l'un des points S_1, S_2, par exemple S_2 se confond avec H et le lieu de S_1 est la droite $H'S_1$ conjuguée harmonique de HH′ par rapport au couple H′M et H′P. Car si S′ est le second point de rencontre de la conique (C) avec la droite PS_1 on a $(S'S_1HH') = -1$; et par suite $S_1(S'S_1HH') = -1$.

(*) Dans le cas d'un faisceau quelconque, le lieu des points de contact des tangentes issues de M est une cubique. Ce lieu dégénère dans le cas du double contact, mais nous avons cru utile d'étudier directement ce cas spécial.

2. *Le lieu des normales de direction donnée, d'un système de quadriques* (S) *ayant une conique principale* (P) *commune est un cylindre hyperbolique ou un plan.*

Les plans tangents aux quadriques (S) normaux à la direction donnée coupent le plan π de la courbe (P) suivant un faisceau de droites parallèles conjuguées à un diamètre d de cette conique. Les projections des points de contact S_1 sur le plan π appartiennent à ce diamètre. Le plan mené par d perpendiculairement au plan π coupe les quadriques (S) suivant un faisceau de coniques ayant un double contact sur le diamètre d. Les tangentes à ces coniques aux points S_1 sont parallèles; autrement dit, elles passent par un point déterminé M à l'infini. Le lieu des points S_1 est donc une hyperbole (Σ) ou une droite p, selon que la conique (P) est du genre ellipse ou hyperbole, ou du genre parabole (lemme n° 1). Ce lemme permet de déterminer aisément l'hyperbole (Σ) ou la droite p.

Si la direction des normales est parallèle à un plan de symétrie π' distinct à π, le diamètre d est un axe de la conique principale (P); l'hyperbole (Σ) (ou la droite p) est dans le plan π' qui devient le lieu des normales.

Si la direction des normales est parallèle au plan π, il n'y a que une ou deux normales. Ce sont celles de la conique (P) parallèles à cette direction.

Solution analytique, par MM. Rose, Barisien et St. Mirea.

×QUESTIONS D'EXAMEN

1978. Les plans BAX et ABY sont perpendiculaires; les angles BAX et ABY sont droits; la longueur AB $= a$. Trouver un point M sur AX et un point N sur BY de telle sorte que la longueur MN $= l$ et que la somme AP + BQ des perpendiculaires menées de A et B sur MN $= h$. Discussion. (*Baccalauréat*, Clermont, 1901.)

Si AM $= x$, BN $= y$, les équations du problème sont

$$x^2 + y^2 = l^2 - a^2, \quad x\sqrt{a^2 + y^2} + y\sqrt{a^2 + x^2} = lh;$$

la seconde rendue rationnelle et simplifiée au moyen de la première se ramène à

$$x^2 y^2 = \frac{[l^2 h^2 - a^2 (l^2 - a^2)]^2}{4(a^2 + l^2 h^2)}, \text{ etc.}$$

1079. On donne un angle droit xOy et un point A sur la bissectrice de cet angle, et l'on considère un deuxième angle droit MAN qui tourne autour de son sommet A ; M est sur Ox, N sur Oy. Soit θ l'angle variable de la bissectrice AD de l'angle MAN avec la droite AO. 1° Exprimer en fonction de θ les longueurs OM, ON ; 2° Lieu de P, quatrième sommet du rectangle NOMP ; 3° Placer l'angle MAN de manière que la droite MN passe par un point donné B de OA. (*Bacc.*, Lille, 1901.)

1° Si $OA = a$, on trouve

$$OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}(1 - \operatorname{tg}\theta), \quad ON = \frac{a\sqrt{2}}{2}(1 + \operatorname{tg}\theta).$$

2° La somme $OM + ON$ étant constante, le lieu de P est la perpendiculaire à OA menée par A. 3° L'angle $BMA = 45°$.

1080. On considère deux cylindres droits à base circulaire ayant pour hauteurs l'un a, l'autre $2a$, et tels que la somme de leurs surfaces latérales $= 4\pi a^2$. Trouver le maximum et le minimum de la somme de leurs volumes, ainsi que les valeurs correspondantes de leurs rayons de base.

(*Bacc. lettres-math.*, Caen, 1901.)

1081. On donne une équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

admettant des racines x', x'' ; montrer qu'il y a une infinité de trinômes $x^2 + bx + c$ pour lesquels on a la relation

$$(x'^2 + bx' + c) + (x''^2 + bx'' + c) = 0.$$

2° On exprimera c en fonction des quantités b, p, q ; soit c_1 la valeur de c ainsi obtenue, dans laquelle b reste arbitraire.

3° Montrer que l'équation (1) admettant des racines (réelles), il en est de même pour l'équation

$$x^2 + bx + c_1 = 0. \tag{2}$$

4° On pose $p = 4$, $q = 3$ et l'on propose d'étudier les variations des racines de l'équation (2) quand b varie.

Construire la courbe qui représente ces variations en prenant b comme abscisse et les valeurs correspondantes de x_1, x_2 comme ordonnées.

5° Dans les mêmes conditions, étudier les variations de la fonction

$$y = \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}\right)^2;$$

déduire de cette étude les variations de la fraction

$$z = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}.$$

On construira les variations des fonctions y et z en prenant toujours la variable b comme abscisse (*Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles;* 7 juillet 1902, de 8 h. à midi).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1407. Chercher le lieu des centres des cercles de rayon constant et dont l'axe radical avec un cercle fixe passe par un point donné.

Trouver aussi l'enveloppe de ces cercles. (E. N. Barbier.)

1408. Soient M un point fixe d'une conique, P un point variable de cette courbe. La parallèle menée par P à la corde d'osculation en M rencontre la tangente au point M en un point Q. Trouver les positions de P pour lesquelles l'aire du triangle MPQ passe par un maximum ou par un minimum. (A. Gob.)

1409. Par le point de rebroussement O d'une cissoïde de Dioclès on mène deux cordes rectangulaires OA, OB. Chercher : 1° le lieu du point de rencontre des circonférences décrites sur OA et OB comme diamètres; 2° l'enveloppe de la droite AB. (G. Andrien.)

***1410.** Si la circonférence passant par les pieds des trois bissectrices intérieures d'un triangle ABC touche le côté BC, le triangle est isoscèle ou bien $a = 8p \cos^2 \frac{1}{2} A$.

La circonférence passant par le pied de la bissectrice intérieure de l'angle A et par les pieds des deux bissectrices extérieures des angles B et C ne touche le côté BC que si AB = AC. (J. Neuberg).

Rectifications. Page 36, ligne 8, lire $4p$, $4(p - a)$ au lieu de $2p$, $2(p - a)$. — La question 1372 a été résolue par M. Malengreau, la question 1383 par M. Bragard.

NOTE SUR QUELQUES SÉRIES,

par M. A. Boutin.

La simple remarque suivante permet de calculer la somme des termes de p en p d'un grand nombre de séries de Mac Laurin. Sur ce sujet, voir Catalan, *Sur la somme de certains coefficients binomiaux*, NAM, 1861, p. 260; E. Lucas, *Note sur les coefficients du binôme de Newton*, NAM, 1870, p. 308, et surtout Haton de la Goupillière, *Mémoire sur la sommation des dérivées et des intégrales d'une fonction quelconque* dans le *Journal de l'École Polytechnique*, t. 37, p. 97.

Soit

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

une série connue; et α une racine primitive de l'équation binôme $y^p - 1 = 0$, de telle sorte que toutes les racines de cette équation soient : α, α^2, α^3, $\cdots$, α^p. La somme de ces racines est nulle; la somme des puissances k de ces racines est nulle aussi, sauf si k est multiple de p.

Si dans la relation indiquée, on remplace successivement x par αx, $\alpha^2 x$, $\alpha^3 x$, ..., $\alpha^p x$, et qu'on ajoute les résultats obtenus, on aura

$$A_0 + A_p x^p + A_{2p} x^{2p} + A_{3p} x^{3p} + \cdots = \frac{1}{p}[f(x) + f(\alpha x) + \cdots + f(\alpha^{p-1} x)]$$

c'est la formule que nous avions en vue.

Le second membre ne contenant que des imaginaires conjuguées, ces imaginaires en disparaitront, et, après quelques transformations, il prendra une forme explicite réelle.

Exemples.

1°
$$y = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

Cette série comprend les termes de e^x pris de 3 en 3, à partir du premier. On trouve

$$y = \tfrac{1}{3}(e^x + e^{\alpha x} + e^{\alpha^2 x}),$$

α et α^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité.

En passant des exponentielles imaginaires aux fonctions trigonométriques, il vient

$$y = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

2°
$$y = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \cdots$$

Cette série comprend les termes de e^x pris de quatre en quatre à partir du premier. On trouve

$$y = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x} + e^{xi} + e^{-xi}) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x} + 2\cos x).$$

3° Soit à calculer la somme des coefficients, pris de p en p, à partir du premier, dans le développement de

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1})^m \qquad (m \text{ entier}).$$

On a, de suite,

$$S = \frac{1}{p}p^m = p^{m-1}.$$

4° Soit à calculer :

$$S = 1 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \frac{m(m-1)\cdots(m-5)}{6!} + \cdots,$$

somme des coefficients du binôme, pris de 3 en 3, à partir du premier (m entier). On a

$$3S = (1+x)^m + (1+\alpha x)^m + (1+\alpha^2 x)^m,$$

x devant être égalé à l'unité, et α, α^2 représentant les racines cubiques imaginaires de l'unité.

On trouve, tous calculs faits,

$$S_4 = \frac{1}{3}(2^m + 2\cos m.\,60°).$$

5° Soit S_4, S_5, les sommes des mêmes coefficients, pris de quatre en quatre, de cinq en cinq, à partir du premier (m entier). On trouvera par la même voie :

$$S_4 = 2^{m-2} + 2^{\frac{m-2}{2}}\cos m.\,45°,$$

$$S_5 = \frac{1}{5}(2^m + 2^{m+1}\cos^m 36°.\cos m.\,36° + 2^{m+1}\cos^m 72°\cos m.\,72°).$$

6° On a

$$(1+x)^n(1-x) = 1 + (n-1)x + \frac{(n-3)n}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(n-5)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(n-2p+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}x^p + \cdots$$

Soit à calculer la somme des coefficients de ce développement, de 3 en 3, à partir du premier terme (n entier). On a

$$S = \frac{1}{3}[(1+x)^n(1-x) + (1+\alpha x)^n(1-\alpha x) + (1+\alpha^2 x)^m(1-\alpha^2 x)]$$

où on fera $x = 1$, α et α^2 désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité.

On trouvera, tous calculs faits

$$S = \frac{\sin (m + 1)\, 60^\circ}{\sin 60^\circ};$$

cette somme n'a donc que les trois valeurs : 1, 0, — 1, qui se présentent en période symétrique de six termes.

7° Soit enfin,

$$y = \pm \frac{x^n}{n} - \frac{x^{2n}}{2n} \pm \frac{x^{3n}}{3n} - \frac{x^{4n}}{4n} \pm \cdots$$

qui comprend les termes de $l(1 + x)$ de n en n.

On trouve aisément

$$y = l \sqrt[n]{1 \pm x^n}.$$

On peut indéfiniment multiplier les exemples.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**4.** ***Prix académiques.*** Dans sa séance du 22 décembre 1902, l'Académie des Sciences de Paris a décerné deux des prix dont elle dispose, à deux anciens collaborateurs de ***Mathesis***.

M. Emile Lemoine a obtenu le prix Francœur (1000 fr.) (prix annuel décerné à l'auteur de travaux utiles au progrès des sciences mathématiques pures et appliquées).

M. Maurice d'Ocagne a obtenu, pour l'ensemble de ses travaux sur la Nomographie, le prix Poncelet (2000 fr.), prix destiné à récompenser l'ouvrage le plus utile aux progrès des sciences mathématiques pures et appliquées dans le cours des dix années qui ont précédé le jugement de l'Académie.

La Rédaction de ***Mathesis*** adresse aux deux lauréats ses chaleureuses félicitations pour ces distinctions si bien méritées. La note suivante est extraite de l'***Enseignement mathématique*** (janvier 1903, p. 64) :

« M. Lemoine fut le principal créateur de la géométrie du triangle et le créateur exclusif de la Géométrographie. Il s'est aussi occupé de certaines parties de la théorie des nombres et du calcul des probabilités. Avec M. Laisant, il fut le fondateur de l'Intermédiaire des Mathématiciens

et a donné un grand nombre d'articles aux journaux mathématiques les plus divers. Atteint depuis quelques années d'une maladie cruelle, il a le grand regret de ne pas pouvoir travailler autant qu'il le désire et de devoir se refuser à de nouvelles publications de ses idées, publications qu'on lui demande de tout côté et notamment de l'étranger. »

×5. *Deux théorèmes sur la droite d'Euler.* I. M. P. Zeeman Gz a énoncé dans les *Wiskundige Opgaven* (1899-1902, p. 305) le théorème suivant :

Si quatre droites a, b, c, d d'un plan sont telles que l'une d'elles est parallèle à la droite d'Euler du triangle des trois autres, cette propriété a encore lieu pour chacune des autres droites.

On peut rattacher cette proposition à une formule que nous avons proposée dans les *Wiskundige Opgaven* (1886-89, p. 372) et dont voici une démonstration très simple.

Soient H, G l'orthocentre et le centre de gravité du triangle ABC formé par les droites a, b, c, de sorte que la ligne HG est parallèle à d. On sait que la somme algébrique des perpendiculaires abaissées de A, B, C sur la droite GH est nulle; or, la perpendiculaire abaissée de $A = AH \sin(AH, HG) = 2R \cos A \cos(a, d)$, etc. Par suite

$$\cos(a, d)\cos(b, c) + \cos(b, d)\cos(c, a) + \cos(c, d)\cos(a, b) = 0. \quad (1)$$

Cette relation étant symétrique par rapport aux quatre directions a, b, c, d, le théorème de M. Zeeman est démontré.

Si α, β, γ, δ sont les angles des directions positives de a, b, c, d avec un axe quelconque X'X, l'équation (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \delta)\cos(\beta - \gamma) + \cos(\beta - \delta)\cos(\gamma - \alpha)\\ + \cos(\gamma - \delta)\cos(\alpha - \beta) = 0;\end{aligned} \quad (2)$$

on en déduit (Comparez la solution des *W. Opg.*, p. 305).

$$3(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\delta + 1) + \Sigma \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 0. \quad (3)$$

L'égalité (2) est à rapprocher de l'*identité :*

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \delta)\sin(\beta - \gamma) + \sin(\beta - \delta)\sin(\gamma - \alpha)\\ + \sin(\gamma - \delta)\sin(\alpha - \beta) = 0.\end{aligned} \quad (4)$$

En combinant par addition ou par soustraction les égalités (2) et (4) on trouve

$$\cos(\alpha - \delta - \beta + \gamma) + \cos(\beta - \delta - \gamma + \alpha) + \cos(\gamma - \delta - \alpha + \beta) = 0,$$
$$\cos(\alpha - \delta + \beta - \gamma) + \cos(\beta - \delta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma - \delta + \alpha - \beta) = 0,$$

résultats qui ne diffèrent pas essentiellement et qu'on peut énoncer ainsi : Dans le quadrilatère complet *abcd*, la somme des cosinus de la somme de deux angles opposés est nulle.

II. J. Casey, dans sa géométrie analytique, énonce (sans démonstration) le théorème suivant :

Quatre droites a, b, c, d, prises trois à trois, forment quatre triangles; soient (H_a, H_b, H_c, H_d) *les orthocentres,* (O_a, O_b, O_c, O_d) *les centres des cercles circonscrits,* (N_a, N_b, N_c, N_d) *les centres des cercles des neuf points de ces triangles. Les perpendiculaires* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, *élevées en* (N_a, N_b, N_c, N_d) *respectivement sur les droites* H_aO_a, H_bO_b, H_cO_c, H_dO_d *concourent en un même point* (Hervey).

La droite δ a pour équation en coordonnées normales par rapport au triangle ABC (Casey, p. 92) :

$$\alpha \sin 3A + \beta \sin 3B + \gamma \sin 3C = 0.$$

Le théorème de Hervey est-il susceptible d'une démonstration géométrique ou analytique assez simple?

Le point de concours des lignes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a-t-il une signification remarquable par rapport au quadrilatère *abcd*? (J. Neuberg).

×PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

par M. Lauvernay, ancien professeur.

Construire un quadrilatère ABA'B' *connaissant les quatre côtés* $AB = a$, $BA' = b$, $B'A' = a'$, $B'A = b'$ *et la somme* ω *des deux angles opposés* A, A' (Fig. 1).

Solution géométrique. Si l'on construit sur A'B' comme homologue de AB le quadrilatère A'B'A''B'' symétriquement semblable à ABA'B', on peut construire les triangles AB'A'', BA'B''; car l'angle $AB'A'' = B + B' = 360° - \omega$, l'angle (surobtus) $BA'B'' = \omega$ et les côtés

$$AB' = b', \quad B'A'' = \frac{ba'}{a}, \quad A'B'' = \frac{b'a'}{a}, \quad BA' = b.$$

Mais les angles (AB, A'B') et (A'B', A''B'') étant égaux, les droites AB et A''B'' sont parallèles; de plus, $A''B'' = \frac{a'^2}{a}$. Par suite, après avoir construit (séparément) les deux triangles AB'A'', BA'B'', on connaîtra les côtés du trapèze ABB''A''.

Remarque. Après avoir construit le triangle BA'B'', le point B' peut être déterminé au moyen de la circonférence décrite du centre A' avec le rayon a' et de la circonférence lieu des points dont les distances aux points B et B'' sont entre elles dans le rapport $a : a'$.

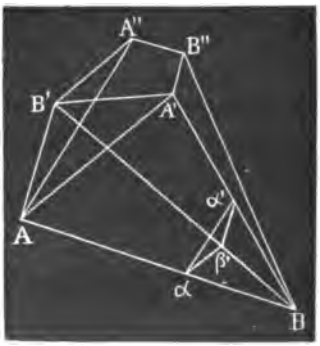


Fig. 1.

Fig. 2.

Cas du quadrilatère inscriptible (Fig. 2). Lorsque $\omega = 180°$, les droites B'A'', A'B'' coïncident avec les prolongements de AB' et BA', et le problème se ramène à construire un trapèze ABB''A'' ayant pour côtés

$$AB = a, \quad BB'' = b + \frac{b'a'}{a}, \quad B''A'' = \frac{a'^2}{a}, \quad AA'' = b' + \frac{ba'}{a}.$$

Calcul des diagonales. 1° On peut se proposer de calculer les diagonales $AA' = d$, $BB' = d'$ en fonction des côtés a, b, a', b' et de la somme $A + A' = \omega$.

Les triangles ABB', BA'B' donnent

$$d'^2 = a^2 + b'^2 - 2ab' \cos A, \quad d'^2 = a'^2 + b^2 - 2a'b \cos A'.$$

Tirons de là les valeurs de cos A, cos A' pour les substituer dans l'égalité

$$\cos^2 A + \cos^2 A' - 2 \cos A \cos A' \cos \omega = \sin^2 \omega,$$

qu'on déduit de $A + A' = \omega$; il vient

$$a'^2b^2 (a^2 + b'^2 - d'^2)^2 + a^2b'^2 (a'^2 + b^2 - d'^2)^2$$
$$- 2aa'bb' (a^2 + b'^2 - d'^2)(a'^2 + b'^2 - d'^2) \cos \omega = 4a^2a'^2b^2b'^2 \sin^2 \omega. \quad (1)$$

On a ainsi une équation du second degré en d'^2 dont les deux racines correspondent aux deux solutions du problème.

Par analogie,

$$a^2b^2 (a'^2 + b'^2 - d^2)^2 + a'^2b'^2 (a^2 + b^2 - d^2)^2$$
$$- 2aa'bb' (a^2 + b^2 - d^2)(a'^2 + b'^2 - d^2) \cos \omega = 4a^2a'^2b^2b'^2 \sin^2 \omega. \quad (2)$$

2° On peut aussi trouver deux équations qui renferment à la fois les deux inconnues. Une première équation est la relation connue

$$d^2d'^2 = a^2a'^2 + b^2b'^2 - 2aa'bb' \cos\omega, \qquad (3)$$

dont il n'est peut-être pas inutile d'indiquer ici une démonstration. Soient α, β', α' les points d'intersection de la circonférence circonscrite au triangle AB'A' avec les droites BA, BB', BA', et appelons P la puissance de B par rapport à cette circonférence. Les côtés du triangle $\alpha x'\beta'$ sont proportionnels aux produits aa', bb', dd' et l'angle surobtus $\alpha\beta'\alpha' = \omega$. En effet, des triangles semblables donnent :

$$\frac{\alpha\beta'}{AB'} = \frac{B\beta'}{BA} = \frac{B\beta'\cdot BB'}{BA\cdot BB'} = \frac{P}{ad'}, \quad \frac{\alpha x'}{AA'} = \frac{P}{ab},$$

d'où l'on tire : $\alpha\beta' : \alpha x' = bb' : dd'$, etc.; et les angles B'A'B, B'AB sont respectivement égaux aux angles $\alpha'\beta'$B, $\alpha\beta'$B.

Pour obtenir une seconde équation entre d et d', retranchons membre à membre les deux équations (1) et (2); il vient après quelques transformations faciles

$$(a^2 - a'^2)(b'^2 - b^2)(a^2a'^2 + b^2b'^2) + 2(d'^2 - d^2)[a^2a'^2(b^2 + b'^2) + b^2b'^2(a^2 + a'^2)] + d^4(a^2b^2 + a'^2b'^2) - d'^4(a^2b'^2 + a'^2b^2) = 2aa'bb' \cos\omega\,[(a^2 - a'^2)(b'^2 - b^2) + (d^2 - d'^2)(a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 - d^2 - d'^2)].$$

Remplaçons dans le premier terme $a^2a'^2 + b^2b'^2$ par $d^2d'^2 + 2aa'bb' \cos\omega$; le résultat devient divisible par $d^2 - d'^2$ et finalement

$$d'^2(a^2b'^2 + a'^2b^2) + d^2(a^2b^2 + a'^2b'^2) - 2a^2a'^2(b^2 + b'^2) - 2b^2b'^2(a^2 + a'^2) + 2aa'bb' \cos\omega\,(a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 - d^2 - d'^2) = 0.$$

Remarques I. Si l'on fait $\omega = 180°$, on retrouve les théorèmes de Ptolémée.

II. Si $\omega = 90°$, les dernières relations deviennent

$$d^2d'^2 = a^2a'^2 + b^2b'^2,$$

$$d'^2(a^2b'^2 + a'^2b^2) + d^2(a^2b^2 + a'^2b'^2) = 2a^2a'^2(b^2 + b'^2) + 2b^2b'^2(a^2 + a'^2).$$

III. Nous rappelons la formule remarquable de la surface du quadrilatère ABA'B' :

$$16S^2 + (a^2 + b'^2 - a'^2 - b^2)^2 = 4[a^2b'^2 + a^2b'^2 - 2aa'bb' \cos\omega],$$

qu'on obtient en faisant la somme des carrés des égalités

$$4S = 2ab' \sin A + 2a'b \sin A',$$

$$a^2 + b'^2 - a'^2 - b^2 = 2ab' \cos A - 2a'b \cos A'.$$

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE,

par M. J. Déprez, professeur à l'Athénée de Bruxelles.

I. Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 trois droites du plan d'un triangle ABC; on mène par un point M du plan, parallèlement à Δ_1, Δ_2, Δ_3 des droites qui rencontrent les côtés BC, CA, AB respectivemement en A_1, B_1, C_1.

Trouver le lieu du point M *tel que l'aire du triangle* $A_1B_1C_1$ *soit constante.*

Les parallèles à Δ_1, Δ_2, Δ_3 menées respectivement par A, B, C forment un triangle A'B'C'. Désignons les coordonnées normales absolues des points M, A', B', C' par

$$(x, y, z),\quad (x_1, y_1, z_1),\quad (x_2, y_2, z_2),\quad (x_3, y_3, z_3),$$

et soient

$$ax = \alpha,\quad by = \beta,\quad cz = \gamma,\quad ax_1 = \alpha_1,\quad \text{etc.}$$

On a

$$2T_1 = 2A_1B_1C_1 = MB_1 \cdot MC_1 \sin A' + MC_1 \cdot MA_1 \sin B' + MA_1 \cdot MB_1 \sin C',$$

$$MB_1 \cdot MC_1 \cdot \sin A' = \frac{yz \sin A'}{\sin(b, b') \sin(c, c')},$$

$$ax_1 + cz_1 = \alpha_1 + \gamma_1 = A'Bb \cdot \sin(b, b'),$$

$$ax_1 + by_1 = \alpha_1 + \beta_1 = A'Cc \cdot \sin(c, c').$$

D'où $$MB_1 \cdot MC_1 \sin A' = \frac{\alpha_1\beta\gamma}{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 + \gamma_1)};$$

par analogie,

$$MC_1 \cdot MA_1 \sin B' = \frac{\beta_2\alpha\gamma}{(\beta_2 + \alpha_2)(\beta_2 + \gamma_2)},$$

$$MA_1 \cdot MB_1 \sin C' = \frac{\gamma_3\alpha\beta}{(\gamma_3 + \alpha_3)(\gamma_3 + \beta_3)}.$$

Le lieu du point M est la conique ayant pour équation

$$(1)\quad \frac{\alpha_1\beta\gamma}{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 + \gamma_1)} + \frac{\beta_2\alpha\gamma}{(\beta_2 + \alpha_2)(\beta_2 + \gamma_2)} + \frac{\gamma_3\alpha\beta}{(\gamma_3 + \alpha_3)(\gamma_3 + \beta_3)} = 2T_1.$$

Si les points A_1, B_1, C_1 sont collinéaires, le lieu du point M est la conique

$$(2)\quad \frac{\alpha_1\beta\gamma}{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 + \gamma_1)} + \frac{\beta_2\alpha\gamma}{(\beta_2 + \alpha_2)(\beta_2 + \gamma_2)} + \frac{\gamma_3\alpha\beta}{(\gamma_3 + \alpha_3)(\gamma_3 + \beta_3)} = 0.$$

II. *Cas particuliers de la formule* (1).

1° Les droites B'C', C'A', A'B' concourent en un point N $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Le point M décrit alors la conique

$$\Sigma \alpha_0 (\beta_0 + \gamma_0) \beta\gamma = 2T_1 (\beta_0 + \gamma_0)(\gamma_0 + \alpha_0)(\alpha_0 + \beta_0).$$

2° Les points A', B', C' sont les algébriquement associés d'un point N $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$; le point M se déplace alors sur la conique

$$\Sigma \alpha_0 (\beta_0 - \gamma_0)(\beta_0 + \gamma_0 - \alpha_0)\beta\gamma = 4TT_1 (\beta_0 - \gamma_0)(\gamma_0 - \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0).$$

3° Si le triangle A'B'C' est l'antipodaire d'un point N (x_0, y_0, z_0) par rapport à ABC, le point M se meut sur la conique

$$\Sigma x_0 (y_0 \cos B - z_0 \cos C)\, yz$$
$$= \frac{2RT_1}{T} [y_0 \cos B - z_0 \cos C][z_0 \cos C - x_0 \cos A][x_0 \cos A - y_0 \cos B].$$

III. *Cas particuliers de la formule* (2).

1° Si le triangle A'B'C' se réduit au point N, le point M décrit la conique

$$\Sigma \alpha_0 (\beta_0 + \gamma_0)\beta\gamma = 0.$$

2° Si A', B', C' sont les algébriquement associés du point N, le point M se déplace sur la conique

$$\Sigma \alpha_0 (\beta_0 - \gamma_0)(\beta_0 + \gamma_0 - \alpha_0)\beta\gamma = 0.$$

3° Si A'B'C' est l'antipodaire de N par rapport à ABC, le point M se meut sur la conique :

$$\Sigma x_0 (y_0 \cos B - z_0 \cos C)\, yz = 0.$$

IV. Soient M, N deux points du plan du triangle ABC; par le point N $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, on mène des parallèles à AM, BM, CM, qui coupent BC, CA, AB en A_1, B_1, C_1.

Trouver le lieu du point M *tel que l'aire du triangle* $A_1B_1C_1$ *soit constante.*

Le point M décrit la cubique ayant pour équation :

$$\Sigma \beta_0\gamma_0\alpha (\beta + \gamma) = 2T_1 (\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta).$$

Si les points A_1, B_1, C_1 sont collinéaires, le point M se meut sur la conique

$$\Sigma \beta_0\gamma_0\alpha (\beta + \gamma) = 0.$$

La droite $A_1B_1C_1$ enveloppe une conique inscrite dans ABC et ayant pour centre le milieu de la distance de N à son complémentaire.

V. Les parallèles à $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, menées par le point M du plan ABC, coupent BC, CA, AB aux points A_1, A_2, A_3; B_3, B_1, B_2; C_2, C_3, C_1.

Trouver le lieu du point M *tel que l'aire* $A_2B_2C_2$ *ou* $A_3B_3C_3$ *soit constante.*

On a

$$2T_2 = A_2B_2C_2 = MB_2 \cdot MC_2 \sin A' + MC_2 \cdot MA_2 \sin B' + MA_2 \cdot MB_2 \sin C',$$

$$MB_2 \cdot MC_2 \sin A' = \frac{zx \sin A'}{\sin(c, b') \sin(a, c')},$$

$$z_1 = A'B \sin(c, b'); \quad x_1 = A'C \sin(a, c').$$

D'où

$$MB_2 \cdot MC_2 \sin A' = \frac{\alpha\gamma}{\gamma_1};$$

on a aussi

$$MC_2 \cdot MA_2 \sin B' = \frac{\alpha\beta}{\alpha_2}; \quad MA_2 MB_2 \sin C' = \frac{\beta\gamma}{\beta_3}.$$

Le lieu du point M tel que l'aire du triangle $A_2B_2C_2$ soit constante est la conique ayant pour équation

$$\frac{\beta\gamma}{\beta_3} + \frac{\gamma\alpha}{\gamma_1} + \frac{\alpha\beta}{\alpha_2} = 2T_2.$$

Le lieu de M tel que l'aire $A_3B_3C_3$ soit constante est la conique

$$\frac{\beta\gamma}{\gamma_2} + \frac{\gamma\alpha}{\alpha_3} + \frac{\alpha\beta}{\beta_1} = 2T_3.$$

Le lieu de M tel que $A_2B_2C_2 = A_3B_3C_3$ est la conique ayant pour équation

$$\beta\gamma\left[\frac{1}{\beta_3} - \frac{1}{\gamma_2}\right] + \gamma\alpha\left[\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\alpha_3}\right] + \alpha\beta\left[\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\beta_1}\right] = 0.$$

Si les points $A_2B_2C_2$, ou $A_3B_3C_3$ sont collinéaires, le point M se meut sur l'une des coniques

$$\frac{\beta\gamma}{\beta_3} + \frac{\alpha\gamma}{\gamma_1} + \frac{\alpha\beta}{\alpha_2} = 0,$$

$$\frac{\beta\gamma}{\gamma_2} + \frac{\alpha\gamma}{\alpha_3} + \frac{\alpha\beta}{\beta_1} = 0.$$

VI. *Cas particuliers.* 1° Si les parallèles à Δ_1, Δ_2, Δ_3, menées respectivement par A, B, C sont concourantes, le lieu de M tel que $A_2B_2C_2 = C^{te}$ est la conique

$$\frac{\beta\gamma}{\beta_0} + \frac{\alpha\gamma}{\gamma_0} + \frac{\alpha\beta}{\alpha_0} = 2\,T_2.$$

Le lieu de M tel que $A_3B_3C_3 = C^{te}$ est la conique

$$\frac{\beta\gamma}{\gamma_0} + \frac{\alpha\gamma}{\alpha_0} + \frac{\alpha\beta}{\beta_0} = 2\,T_3.$$

Si $A_2B_2C_2 = A_3B_3C_3$, le point M décrit la conique

$$\alpha_0(\beta_0 - \gamma_0)\beta\gamma + \beta_0(\gamma_0 - \alpha_0)\gamma\alpha + \gamma_0(\alpha_0 - \beta_0)\alpha\beta = 0.$$

Cette conique, circonscrite au triangle, passe par le centre de gravité de ABC et par le point $N(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

Pour tout point du plan ABC,

$$\frac{T_2 + T_3}{T_1} = \frac{(\beta_0 + \gamma_0)(\gamma_0 + \alpha_0)(\alpha_0 + \beta_0)}{\alpha_0\beta_0\gamma_0} = C^{te}.$$

Si le point N est placé au centre de gravité de ABC, on a, pour tout point du plan ABC,

$$4\,T_1 = T_2 = T_3.$$

2° Les parallèles à Δ_1, Δ_2, Δ_3 étant concourantes et les points A_2, B_2, C_2 étant collinéaires, le lieu de M est la conique

$$(\Gamma_2) : \frac{\beta\gamma}{\beta_0} + \frac{\alpha\gamma}{\gamma_0} + \frac{\alpha\beta}{\alpha_0} = 0;$$

le lieu de M, si A_3, B_3 C_3 sont collinéaires, est

$$(\Gamma_3) : \frac{\beta\gamma}{\gamma_0} + \frac{\alpha\gamma}{\alpha_0} + \frac{\alpha\beta}{\beta_0} = 0.$$

On a vu (cas particulier de la formule (2), I), que le lieu de M, si A_1, B_1, C_1 sont collinéaires, est

$$(\Gamma_1) : \Sigma\alpha_0(\beta_0 + \gamma_0)\beta\gamma = 0.$$

Les coniques (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3) passant par A, B, C et par un point P dont les coordonnées barycentriques sont :

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 - \beta_0\gamma_0} : \frac{\beta_0}{\beta_0^2 - \alpha_0\gamma_0} : \frac{\gamma_0}{\gamma_0^2 - \alpha_0\beta_0},$$

Par conséquent,

Si par le point P *on mène des parallèles aux droites qui unissent les*

point N $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ *aux sommets* A_0 B_0 C *du triangle et si l'on désigne les points de rencontre de ces parallèles avec* BC, CA, AB *par*

$$A_1, A_2, A_3; \quad B_1, B_2, B_3; \quad C_1, C_2, C_3;$$

les points A_1, B_1, C_1 *sont collinéaires, il en est de même de* A_2, B_2, C_2; *et de* A_3, B_3, C_3.

Si le point N est placé au centre de gravité de ABC et si le point M se meut sur l'ellipse de Steiner de ABC, les points A_1, B_1, C_1 sont collinéaires; il en est de même de A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3.

Les droites $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ se coupent sur l'ellipse de Steiner.

Le point de rencontre des droites $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, décrit une quartique; le point de section des droites $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$ décrit aussi une quartique.

Le cas où les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont perpendiculaires à BC, CA, AB a été traité par M. Neuberg (*Mathesis* (1) VI, p. 5).

VII. Soient ABC, A'B'C' deux triangles quelconques situés dans un même plan.

Quel est le lieu du point M *tel que les perpendiculaires menées de* A' *sur* AM, *de* B' *sur* BM, *de* C' *sur* CM *concourent en un même point* M'? *Trouver le lieu du point* M'.

Désignons par A_0, B_0, C_0 les points où se coupent respectivement les perpendiculaires abaissées de B sur A'B' et de C sur A'C', de C sur B'C' et de A sur A'B', de A sur A'C' et de B sur B'C'. Le lieu du point M est la conique passant par les points A, B, C, A_0, B_0, C_0 et ayant pour équation,

$$\frac{\sin A' \cos(a, a')}{x} + \frac{\sin B' \cos(b, b')}{y} + \frac{\sin C' \cos(c, c')}{z} = 0.$$

Les perpendiculaires abaissées de M sur B'C', C'A', A'B' coupent respectivement BC, CA, AB en trois points collinéaires.

Il suffit d'intervertir les rôles des deux triangles ABC, A'B'C' pour avoir le lieu de M'.

Si les droites AM et A'M', BM et B'M', CM et C'M' doivent être parallèles, on trouve pour les lieux des points M, M' deux coniques qui ont été étudiées par M. Lemoine (J. M. S., 1889, p. 35).

BIBLIOGRAPHIE.

Prof. C. Alasia. **Saggio terminologico-bibliografico sulla recente geometria del triangulo.** Bergama, Fr. Bolis, 1902 (IV-43 pp. in-8°).

L'auteur s'est proposé de publier un vocabulaire alphabétique de la géométrie du triangle. Une telle entreprise, si elle est bien exécutée, ne peut que rencontrer l'adhésion de tous les amis de cette branche des mathématiques. Elle doit renseigner le lecteur sur la signification précise de chaque terme et lui donner les indications bibliographiques nécessaires pour remonter aux sources ou consulter les meilleurs écrits sur la matière.

Il faut espérer qu'une nouvelle édition permettra au professeur Alasia de corriger les imperfections de son premier essai en améliorant certaines définitions, en comblant les lacunes et en apportant une exactitude plus grande dans la bibliographie de manière que le *cuique suum* soit mieux respecté.

A la page 1, à côté de sa propre géométrie du triangle les ouvrages de Fuhrmann, Emmerich, Casey, Vigarié, Rouché et de Comberousse, Lieber, etc. auraient mérité d'être mentionnés. Les articles « Affinité, annexes, quadrilatères (et polyèdres) harmoniques, centre des parallèles égales, centre isogone, tétraèdre isogone, triangle métaharmonique, cercle orthocentroïdal, triangles parallélogiques, quadrilatère complet, coniques de Simson, etc. laissent à désirer. Nous avons remarqué l'absence des triangles automédians, des triangles pseudo-isoscèles, des centres des transversales angulaires égales, des quadrangles métapolaires, de la transformation par inversion, symétrique, etc.

Malgré ces lacunes, dont la plupart sont inévitables dans une première édition, le *Saggio* de M. Alasia rendra déjà beaucoup de services aux amateurs de géométrie récente.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1216.

(Voir *Mathesis*, (3), t. I, p. 112.)

Par les sommets d'un tétraèdre ABCD ***on mène quatre parallèles*** AA', BB', CC', DD' ***limitées aux faces opposées. Trouver un plan*** π ***qui divise ces droites dans un même rapport.***

Généralisation si les droites AA', BB', CC', DD' ***passent par un même point.*** (J. Neuberg.)

Solution géométrique par M. Emmerich. Soient α, β, γ, δ quatre points qui divisent les parallèles AA', BB', CC', DD' dans un même rapport. Menons les droites BA', CA', DA', qui rencontrent CD, DB, BC respec-

tivement en B_1, C_1, D_1, et joignons B_1 à β. A_2 étant le point de rencontre de $B_1\beta$ et AA′, on a

$$A\alpha : AA' = B\beta : BB' = A'A_2 : A'A,$$

donc $A'A_2 = A\alpha = a'$. Il s'ensuit que les droites $C_1\gamma$, $D_1\delta$ passent également par A_2, isotomique de α par rapport à AA′. Désignons maintenant les coordonnées barycentriques du point A′ par rapport au triangle BCD par b, c, d, et posons $b + c + d = s$, $B\beta = b'$, $C\gamma = c'$, $D\delta = d'$, $A'\alpha = a''$. On tire, de triangles semblables,

$$b' : a' = s : b, \quad c' : a' = s : c, \quad d' : a' = s : d.$$

Menons alors $D_1\delta_1 = d'_1$ parallèle à A′A jusqu'à la rencontre avec $\beta\gamma$. Si la condition du problème est remplie, $\delta\delta_1$ coupe AA′ en α. Or, les trapèzes $B\beta\gamma C$, $D\delta\delta_1 D_1$ donnent

$$d'_1 (b + c) = bb' + cc',$$
$$a''s = d'_1 (b + c) + dd'.$$

On a donc

$$a''s = bb' + cc' + dd' = 3a's,$$
$$a'' = 3a'$$

ce qui montre que les points α, β, γ, δ répondant à la question divisent AA′, BB′, CC′, DD′ dans le rapport 1 : 3.

Solution analytique. Si x, y, z, u désignent les coordonnées barycentriques d'un point P du plan de l'infini $x + y + z + u = 0$, la droite AP perce BCD au point A′ $(0, y, z, u)$. Si le point A_2 divise AA′ de sorte que $AA_2 : A_2A' = \lambda$, les coordonnées de A_2 seront μx, νy, νz, νu avec la condition

$$\frac{\mu x}{\nu (y + z + u)} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{d'où} \quad \frac{-\mu}{\nu} = \frac{1}{\lambda},$$

ou encore

$$-x, \lambda y, \lambda z, \lambda u.$$

L'existence d'un plan π contenant les points A_2, B_2, C_2, D_2 qui divisent AA′, BB′, CC′, DD′ dans le rapport $\lambda : 1$ dépend ainsi de l'équation

$$\begin{vmatrix} -x & \lambda y & \lambda z & \lambda u \\ \lambda x & -y & \lambda z & \lambda u \\ \lambda x & \lambda y & -z & \lambda u \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z & -u \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est visiblement satisfaite par $\lambda = \frac{1}{3}$ ce qui s'accorde

avec notre solution ci-dessus. Il y a encore la solution $\lambda = -1$ qui identifie le plan π au plan de l'infini.

L'équation du plan π passant par les points

$A_2(-3x, y, z, u)$, $B_2(x, -3y, z, u)$, $C_2(x, y, -3z, u)$, $D_2(x, y, z, -3u)$

est

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}+\frac{U}{u}=0.$$

C'est donc le plan polaire d'un point à l'infini par rapport au tétraèdre donné.

L'enveloppe du plan π est la surface du 4me ordre

$$\sqrt{X}+\sqrt{Y}+\sqrt{Z}+\sqrt{U}=0,$$

ou sous forme développée

$$(\Sigma X^2 - 2\Sigma XY)^2 = 64XYZU.$$

Cette surface passe au barycentre, puis aux points (9, 1, 1, 1), ··· divisant les médianes du tétraèdre dans le rapport 1 : 3; elle coupe les faces du tétraèdre en leurs ellipses de Steiner qui touchent les arêtes en leurs milieux.

Si le point P est quelconque, la question analogue se traite comme cas spécial du n° 1380.

MM. Soons, Déprez, Rose et Bastin ont résolu la même question.

Question 1376.

(Voir *Mathesis* (3), II, p. 152 et 256.)

Soit AB *un diamètre fixe d'une circonférence* O. *D'un point quelconque* P *de cette courbe, comme centre, on décrit une circonférence qui touche la droite* AB. *Trouver le lieu des points de rencontre de la circonférence* P *avec la droite* OP. (V. Retali).

Généralisation par M. Deprez. Prenons pour AB une droite quelconque du plan du cercle O, et soient : C la projection de P et D celle de O sur AB, E et F les extrémités du diamètre OD du cercle donné O, L et L′ celles du diamètre OP du cercle (P, PC), I le point de rencontre de AB avec la tangente en L au dernier cercle.

La droite IP étant la bissectrice de l'angle CPL, forme avec EF et OP

un triangle isoscèle; par suite, elle passe par le point E (ou par F). Il en résulte que la droite IL enveloppe la circonférence (E, ED); le point L décrit donc la podaire de O par rapport à cette circonférence. Semblablement le point L′ parcourt la podaire de O par rapport au cercle (F, FD).

Si AB est un diamètre, les points L, L′ décrivent deux cardioïdes égales, podaires des points O par rapport aux cercles (E, EO), F, FO).

Si AB touche le cercle O en E, le lieu des points L, L′ se compose de la circonférence (OE) et d'un limaçon de Pascal.

Remarques. 1° Le centre O_1 du cercle circonscrit au triangle PLC décrit la podaire du point E par rapport à la parabole ayant pour foyer O et pour sommet le milieu de FD.

Le point de ce cercle diamétralement opposé à C parcourt une cubique d'Agnesi.

2° Si de chaque point P de la circonférence O, on décrit une circonférence qui touche une seconde circonférence donnée O_1, le lieu des extrémités du diamètre OP de la circonférence a pour équation :

$$\rho = r \pm r_1 \pm \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\omega}.$$

MM. P. Bastin et E. N. Barisien ont résolu la même question.

Question 1281.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 184.)

Trouver le lieu du centre d'un cercle tangent à la fois à une conique donnée et à l'un de ses axes. Cas où la conique est 1° *une parabole,* 2° *un cercle.* (E. N. Barisien.)

Solution par M. P. Thonet. Soit une ellipse rapportée à ses axes :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ;$$

et soit (α, β) le centre I d'un cercle tangent à la courbe en M et à l'axe Ox; la longueur d'une des normales menées de I à la courbe est égale à l'ordonnée β. La normale au point M (x, y) de l'ellipse a pour équation :

$$\frac{Y - y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{X - x}{\frac{x}{a^2}}.$$

Exprimons qu'elle passe par I et soit λ la valeur commune des deux rapports; nous aurons

$$\beta - y = \frac{\lambda y}{b^2}; \quad \alpha - x = \lambda \frac{x}{a^2},$$

d'où

$$y = \frac{b^2\beta}{b^2 + \lambda}, \quad x = \frac{a^2\alpha}{a^2 + \lambda}.$$

En écrivant que M est sur l'ellipse, on obtient

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2 + \lambda)^2} = 1. \tag{1}$$

La distance des points (α, β) et (x, y) étant égale à β, on a aussi

$$\frac{\lambda^2\alpha^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{\lambda^2\beta^2}{(b^2 + \lambda)^2} = \beta^2. \tag{2}$$

Pour avoir l'équation du lieu, il faudrait éliminer λ entre (1) et (2), mais il est plus facile d'exprimer α et β en fonction de λ. On trouve

$$\beta^2 = \frac{\lambda^2 (b^2 + \lambda)^2}{b^2 [(a^2 + \lambda)^2 - a^2c^2]}, \quad \alpha^2 = \frac{(b^2 + 2\lambda)(a^2 + \lambda)^2}{(a^2 + \lambda)^2 - a^2c^2}.$$

Ce sont les équations paramétriques du lieu.

Pour l'hyperbole, on remplacerait b^2 par $-b^2$. Pour la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet, on applique la même méthode; on trouve

$$\frac{\beta - y}{y} = \frac{\alpha - x}{-p} = \lambda.$$

On tire de là x et y qu'on substitue dans l'équation $y^2 - 2px = 0$, ce qui donne

$$\frac{\beta^2}{(1 + \lambda)^2} - 2p(\alpha + p\lambda) = 0. \tag{3}$$

De plus la distance des points (α, β) et (x, y) étant β, on a

$$p^2\lambda^2 + \frac{\lambda^2\beta^2}{(1 + \lambda)^2} = \beta^2. \tag{4}$$

Des relations (3) et (4) on déduit

$$\beta^2 = \frac{p^2\lambda^2(1 + \lambda)^2}{1 + 2\lambda}, \quad \alpha = -\frac{\lambda(2p + 3\lambda)}{2(1 + 2\lambda)}.$$

Pour le cercle $x^2+y^2=a^2$, on fera $a=b$ dans (1) et on trouve

$$\beta=\frac{\lambda}{a},\quad \alpha^2=a^2+2\lambda;$$

le lieu est la parabole $x^2=a^2+2ay$.

M. Rose a résolu la même question en exprimant le contact du cercle avec la conique au moyen de la relation entre les invariants fondamentaux des équations des deux courbes :

$$(\Theta\Theta'-9\Delta\Delta')^2=4(\Theta^3-3\Theta'\Delta)(\Theta'^2-3\Theta\Delta').$$

Autre solution par M. Malengreau.

Le cas du cercle peut se traiter par la géométrie. En effet, si un cercle de centre I touche une circonférence donnée O en M et un diamètre OX de celle-ci en P, on a IM = IP. Menons la tangente au cercle O parallèle à OX et située du même côté que I; il est facile de voir que IO est égale à la distance de I à cette tangente.

Question 1882.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 184).

On donne deux trièdres SABC, S'A'B'C'. *Trouver l'enveloppe d'un plan* δ *qui les coupe suivant deux triangles homologiques* ABC, A'B'C', *ainsi que le lieu du centre d'homologie.* (J. Neuberg).

Solution par M. Stuyvaert. Appelons M le centre d'homologie, intersection des droites AA', BB', CC'; A_1, B_1, C_1, les intersections des côtés homologues (BC, B'C'), (CA, C'A'), (AB, A'B'); m l'axe d'homologie $A_1B_1C_1$; n, n' les droites SM, S'M; a, b, c, a', b', c' les arêtes et α, β, γ, α', β', γ' les faces des deux trièdres donnés.

Les plans Aa', Bb', Cc' ont la droite commune n'. Réciproquement, si trois points A, B, C pris sur les arêtes a, b, c sont tels que les plans Aa' Bb', Cc' aient une droite commune n', le plan ABC rencontre a', b', c' en trois points A', B', C', sommets d'un triangle homologique avec ABC; le centre d'homologie est le point de rencontre de n' avec le plan ABC.

Les deux points A, B déterminent la droite n' et par suite le point C; les points A, B, C décrivent donc une homographie du troisième ordre et du second rang, et l'on peut conjecturer que le plan δ enveloppe une surface dont la classe est au maximum 3, mais peut s'abaisser à cause du point S commun aux supports a, b, c des trois ponctuelles (A), (B), (C).

Ce premier aperçu nous servira de guide dans le développement analytique.

1. Prenons a, b, c comme axes coordonnés, et soient

$$\begin{aligned}
\lambda &\equiv l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 + 1 = 0,\\
\mu &\equiv m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + 1 = 0,\\
\nu &\equiv n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + 1 = 0,\\
\delta &\equiv \delta_1x_1 + \delta_2x_2 + \delta_3x_3 + 1 = 0,
\end{aligned}$$

les équations des plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Les coordonnées de A étant $-\frac{1}{\delta_1}$, O, O, on trouve facilement, pour l'équation du plan Aa',

$$\mu(\delta_1 - n_1) = \nu(\delta_1 - m_1). \qquad (1)$$

Par analogie, les plans Bb', Cc' ont pour équations :

$$\nu(\delta_2 - l_2) = \lambda(\delta_2 - n_2), \quad \lambda(\delta_3 - m_3) = \mu(\delta_3 - l_3). \qquad (2)$$

En multipliant les équations (1) et (2) membre à membre, on obtient la condition nécessaire pour que les plans Aa', Bb', Cc' se coupent suivant une même droite :

$$(\delta_1 - n_1)(\delta_2 - l_2)(\delta_3 - m_3) = (\delta_1 - m_1)(\delta_2 - n_2)(\delta_3 - l_3). \qquad (3)$$

Telle est aussi l'équation de l'enveloppe du plan δ en coordonnées tangentielles $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Elle est du second degré et sa forme révèle immédiatement six droites appartenant à la surface, savoir :

$$\left\{\begin{aligned}\delta_1 &= n_1,\\ \delta_2 &= n_2;\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned}\delta_2 &= l_2,\\ \delta_3 &= l_3;\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned}\delta_3 &= m_3,\\ \delta_1 &= m_1;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\delta_2 &= l_2,\\ \delta_1 &= m_1\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned}\delta_3 &= m_3,\\ \delta_2 &= n_2;\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned}\delta_1 &= n_1,\\ \delta_3 &= l_3;\end{aligned}\right.$$

les trois premières droites sont les intersections des plans γ et γ', α et α', β et β', lignes que nous désignerons dans la suite par c_1, a_1, b_1; les trois autres s'appuient à la fois sur a_1, b_1, c_1. *L'enveloppe cherchée est donc l'hyperboloïde ayant pour génératrices d'un même système les intersections des faces correspondantes des deux trièdres.*

2. Le centre d'homologie M vérifie les équations (1), (2) et $\delta = 0$. En éliminant entre ces égalités les quantités $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ on trouve pour le lieu de M :

$$\begin{aligned}
&x_1(\mu n_1 - \nu m_1)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu) + x_2(\nu l_2 - \lambda n_2)(\lambda - \mu)\mu - \nu)\\
&+ x_3(\lambda m_3 - \mu l_3)(\mu - \nu)(\nu - \lambda) = (\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu). \qquad (4).
\end{aligned}$$

Ce lieu est une surface du quatrième ordre F_4, ayant les points S, S'

pour points triples et la droite SS′ pour droite double. Car l'hypothèse $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ annule trois facteurs de chaque terme de l'équation, et il en est de même de $\lambda = \mu = \nu = 0$; de plus les hypothèses $\lambda - \mu = 0$, $\nu - \lambda = 0$, qui définissent la droite SS′, annulent au moins deux facteurs de chaque terme du premier membre de (4) et trois du second membre. On vérifie encore facilemant que F_4 contient les droites a_1, b_1, c_1; en effet, si l'on fait par exemple $x_1 = 0$, $\lambda = 0$, l'équation (4) se réduit, après suppression du facteur $(\mu - \nu)\,\mu\nu$, à

$$l_2 x_2 + l_3 x_3 + 1 = 0.$$

La section de F_4 par un plan quelconque contenant la droite SS′ comprend cette droite comptée double et se complète donc par une conique passant par S et S′ et rencontrant les droites a_1, b_1, c_1.

J'ai rencontré cette surface dans un travail récent (*Etude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du deuxième et du troisième ordre*, Gand, Hoste, 1902); les points S, S′ et les directrices a_1, b_1, c_1 suffisent évidemment à la déterminer. La question 1382 conduit donc à la propriété suivante :

La surface F_4 *engendrée par une conique passant par deux points fixes* S, S′ *et s'appuyant sur trois droites fixes* a_1, b_1, c_1 *est le lieu des centres d'homologie des triangles homologiques qui peuvent être placés sur les deux trièdres obtenus en projetant les droites* a_1, b_1, c_1 *à partir des points* S, S′. Si S et S′ se trouvent sur l'hyperboloïde défini par les droites a_1 b_1 c_1, F_4 se réduit à cet hyperboloïde.

3. Nous allons maintenant établir les résultats précédents par la géométrie.

Les points A_1, B_1, C_1 appartiennent évidemment aux intersections a_1, b_1, c_1 des couples de plans $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$; par conséquent, *l'axe d'homologie* m *est une génératrice quelconque du système réglé* $a_1 b_1 c_1$. De plus, tout plan δ mené par une génératrice m de ce système coupe les trièdres S, S′ suivant deux triangles homologiques. Donc *les plans* δ *sont les plans tangents de cet hyperboloïde.*

Cherchons le lieu du centre d'homologie lorsque le plan δ tourne autour du même axe d'homologie m. La droite AA′ est une génératrice du système réglé (maa'), et la droite BB′ une génératrice du système réglé (mbb'); il en résulte que leur point de concours M engendre la cubique gauche intersection de deux hyperboloïdes ayant une directrice commune m. Cette cubique passe évidemment par les points S, S′.

4. Si l'on se donne la droite s', les plans $s'a'$, $s'b'$, $s'c'$ rencontreront a, b, c aux sommets A, B, C d'un triangle qui est homologique avec la section du trièdre S' par le plan ABC; le centre d'homologie M est sur la droite s'.

Faisons tourner la droite s' autour de S' dans un même plan π mené par la droite SS'. Les plans $s'a'$, $s'b'$, $s'c'$ engendreront trois faisceaux qui sont projectifs avec le faisceau (s') et détermineront sur a, b, c trois ponctuelles projectives (A), (B), (C) qui sont même perspectives à cause de l'élément uni S. Par suite, le plan ABC tourne autour d'une droite fixe s, qui est une directrice du système réglé $a_1b_1c_1$ puisqu'elle rencontre les axes d'homologie de tous les couples de triangles homologiques que l'on vient de considérer, axes qui s'appuient sur a_1, b_1, c_1. En renversant les rôles des trièdres S, S' on voit que les droites SM, S'M se correspondent maintenant dans deux faisceaux projectifs avec le faisceau des plans ABC; il en résulte que le point M décrit une conique Σ passant par S et S'.

Soit A_2 le point de rencontre du plan avec la droite a_1. Si l'on prend pour s'_2 la droite $S'A_2$, les droites BC, B'C' coïncident avec a_1 et M se confond avec A_2; donc Σ s'appuie sur a_1. On verrait de même que cette courbe s'appuie sur b_1 et c_1.

Généralisation. La question 1382 peut être généralisée ainsi. Etant donnés trois couples de droites aa', bb', cc' qui n'ont pas de point commun, on considère un plan δ qui les coupe aux points A, A', B, B', C, C'. Trouver l'enveloppe de δ lorsque les triangles ABC, A'B'C' sont homologiques, et le lieu des centres d'homologie.

Ou encore : *Trouver le lieu d'un point* M *tel que les droites menées par* M *et s'appuyant respectivement sur les couples* aa', bb', cc' *soient dans un même plan; trouver également l'enveloppe de ce plan.*

Le lieu est encore de quatrième ordre; le plan enveloppe une surface de la quatrième classe.

Ces deux figures mériteraient peut-être une étude plus approfondie.

En même temps que la question 1382 dans *Mathesis*, nous avons proposé dans les *Wiskundige Opgaven*, la généralisation dont vient de parler M. Stuyvaert. Nous publierons prochainement nos recherches sur ce sujet. (J. N.)

×Question 1293.

(Voir *Mathesis* (3), II, p. 280).

Résoudre en nombres rationnels l'équation

$$3xy = x^2y^2 + x + y.$$

Solution par M. G. Verheugen. Résolvant par rapport y, on a

$$y = \frac{-(1-3x) \pm (1-x)\sqrt{1-4x}}{2x^2}.$$

Posons

$$1 - 4x = n^2,$$

n étant rationnel; alors

$$x = \frac{1-n^2}{4}$$

et

$$y = \frac{-2(n+1)}{(n-1)^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2},$$

ces deux racines ne différant que par le signe de n, toutes les solutions en nombres rationnels seront données par le système

$$x = \frac{1-n^2}{4}, \quad y = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2},$$

n étant un nombre rationnel quelconque.

Autrement. On peut évidemment vérifier l'équation en posant $x = 1$, $y = 1$. Si l'on fait $x = 1 + X$, $y = 1 + Y$, elle devient

$$(XY + X + Y)^2 = XY$$

d'où

$$XY + X + Y = \sqrt{XY}.$$

On doit donc avoir XY égal à un carré et, par suite, il faut faire $Y = t^2X$, t étant rationnel. On trouve ainsi

$$t^2X^2 + X + t^2X = tX$$

d'où $X = 0$, solution connue, puis

$$X = \frac{t - t^2 - 1}{t^2}, \quad x = \frac{t-1}{t^2},$$

$$Y = t - t^2 - 1, \quad y = t - t^2.$$

(H. Mandart).

On trouve la solution de M. Verheugen, en faisant $t(n+1) = 2$.
Autre solution par M. Emmerich.

QUESTIONS D'EXAMEN

1081. Construire un triangle rectangle ABC, connaissant l'hypoténuse BC $= a$, et la bissectrice BB′ $= \beta$ de l'angle ABC.

$$\beta^2 = c^2 + \overline{AB'}^2, \quad \frac{AB'}{c} = \frac{B'C}{a} = \frac{AB' + B'C}{c + a};$$

d'où

$$\beta^2 = c^2 + \frac{b^2c^2}{(c+a)^2} = c^2 + \frac{c^2(a^2 - c^2)}{(c+a)^2},$$

$$2ac^2 - \beta^2 c - a\beta^2 = 0.$$

La valeur positive de c qu'on tire de cette équation convient seule au problème proposé; la racine négative convient au cas où β est la bissectrice extérieure de l'angle ABC.

Si c' et $-c''$ sont les racines, on a

$$c' - c'' = \frac{\beta^2}{2a}, \quad c'c'' = \frac{\beta^2}{2};$$

donc c' et c'' sont les côtés d'un rectangle dont on connaît la surface et la différence des deux côtés.

1082. Chacune des faces d'un trièdre $Oxyz = 72^\circ$. Sur Ox on prend la distance OA $= a$. Mener par A un plan coupant Oy en B et Oz en C, de cette sorte que l'angle BAC $= 90^\circ$ et que le cercle inscrit au triangle OBC ait un rayon donné r.

(*Bacc. lettres-math.*, Clermont-Ferrand, 1902.)

1084. Résoudre l'équation

$$2(a^3 + b^3)x^2 - 3x + a + b = 0,$$

a et b étant les racines de l'équation.

$$y^2 - py + \tfrac{1}{2}(p^2 - 1) = 0.$$

(*J. de Vuibert.*)

1085. L'expression

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

devient un carré parfait si l'on pose

$$a^2 = \frac{(b^2 - c^2)^2}{b^2 + c^2}.$$

(E. N. Barisien).

1086. Si

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

on a

$$(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2) = (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)^2.$$

1087. On donne deux points A, B et une droite XX′ passant par B. Trouver sur cette droite un point M, tel que le rapport MA : MB ait une valeur donnée k. Discussion.

Menons AC perpendiculaire à XX′ et posons CA $= a$, CB $= b$, CM $= x$; l'équation du problème est

$$\frac{a^2 + x^2}{(b-x)^2} = k^2.$$

Minimum de $k^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$; valeur correspondante de $x = -\frac{a^2}{b}$, qui détermine le point cherché à la rencontre de XX′ avec la perpendiculaire élevée en A sur AB.

Si k est donné, on cherche sur AB les points E, E′ tels que EA : EB $=$ E′A; E′B $= k$, et la circonférence (EE′) de diamètre EE′ coupe XX′ en deux points M, M′ qui résolvent le problème. Le minimum de k correspond au cas où cette circonférence touche XX′. Or, si O est le milieu de EE′, la division harmonique ABEE′ donne $OE^2 = OM^2 = OA.OB$; d'où l'on conclut que OM est perpendiculaire à XX′ et que MA est perpendiculaire à AB.

(*J. de Vuibert*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1411. D'un point donné P on mène à une parabole trois normales d'angle φ. Les tangentes correspondantes forment un triangle, auquel on circonscrit un cercle. Trouver le lieu du centre de ce cercle lorsque l'angle φ varie. (A. Gob.)

***1412.** Si $a^2 = bc$, la circonférence qui passe par les points de contact des côtés AB, AC du triangle ABC avec les circonférences exinscrites correspondantes I_c, I_b et par le point de contact du côté BC avec la circonférence inscrite I, touche le côté BC. (J. Neuberg).

***1413.** Résoudre le système

$$x + y = 2a,$$
$$\sqrt{mx^2 + nx + p} + \sqrt{my^2 + ny + p} = 2b.$$

1414. Soit C le centre d'un cercle passant par le sommet d'une parabole et tangent en un point quelconque de la parabole. Démontrer que la parallèle à l'axe menée par C et la normale CM forment avec les deux autres normales issues de C un faisceau harmonique. Trouver le lieu du point C. (E. N. Barisien).

Rectification. A mentionner à la page 38 une solution analytique et géométrique de la question 1389 par M. Jeřábek.

THÉORIE PUREMENT ANALYTIQUE DES FONCTIONS CIRCULAIRES D'APRÈS SEIDEL.

La théorie géométrique *habituelle* des fonctions circulaires s'appuie en apparence sur le postulatum d'Euclide et, par suite, il est difficile de voir qu'elle est entièrement rigoureuse, si l'on n'a pas fait une étude approfondie des premiers principes de la géométrie.

Nous croyons donc qu'il est utile d'exposer dans *Mathesis* une théorie purement analytique de ces fonctions.

Nous allons faire connaître celle qui nous semble la plus élémentaire. Elle est due en principe à Seidel (1821-1896) qui l'a publiée dans le Bulletin de la séance du 9 novembre 1867 de l'Académie de Munich, puis dans le *Journal de Crelle*, 1871, t. 73 (pp. 273-291, § I). On la trouve exposée sous une forme meilleure dans le § 14 du tome II du *Lehrbuch der Analysis* de Lipschitz (Bonn, Cohen, 1880), et c'est à cet ouvrage que nous emprunterons presque tout ce qui va suivre.

I. Définitions dans le cas le plus simple.

1. *Égalité fondamentale.* Soient x et y deux quantités positives telles que

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Cherchons deux quantités positives x_1, y_1, telles que

$$(x_1 + iy_1)^2 = x + iy, \tag{1}$$

i, suivant l'usage, désignant $\sqrt{-1}$. On aura d'abord

$$x_1^2 - y_1^2 = x, \quad 2x_1y_1 = y, \tag{1'}$$

puis,

$$x_1^2 + y_1^2 = 1,$$

d'où l'on tire sans peine,

$$x_1^2 = \frac{1+x}{2}, \quad y_1^2 = \frac{1-x}{2},$$

$$x_1 = +\sqrt{\frac{1+x}{2}}, \quad y_1 = +\sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

On peut trouver aisément une suite indéfinie de quantités (x_2, y_2),

(x_3, y_3), (x_4, y_4), ..., (x_n, y_n), toutes positives et liées entre elles par les relations analogues à (1) ou (1'), savoir :

$$(x_2 + y_2 i)^2 = x_1 + y_1 i,$$
$$(x_3 + y_3 i)^2 = x_2 + y_2 i;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_n + y_n i)^2 = x_{n-1} + y_{n-1} i.$$

On a d'ailleurs

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \cdots = x_n^2 + y_n^2 = 1.$$

2. *Inégalités fondamentales.* Entre x, y, x_1, y_1, existent les inégalités suivantes :

$$\frac{y}{x} > \frac{2y_1}{x_1} > 2y_1 > y. \qquad (2)$$

En effet, puisque

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \frac{2y_1}{x_1} = 2\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}},$$

la première inégalité revient à

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} > 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \text{ou} \quad 1+x > 2x.$$

La seconde est évidente, puisque x_1 est < 1. La troisième est

$$2\sqrt{\frac{1-x}{2}} > \sqrt{1-x^2} \quad \text{ou} \quad 2 > 1+x.$$

On peut écrire maintenant la suite d'inégalités

$$\frac{y}{x} > \frac{2y_1}{x_1} > 2y_1 > y,$$
$$\frac{y_1}{x_1} > \frac{2y_2}{x_2} > 2y_2 > y_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} > \frac{2y_n}{x_n} > 2y_n > y_{n-1}.$$

Si on [illegible] $2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$, [illegible]

[illegible] (3)

3. *Définitions de sinus et cosinus.* La quantité $2^n y_n$ croissante avec n, mais toujours inférieure à $(y : x)$ a une limite finie θ. Par définition, on dit que x est le *cosinus* de θ, y le *sinus* de θ et l'on écrit

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta.$$

On a d'ailleurs

$$\lim y_n = \lim \frac{2^n y_n}{2^n} = 0,$$

$$\lim x_n = \lim \sqrt{1 - y_n^2} = 1,$$

$$\lim 2^n(1 - x_n) = \lim \frac{2^n(1 - x_n^2)}{1 + x_n} = \lim \frac{2^n y_n}{1 + x_n} \cdot y_n = \frac{\theta}{2} \cdot 0 = 0.$$

On verra plus loin que y et θ croissent simultanément.

4. *Cas particuliers.* 1° $x = 1$. Si l'on définit $y, x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n$ par la relation $x^2 + y^2 = 1$ et par les égalités analogues à (1), on trouve

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1, \quad y = y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$$

$$\theta = \lim 2^n y_n = 0.$$

Donc

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0.$$

2° $x = 0$. On trouve $y = 1$, $x_1 = y_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$. La limite de $2^n y_n$, dans ce cas, *par définition*, se désigne par $\frac{1}{2}\pi$. On a donc

$$\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0, \quad \sin\tfrac{1}{2}\pi = 0.$$

5. *Valeur limite de* $(\sin\theta : \theta)$, *pour* $\theta = 0$. On déduit évidemment des inégalités (3), la relation

$$\frac{y}{x} > \theta > y,$$

d'où l'on tire encore

$$y > \theta x = \theta\sqrt{1 - y^2},$$

de sorte que

$$\frac{y}{x} > \theta > y > \theta\sqrt{1 - y^2}.$$

Par suite, si y tend vers zéro, il en est de même de θ et réciproquement.

On a aussi

$$1 > \frac{y}{\theta} = \frac{\sin\theta}{\theta} > \sqrt{1-y^2}.$$

Par suite, pour θ ou y tendant vers zéro, on a

$$\lim \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

(*A continuer*) (P. M.)

NOTES DE GÉOMÉTRIE(*),

par M. L. CASTEELS, étudiant en sciences physiques et mathématiques (Louvain).

1. Soit D un point déterminé du plan du *triangle de référence* ABC, et appelons l, m, n, ses *coordonnées barycentriques*. Les droites AD, BD, CD rencontreront BC, CA, AB en des points D_a, D_b, D_c tels que

$$\frac{BD_a}{D_aC} = \frac{n}{m}, \quad \frac{CD_b}{D_bA} = \frac{l}{n}, \quad \frac{AD_c}{D_cB} = \frac{m}{l}.$$

Menons en A, B, C les tangentes au cercle circonscrit O ; elles formeront un nouveau triangle (*triangle tangentiel*) A'B'C'. Les angles A'BC, A'CB étant égaux, le rapport des perpendiculaires abaissées de D_a et plus généralement d'un point quelconque de la droite $A'D_a$ sur les côtés A'C', A'B' du triangle A'B'C' est égal à $\frac{n}{m}$. De là, on déduit facilement que les droites $A'D_a$, $B'D_b$, $C'D_c$ se coupent en un point Δ dont les coordonnées normales par rapport au triangle A'B'C' sont $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$.

Les coordonnées normales des points A', D_a par rapport à ABC étant $(-a, b, c)$, $(0, mc, nb)$, l'équation de la droite $A'D_a$ est

$$\left(\frac{b^2}{m} - \frac{c^2}{n}\right)\frac{x}{a} + \frac{b^2}{m}\frac{y}{b} - \frac{c^2}{n}\frac{z}{c} = 0.$$

(*) Ces notes ne sont pas entièrement nouvelles (comparer, par exemple, ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, 7e édition, pp. 467 et 468); mais nous les publions volontiers parce qu'elles traitent une question élémentaire d'un grand intérêt.

Nous avons retouché ça et là l'article de M. Casteels pour le mettre en harmonie avec la terminologie classique. (J. N.)

En écrivant encore l'équation de $B'D_b$ on trouve aisément pour les coordonnées du point de concours Δ des droites $A'D_a$, $B'D_b$:

$$a\left(-\frac{a^2}{l}+\frac{b^2}{m}+\frac{c^2}{n}\right),\quad b\left(\frac{a^2}{l}-\frac{b^2}{m}+\frac{c^2}{n}\right),\quad c\left(\frac{a^2}{l}+\frac{b^2}{m}-\frac{c^2}{n}\right).$$

3. Supposons maintenant le point D à l'intérieur du triangle ABC, et appelons E_a, E_b, E_c les conjugués harmoniques des points D_a, D_b, D_c par rapport aux segments BC, CA, AB.

La figure présente quatre systèmes de trois droites concourantes :

(AD_a, BD_b, CD_c), (AD_a, BE_b, CE_c), (AE_a, BD_b, CE_c), (AE_a, BE_b, CD_c);

les points de concours D, D′, D″, D‴ ont pour coordonnées barycentriques (l, m, n), $(-l, m, n)$, $(l, -m, n)$, $(l, m, -n)$, et constituent un quadruple de *points harmoniquement associés*.

La figure présente aussi quatre systèmes de trois points en ligne droite :

$$(E_a, E_b, E_c),\quad (E_a, D_b, D_c),\quad (D_a, E_b, D_c),\quad (D_a, D_b, E_c);$$

les quatre droites sont respectivement les *polaires trilinéaires* (ou harmoniquement associées) des points D, D′, D″, D‴.

Soient Q_a, Q_b, Q_c les milieux des segments D_aE_a, D_bE_b, D_cE_c ; ils divisent les côtés du triangle ABC dans les rapports $n^2 : m^2$, $l^2 : n^2$, $m^2 : l^2$ et sont situés sur une même droite, qui est la polaire trilinéaire d'un point P ayant pour coordonnées barycentriques l^2, m^2, n^2. Les droites AP, BP, CP rencontrent BC, CA, AB en des points P_a, P_b, P_c qui sont les conjugués harmoniques des points Q_a, Q_b, Q_c par rapport aux segments BC, CA, AB.

De même que les six points D_a, D_b, D_c, E_a, E_b, E_c, les six points P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c sont les sommets d'un quadrilatère complet dont ABC est le triangle diagonal.

3. En cherchant à déterminer un point dont les distances aux points A, B, C soient proportionnelles aux nombres donnés $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$, on est conduit à construire les trois circonférences qui ont pour diamètres les segments D_aE_a, D_bE_b, D_cE_c. Si ces circonférences se coupent en deux points X, Y, ceux-ci résolvent le problème, de sorte que

$$l.AX = m.BX = n.CX,\quad l.AY = m.BY = nCY.$$

De tels points X, Y sont dits *tripolairement associés*.

Comme les circonférences qui les déterminent par leur intersection coupent orthogonalement la circonférence O, la droite XY passe par O et l'on a

$$OX.OY = R^2;$$

par conséquent les points X, Y sont *inverses* par rapport au cercle O. La droite XY est évidemment perpendiculaire à la ligne des centres $Q_aQ_bQ_c$. Deux couples de points tripolairement associés sont toujours sur une même circonférence orthogonale à la circonférence O.

Nous faisons remarquer que la figure peut être envisagée comme celle d'un quadrilatère complet avec les circonférences décrites sur les diagonales comme diamètres.

4. L'axe radical des cercles orthogonaux Q_a, O est la polaire du centre Q_a du premier cercle par rapport au second; il passe donc par le conjugué P_a de Q_a par rapport à BC et aussi par le point A', pôle de BC par rapport au cercle O. On verrait de même que l'axe radical des cercles Q_b, O est la droite $B'P_b$, et que celui des cercles Q_c, O est la droite $C'P_c$. Ces trois axes radicaux passent par un même point π dont les coordonnées normales, dans le triangle ABC, sont

$$a\left(-\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}+\frac{c^2}{n^2}\right),\quad b\left(\frac{a^2}{l^2}-\frac{b^2}{m^2}+\frac{c^2}{n^2}\right),\quad c\left(\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}-\frac{c^2}{n^2}\right).$$

Ce point π est évidemment le pôle de la droite $Q_aQ_bQ_c$ par rapport au cercle O; il est donc situé sur la droite OXY, et la ponctuelle $(O\pi XY)$ est harmonique. Des égalités

$$OX.OY = R^2,\quad \frac{1}{OX}+\frac{1}{OY}=\frac{2}{O\pi},$$

on peut tirer les valeurs de OX et OY en fonction de R et de la distance $O\pi$ de O à la droite.

Connaissant les coordonnées normales x, y, z du point π, les coordonnées barycentriques du point D sont

$$\sqrt{\frac{a}{cy+bz}},\quad \sqrt{\frac{b}{az+cx}},\quad \sqrt{\frac{c}{bx+ay}}.$$

5. Lorsqu'on prend $l=a$, $m=b$, $n=c$, les circonférences Q_a, Q_b, Q_c deviennent les circonférences d'Apollonius du triangle ABC (passant respectivement par A, B, C et par les pieds des bissectrices des angles A, B, C); les points X, Y deviennent les *centres isodynamiques* et π est le *point de Lemoine* K.

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES.

14. I. Complementi di Geometria elementare del Prof. C. ALASIA. Milan, Hœpli, 1903 (In-18, cartonné de XV-244 pages avec 117 figures). Prix : 1 fr 50.

1. Vecteurs. 2. Généralités sur les polyèdres 3. Mesure des polygones et des polyèdres. 4. Symétrie 5. Translation. Rotation. Déplacement quelconque. 6. Homothétie. 7. Similitude. 8. Maxima et minima en géométrie (point de Lemoine, barycentre, etc.). 9. Transversales. 10 Puissance d'un point par rapport à un cercle; centre et axe radical. 11. Involution. 12. Pôles et polaires. 13. Inversion. 14. Sections coniques.

15. Elementi di Geometria ad uso dei Ginnasi e Licei di VERONESE, Professore nella R. Universita di Padova, trattati con la collaborazione di P. GAZZANIGA, Professore nel R. Liceo di Padova. Verona, Padova, Drucker, 1900 (Parte I, XV-119 p. in-12, Parte II, 240 p. in-8). Prix : 1.50 + 2.50.

Dans ce livre, qui a eu une seconde édition dès 1901, M. Veronese, l'un des géomètres les plus compétents de notre temps sur les questions relatives aux fondements de la géométrie, a exposé les *Éléments* de cette science, en mettant autant que possible en évidence, les observations, les définitions, et les postulats sur lesquels elle est basée.

16. Eléments de Géométrie à l'usage des élèves de l'enseignement moderne et des lycées par A. FAIFOFER, Professeur au Lycée Marco Foscarini à Venise. Traduction de la treizième édition italienne par Fr. Talanti, Professeur de mathématiques. Paris, A. Rogier, éditeur, 1903 (584 p. in-12) Prix : 5 fr.

Très bon livre dont nous avons signalé plusieurs fois les éditions italiennes aux professeurs désireux de voir comment on peut allier, dans une juste mesure, la rigueur euclidienne aux procédés modernes d'enseignement de la géométrie.

17. Leçons de trigonométrie rectiligne et sphérique à l'usage de l'enseignement moyen par H. MANDART, Professeur de mathématiques supérieures à l'athénée royal de Tongres. Namur, Wesmael-Charlier, 1903 (VII-154 p. in-8).

M. Mandart a eu l'heureuse idée de ne définir géométriquement que le *sinus* et le *cosinus*. Les autres fonctions circulaires sont définies par les relations $\text{tang}\, x = \sin x : \cos x$, $\text{séc}\, x = 1 : \cos x$, etc.

18. Évaluation numérique des Grandeurs géométriques, par J. PIONCHON, Directeur de l'Institut électrotechnique de l'Université de Grenoble. Grenoble, A. Gratier et J. Rey, 1903 (128 p. in-8°) Prix : 3 fr 50.

1. Longueurs. 2. Angles. 3. Courbures. 4. Aires. 5. Volumes. 6. Changement d'unités. 7. Appendice : étude quantitative des grandeurs géométriques et de leur désignation numérique.

Il nous semble que ce livre est inutile pour ceux qui connaissent la géométrie et l'analyse infinitésimale et qu'il est insuffisant pour les autres.

19. Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de première (latin-sciences ou sciences-langues vivantes), conformément aux

programmes du 31 mai 1902, par P. Appell membre de l'Institut, et J. Chappuis, Professeur à l'École centrale. Paris, Gauthier-Villars, 1903 (viii-177 p. in-12). Prix : 2 fr. 75.

Admirable petit manuel, simple, clair, solide sur lequel nous reviendrons.

39. Gino Loria. Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe von F. Schütte. Leipzig, Teubner, 1902. (In-8 de xxi-744 pp., 174 fig. et 17 planches). Prix : 26 marcs.

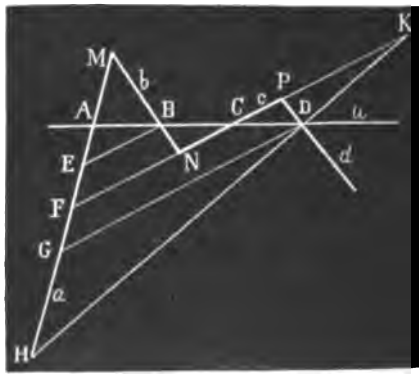
Recueil extrêmement précieux qui devrait se trouver dans la bibliothèque de tous les professeurs de mathématiques supérieures ou au moins dans celle des gymnases, lycées, athénées ou collèges. Nous en donnerons l'analyse ultérieurement.

×PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE,

par G. Delahaye, à Roye.

Étant données dans un même plan quatre droites a, b, c, d, mener une transversale u qui les rencontre en quatre points A, B, C, D ***tels que*** AB = BC = CD.

Ce problème est un cas particulier du suivant :



A un quadrilatère donné inscrire un quadrilatère semblable à un autre quadrilatère donné. Ce dernier est ordinairement ramené au problème ***inverse :*** A un quadrilatère donné circonscrire un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné.

Voici une solution ***directe*** du problème énoncé plus haut. Soient M, N, F, P les points ***ab***, ***bc***, ***ac***, ***cd***, et menons les droites BE, DG parallèles à ***c*** et rencontrant ***a*** en E, G. Nous aurons AE = EF = FG, $EB = \frac{1}{3}GD$. Les triangles semblables AEB, AFN donnent

$$\frac{ME}{MF} = \frac{EB}{FN} = \frac{3EB}{3FN} = \frac{GD}{3FN}. \qquad (1)$$

Or, si l'on prend sur c la longueur FK = 3FN et que l'on trace KD qui rencontre a en H, on a

$$\frac{GD}{FK} = \frac{HG}{HF} \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2) on déduit

$$\frac{ME}{MF} = \frac{HG}{HF} \quad \text{ou} \quad \frac{MF - ME}{MF} = \frac{HF - HG}{HF};$$

or, MF — ME = HF — HG, donc MF = HF. D'où la construction :

Si c rencontre b en N et a en F, prenez sur c la longueur FK = 3FN, sur a la longueur FH = MF; la droite HK rencontrera d au point cherché D. Après avoir mené DG parallèle à c, portez encore sur a la longueur FE = GF et par E tracez une parallèle EB à c. DB sera la ligne demandée.

SUR LE CENTRE DE COURBURE DES CONIQUES,

par J. Rose, à Gand.

1. L'hyperbole d'Apollonius (H) relative au centre de courbure μ en un point M d'une conique Σ est tangente en ce point. Elle passe par le centre O de la conique et par les points à l'infini A, B des axes a et b.

Soient n et t la normale et la tangente en M, N et T leurs points à l'infini; $N_a \equiv (a, n)$, $N_b \equiv (b, n)$, $T_a \equiv (a, t)$, $T_b \equiv (b, t)$ et P le point à l'infini de OM. Les hexagones inscrits dans (H), MMAOBμ, MMABOμ, MMOABμ (*), montrent que *les ternes de droites* MA, μB, N_aT_b; MA, Oμ, T_bN; N_aT, OM, Bμ *sont concourantes*.

2. On détermine comme il suit les asymptotes r et s de (H), respectivement parallèles aux axes a et b (**). Une parallèle à l'axe a (ou b) menée par M rencontre l'axe b (ou a) en S; par ce point, on mène une parallèle à OM coupant en K la tangente t. L'asymptote s (ou r) est la parallèle à b (ou a) menée par K. On en conclut que les droites SP, s, t *sont concourantes*.

Désignons le point (s, n) par Q; les hexagones MMBBAμ, MMBBOμ, MMOBBμ donnent les théorèmes suivants : *Les ternes de droites* Aμ, MB, QT *sont concourantes ainsi que* T_bQ, Mμ, s et N_bK, Bμ, OM.

3. De la considération de l'hexagone MMOOAB il résulte que la

---

(*) Si deux sommets consécutifs d'un hexagone inscrit coïncident de sorte que le côté correspondant est remplacé par une tangente, la lettre placée au sommet est écrite deux fois.

(**) On utilise l'hexagone inscrit MMABBO.

tangente v à (H) au point O passe par le point de rencontre R des parallèles à a et OM menées respectivement par M et T_a.

Si l'on pose $(n, v) \equiv L$, $(m, v) \equiv G$, $I \equiv (s, OM)$, $J \equiv (s, \mu A)$, les hexagones $MMOOB\mu$, $OOBMM\mu$, $OOBBM\mu$, $MOOBB\mu$, $MBBAA\mu$, montrent que *les ternes de droites* $B\mu$, OM, T_1E; $O\mu$, N_1G, MB; OM, s, N_1R; N_1I, μB, v; r, MB, JN *concourent respectivement en des points* L, B_1, H, S, T.

4. Le centre de courbure μ est aussi le point de contact de la normale n avec une parabole (π) tangente aux axes de la courbe Σ et à la tangente t en M. Par suite, i étant la droite de l'infini et $(nn) \equiv \mu$, les hexagones *binnat*, *bnnait*, *bannit*, donnent les théorèmes suivants :

Les trois ternes de droites $T_2\mu$, N_2B, T_2N; T_1N_2, N_2A, μT; $T_2\mu$, ON, N_2T *sont concourantes*.

5. Le diamètre OM de la conique Σ est la directrice de la parabole (π). Il en résulte que l'on connaît le point de contact X de i : c'est le point à l'infini d'une normale à OM. Par suite les figures *tiannt*, *tinnat*, *tinata*, *tiannb*, *tiaban*, fournissent les propriétés suivantes :

Les ternes de droites N_2T, MA, μX; N_2X, T_2N, μT; MX, T_2N, μA; μX, N_2B, N_1A; μA, ON, N_1X *sont concourantes*.

Ces dernières propriétés fournissent des constructions très simples du centre de courbure μ. On peut les énoncer comme il suit :

1° *Par les points* M *et* N_a *on mène des parallèles respectivement à l'axe* a *et à la tangente. La perpendiculaire abaissée de leur point de rencontre sur* OM *coupe la normale au centre de courbure.*

2° *Les perpendiculaires à* OM *et à la tangente menées respectivement par* N_a *et* T_a *se coupent en* C. *La perpendiculaire menée de ce point à la normale coupe cette dernière en* μ.

3° *En* M *et* T_a *on élève des perpendiculaires à* OM *et* t. *La parallèle à l'axe* a *menée par leur point de rencontre coupe la normale en* μ.

4° *Le centre de courbure est le point où* n *est coupée par la normale à* OM *menée par le point de rencontre des parallèles à* b *et* a *passant par* N_a *et* N_b.

5° *Par le point d'intersection des normales à la tangente et à* OM *issues de* O *et de* N_b, *on mène une parallèle à* a; *elle coupe la normale en* μ.

6. D'un autre côté, par la considération des figures *nibian* et *bienit*, on peut construire les points de contact A_2 et T_1 de a et t avec la parabole (π). En effet les ternes MA, N_2B, T_1A_2; MB, T_1A, T_1N_2 sont concourants.

En se bornant à une figure de chaque espèce et par la considération des hexagones *uutiaa*, *uutbaa*, *ttabuu*, *uuttai*, *uuaaib*, *uuaabb*, *uuaaii*, *uutiii*, *uuttaa*, on a les théorèmes suivants :

Les ternes de droites MA_2, μA, N_aT; MA_2, N_aT_b, $O\mu$; OM, $T_a\mu$, T_1N_b; $T_a\mu$, T_1N, MA; μA, N_aB, A_2N_b; $O\mu$, A_2N_b, T_aB_2; $A\mu$, N_aX, NA_2; MX, T_1N, $T\mu$; N_aT_1, MA_2, $T_a\mu$ *sont concourantes.*

7. On peut encore trouver d'autres propriétés en se basant sur le théorème suivant :

L'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle ABC passe par son orthocentre. Dans le cas où l'un des côtés AB devient tangent, l'orthocentre est à l'intersection des perpendiculaires menées par A et C respectivement à AC et AB.

Par suite, on a immédiatement un nouveau point F de (H). C'est l'intersection des perpendiculaires à OM et à t menées par M et O.

On pourra comme plus haut grouper les différents éléments et obtenir des propriétés nouvelles.

Voici trois de ces 24 propriétés, obtenues par l'examen des hexagones $M\mu OABF$, $M\mu FOAB$, $MM\mu OAB$:

Les ternes de droites FB, $O\mu$, NA_s; $O\mu$, N_aP, AB; $O\mu$, MF, F_1T_a *sont concourantes*. On a posé $A_s \equiv (MF, a)$, $P \equiv (MB, OF)$, $F_1 \equiv (AF, a)$.

NOTES MATHÉMATIQUES.

9. *Intégration d'une équation différentielle du deuxième ordre*, par G. Pirondini. L'équation différentielle du deuxième ordre :

$$\frac{1 - y'^2 - yy''}{y\sqrt{1 - y'^2}} = \varphi(x) \tag{1}$$

peut être intégrée par le procédé géométrique suivant :

ρ étant le rayon de courbure, s l'arc d'une ligne plane arbitraire L, x et y les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque de L et R le rayon vecteur de ce point, on a les équations :

$$x = a + \int \cos\left(\int \frac{ds}{\rho}\right) ds = a + \mathrm{R}.\cos\left(\int \frac{\sqrt{1 - \mathrm{R}'^2}}{\mathrm{R}}\, ds\right),$$

$$y = b + \int \sin\left(\int \frac{ds}{\rho}\right) ds = b + \mathrm{R}.\sin\left(\int \frac{\sqrt{1 - \mathrm{R}'^2}}{\mathrm{R}}\, ds\right),$$

a et b étant des constantes.

Celles-ci donnent :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left[a + \int \cos\left(\int \frac{ds}{\rho}\right) ds\right]^2 + \left[b = \int \sin\left(\int \frac{ds}{\rho}\right) ds\right]^2}$$

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{x'' + y''^2} = \frac{1 - R'^2 - RR''}{R\sqrt{1 - R'^2}}.$$

Si donc on remplace s, R, $\frac{1}{\rho(s)}$ par x, y, $\varphi(x)$ respectivement, on conclut que « *l'équation*

$$y = \sqrt{\{a + \int \cos[\int \varphi(x)dx]\, dx\}^2} + \sqrt{\{b + \int \sin[\int \varphi(x)dx]\, dx\}^2}$$

est l'intégrale générale de l'équation différentielle (1) ».

×**7**. ***Sur un nouveau système de numération.*** Au Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, tenu à Ajaccio en 1901, M. Cadenat a proposé le système de numération à base 24, qu'il appelle *biduodécimal* ou *littéral*. Il représente les 23 premiers nombres entiers par les lettres de l'alphabet en éliminant les lettres *w*, *y* et en désignant le zéro par la lettre *o*. La liste suivante fait connaître les valeurs des lettres employées comme *chiffres* :

o	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*x*	*z*
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

Le nombre décimal 3 797 516 716,10 par exemple, est figuré, dans le nouveau système, par *tuxonzd, bp*.

×**8**. ***Question d'Algèbre.*** Ramener l'expression

$$k\sqrt{a + \sqrt{b}} + k'\sqrt{a - \sqrt{b}}$$

à la forme $\sqrt{A + \sqrt{B}}$? — En élevant au carré on a

$$a(k^2 + k'^2) + 2kk'\sqrt{a^2 - b} + (k^2 - k'^2)\sqrt{b} = A + \sqrt{B}.$$

Si $a^2 - b$ est un carré parfait c^2, la réduction est possible et l'on a

$$A = a(k^2 + k'^2) + 2kk'c, \quad B = (k^2 - k'^2)^2 b.$$

(E. N. Barisien.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1860.

(Voir *Mathesis*, (3), t. II, p. 56.)

Un point A *décrit une courbe* C *passant par l'origine de deux axes rectangulaires; on voit facilement que la droite qui joint les projections* M *et* N *du point* A *sur les axes contient le point* B *dont les coordonnées sont l'abscisse et l'ordonnée moyennes de la courbe* C *comptée depuis l'origine jusqu'en* A. *Déterminer* 1° *l'équation de la courbe* C *pour laquelle la droite* AB *est perpendiculaire à* MN *pour toutes les positions de* A *sur cette courbe;* 2° *l'équation de la courbe* C *pour laquelle le point* B *décrit la parabole représentée par* $y^2 = 2px$. (L. Collette).

Solution de la première partie par M. J. Rose. On désigne par (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des points A et B. L'abcisse x_1 étant divisée en n parties égales h, l'ordonnée moyenne sera

$$y_2 = \lim \mathrm{S}_0^{x_1} \frac{yh}{nh} = \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} y\,dx.$$

De même,

$$x_2 = \frac{1}{y_1}\int_0^{y_1} x\,dy.$$

Par suite,

$$y_2x_1 + x_2y_1 = \int_0^{x_1} y\,dx + \int_0^{y_1} x\,dy = x_1y_1,$$

c'est-à-dire que le point B (x_2, y_2) est situé sur la droite MN qui a pour équation

$$\frac{y}{y_1} + \frac{x}{x_1} = 1.$$

Pour que AB soit constamment perpendiculaire à MN, il faut que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_1}{x_1} = 1,$$

ou, en supprimant l'indice 1, après quelques transformations,

$$\left[\frac{1}{x}\int_0^x y\,dx - y\right] y = -\frac{x}{y}\int_0^x y\,dx,$$

ou

$$\int_0^x y\,dx = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

On en déduit, par dérivation,

$$yy'(3x^2+y^2)-x(3y^2+x^2)=0,$$

et, en posant $y=xz$,

$$\frac{dx}{x}+\frac{dz(3z+z^3)}{z^4-1}=0.$$

On a ainsi supprimé les solutions $x=0$, $(y^2-x^2)(y^2+x^2)=0$ correspondant à l'axe des y, aux bissectrices des axes et aux droites isotropes issues de l'origine, solutions évidentes.

En intégrant l'équation obtenue, on trouve

$$lx=lC-l(z+1)-l(z-1)+\tfrac{1}{2}l(z^2+1),$$

ou

$$(y^2-x^2)^2-C^2(y^2+x^2)=0.$$

C'est, en général, l'équation d'une quartique; dans le cas où $C=0$ ou $C=\infty$, on retrouve les bissectrices des axes et les droites isotropes passant par l'origine.

La quartique admet comme points doubles l'origine et les points à l'infini des bissectrices des axes. Elle passe également par les points d'intersection des côtés des carrés construits autour de l'origine et de côtés C et $C\sqrt{3}$. Elle admet comme asymptotes les bissectrices des axes.

Note. Il reste à traiter la seconde partie de la question; la solution en paraît compliquée. (*Rédaction*).

×Question 1373.

(Voir *Mathesis*, (3); II, p. 152.)

Trouver sur la hauteur d'un triangle isocèle le point dont le triangle podaire a le plus petit périmètre. (Soons).

Solution par M. P. Bastin. Soient M un point de la hauteur, D sa projection sur la base BC, E et F ses projections sur les côtés AC et AB; I l'intersection de FE et de AD.

Si l'angle A est obtus ou droit, on a $AI \leqq IE$, d'où $AD < IE+ED$; le point demandé est dans ce cas le sommet A et le périmètre du triangle podaire se réduit à la hauteur parcourue deux fois.

Si l'angle A est aigu, appelons φ l'angle DEC et p le périmètre du triangle podaire. Nous avons successivement :

$$DE = \frac{CD \sin C}{\sin \varphi},\quad EC = \frac{CD \sin (C+\varphi)}{\sin \varphi},\quad FE = BC\left\{1 - \frac{\sin (C+\varphi)\cos C}{\sin \varphi}\right\},$$

$$p = BC\left\{1 + \frac{\sin C - \sin (C+\varphi)\cos C}{\sin \varphi}\right\},$$

$$= BC \sin C\left\{\sin C + \frac{1 - \cos \varphi \cos C}{\sin \varphi}\right\},$$

$$= BC \sin C\left\{2 \sin C + \frac{1 - \cos (\varphi - C)}{\sin \varphi}\right\}.$$

Le minimum de p correspond au minimum de $\frac{1 - \cos (\varphi - C)}{\sin \varphi}$; cette dernière quantité étant positive, son minimum est 0, correspondant à $\varphi = C$.

Le point M demandé est donc tel que DE = DC ; c'est l'orthocentre de ABC. Quant au périmètre minimum, il vaut $2BC \sin^2 C$.

Cette conclusion, admissible quand A est aigu, ne peut l'être quand A est obtus.

En effet, φ ne peut varier qu'entre $\pi - C$ et $\frac{\pi}{2} - C$; quand A est obtus, on a $\frac{\pi}{2} - C > C$, et φ ne peut devenir égal à C.

La dérivée de $\frac{1 - \cos (\varphi - C)}{\sin \varphi}$ est positive ; cette expression varie donc dans le même sens que φ. Or, dans le cas d'un triangle obtusangle, le minimum de φ est $\frac{\pi}{2} - C$ et l'on a le périmètre minimum quand M se confond avec A.

Autre solution par M. H. Lez.

Les solutions suivantes supposent l'angle A aigu ; elles négligent les hypothèses B = ou > 90°.

Solution par M. Emmerich. P étant un point de la hauteur AD issue du sommet du triangle isocèle ABC, abaissons les perpendiculaires PQ et QR sur AC et AD. Soit l'angle CAD = α ; on a QR = 2PQ cos α, et le quadrilatère inscriptible PDCQ donne DQ = PC cos α = BP cos α. Le minimum de DQ + QR revient donc au minimum de BP + PQ ; ce

dernier a évidemment lieu si les points B, P, Q sont en ligne droite, c'est-à-dire si P est l'orthocentre du triangle donné.

Solution par M. J. Dieprez. Considérons un triangle quelconque ABC. Soient A'B'C' le triangle orthique de ABC, A'PQ le triangle podaire d'un point quelconque M de la hauteur AA', et B'', C'' les symétriques du point A' par rapport à CA, AB.

L'orthocentre du triangle ABC est le centre du cercle inscrit dans le triangle A'B'C', donc les points B'', B', C', C'' sont collinéaires et B''C'' est le périmètre du triangle orthique.

Le périmètre du triangle podaire du point M vaut A'P + PQ + QA', ou B''P + PQ + QC''.

Comme B''P + PQ + QC'' est plus grand que B''C'', le point cherché est l'orthocentre de ABC.

Solution par M. H. Brocard. Soient M le point cherché, m sa distance à la base BC, h la hauteur du triangle, A'B'C' le triangle podaire de M.

Si AM, BM, CM sont les diamètres des cercles circonscrits aux triangles AC'B', BA'C', CA'B', on a immédiatement

$$C'B' = (h - m)\sin A, \quad A'B' = \sqrt{\frac{a^2 + 4m^2}{4}}\sin B.$$

Le périmètre à rendre minimum est donc

$$(h - m)\sin A + \sqrt{a^2 + 4m^2}\sin B.$$

La condition du minimum est

$$-\sin A + \frac{4m}{\sqrt{a^2 + 4m^2}}\cos\frac{A}{2} = 0,$$

d'où $m = \frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{A}{2}$. Le point M est donc l'orthocentre du triangle isocèle.

Question 1375.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 152).

Etant donnés n nombres complexes $a, b, c, \ldots$, on considère les 2^{n-1} modules différents des nombres compris dans la formule $\pm a \pm b \pm c \pm \cdots$ Démontrer que la moyenne arithmétique de leurs carrés est égale à la somme des carrés des modules des n nombres donnés. (E. Cesàro).

Solution par MM. Emmerich, Rius y Casas et Verheugen. Soient $a = a_1 + a_2 i$, $b = b_1 + b_2 i$, $c = c_1 + c_2 i$, ... Comme deux nombres $+a + A$, $-a - A$, ne différant que par le signe ont même module, la somme des carrés des modules différents des nombres compris dans la formule $\pm a \pm b \pm c \cdots$ sera représentée par

$$S = \Sigma(a_1 \pm b_1 \pm c_1 \pm \cdots)^2 + \Sigma(a_2 \pm b_2 \pm c_2 \pm \cdots)^2.$$

Le symbole $\Sigma(a_1 \pm b_1 \pm c_1 \pm \cdots)^2$ renferme évidemment 2^{n-1} termes. En développant ceux-ci on obtiendra chaque carré 2^{n-1} fois avec le signe positif, et les doubles produits paraîtront 2^{n-2} fois avec le signe positif et autant de fois avec le signe négatif. Il en résulte que la somme S revient à

$$2^{n-1}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 + \cdots) = 2^{n-1}\Sigma(\text{mod } a)^2.$$

×Question 1377.

(Voir *Mathesis* (3), II, p. 184).

Etant donnés deux triangles ABC, A'B'C', *désignons par* A(B'C'), ... *les triangles ayant pour côtés* (CA, AB, B'C'), ... *Démontrer que si* ABC *et* A'B'C' *sont métaparallèles* (*question* 1368, 1902, *p.* 104) : 1° *les médianes des sommets* A, B, C *dans les triangles* A(B'C'), B(C'A'), C(A'B') *coupent les côtés* BC, CA, AB *en trois points collinéaires ; 2° la même propriété existe pour les symédianes des mêmes sommets dans les mêmes triangles.* (L. Ripert).

Solution géométrique par M. Emmerich. Appelons D, D' les deux métapôles. B'C' étant parallèle à AD, la médiane du sommet A dans le triangle A(B'C') est conjuguée harmonique de AD par rapport à l'angle BAC. Or, si trois transversales angulaires d'un triangle concourent en un point D, leurs conjuguées harmoniques par rapport aux angles correspondants rencontrent les côtés opposés en trois points d'une droite. C'est la droite harmoniquement associée au point D. La transversale isogonale réciproque à celle-ci contient les points où les symédianes des triangles en question rencontrent les côtés du triangle ABC.

On peut encore remarquer que les médianes et symédianes en question sont respectivement parallèles aux médianes et symédianes du sommet D' dans les triangles D'B'C', D'C'A', D'A'B'.

Solution analytique par M. Bastin.

×Question 1879.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 184).

Trouver sur les côtés AB, BC *d'un triangle* ABC *des points* C′, A′ *tels que* $\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC}$, $CC' = AA'$.

Posons

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \lambda, \quad \text{d'où} \quad AC' = c\lambda, \quad BA' = a\lambda;$$

en égalant les expressions de $\overline{CC'}^2$, $\overline{AA'}^2$ déduites des triangles CC′A, AA′B, on obtient

$$b^2 + c^2\lambda^2 - 2bc\lambda \cos A = c^2 + a^2\lambda^2 - 2ca\lambda \cos B;$$

d'où, en éliminant les produits $2bc \cos A$, $2ca \cos B$ au moyen des formules

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

et en ordonnant par rapport à λ,

$$\lambda^2(c^2 - a^2) + 2\lambda(a^2 - b^2) + b^2 - c^2 = 0. \qquad (1)$$

Cette équation devient identique si $a = b = c$; résultat facile à prévoir.

Lorsque $b = c$, on trouve $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$; la première racine correspond aux côtés égaux CA et AB, la seconde suppose qu'on prolonge AB de $BC' = AB$ et BC de $CA' = BC$.

Lorsque $c = a$, l'équation (1) a pour racines $\lambda = \infty$ et $\lambda = \frac{1}{2}$; la première racine correspond aux parallèles menées par A à BC et par C à AB; la seconde, aux médianes issues des extrémités de la base du triangle isocèle.

L'hypothèse $a = b$ donne $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$; la solution ne diffère pas essentiellement de celle qui a été trouvée pour $b = c$.

Enfin, considérons un triangle scalène. Les racines de l'équation (1) sont

$$\lambda = \frac{b^2 - a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]}}{c^2 - a^2};$$

elles sont réelles et inégales.

Si l'on prend pour inconnue le rapport $\frac{BC'}{BA} = \mu$ ou le rapport $\frac{C'}{C'B} = \nu$, l'équation (1) est remplacée par

$$\mu^2 (c^2 - a^2) + 2\mu (b^2 - c^2) + b^2 - a^2 = 0,$$
$$\nu^2 (a^2 - b^2) - 2\nu (c^2 - a^2) + b^2 - c^2 = 0.$$

Lorsque le rapport λ varie, le point d'intersection des droites CC', AA' décrit l'ellipse qui touche BA, BC aux sommets A, C et passe par le centre de gravité. Quel est le point de cette ellipse qui donne CC' = AA'?

Les deux points C qui résolvent la question peuvent être considérés comme les points doubles d'une involution située sur AB et définie par la relation

$$\lambda\lambda' (c^2 - a^2) + (\lambda + \lambda') (a^2 - b^2) + b^2 - c^2 = 0;$$

deux couples sont déterminés par les valeurs

$$\lambda = 0, \quad \lambda' = -\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}; \quad \lambda = 1, \quad \lambda' = -\frac{a^2 - c^2}{c^2 - b^2}.$$

Note. La solution précédente était pour ainsi dire sous presse quand nous avons reçu, de M. Déprez, une solution presque identique.

Notre zélé collègue de l'athénée de Bruxelles rappelle la signification remarquable du radical

$$\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2 c^2} = 2S \sqrt{\cot^2 V - 3},$$

où V désigne l'angle de Brocard du triangle ABC. Si l'on construit sur BC extérieurement et intérieurement des triangles équilatéraux BCS, BCS', on a

$$\overline{AS}^2 = 2S (\cot V + \sqrt{3}), \quad \overline{AS'}^2 = 2S (\cot V - \sqrt{3});$$

par conséquent

$$\Sigma a^4 - \Sigma b^2 c^2 = \overline{AS}^2 \cdot \overline{AS'}^2$$

Dans le triangle automédian ($2c^2 = a^2 + b^2$), on a

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{3} = \text{tg } 75^\circ \text{ ou tg } 15^\circ.$$

Autre solution par M. Rose. (J. N.)

*Question 1395.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 264.)

Soient O *le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC *et* K_1, K_2, K_3, *les points de Lemoine des triangles* OBC, OCA, OAB. *Calculer l'aire du triangle* $K_1K_2K_3$. (TUCKER).

Solution par MM. BASTIN, DÉPREZ, EMMERICH, DELAHAYE, LEZ et PLAKHOVO. Le triangle $K_1K_2K_3$ est la somme des triangles OK_1K_2, OK_2H_3, OK_1K_3. Soit D la projection de O sur BC. On a

$$\frac{OK_1}{OD} = \frac{2R^2}{a^2 + 2R^2},$$

d'où

$$OK_1 = \frac{2R^3 \cos A}{a^2 + 2R^2} = \frac{R \cos A}{1 + 2\sin^2 A}.$$

On a des valeurs analogues pour OK_2, OK_3. Il en résulte

$$2K_1OK_2 = OK_1 . OK_2 \sin C = \frac{R^2 \cos A \cos B \sin C}{(1 + 2\sin^2 A)(1 + 2\sin^2 B)}.$$

On obtient des expressions analogues pour les deux autres triangles partiels. Par conséquent

$$2K_1K_2K_3 = \frac{R^2 \Sigma \cos A \cos B \sin C (1 + 2\sin^2 C)}{(1 + 2\sin^2 A)(1 + 2\sin^2 B)(1 + 2\sin^2 C)}.$$

Or,

$$\Sigma \cos A \cos B \sin C = \sin A \sin B \sin C,$$

$$\begin{aligned} 2\Sigma \cos A \cos B \sin^2 C &= 2\Sigma \cos A \cos B \sin C - 2\Sigma \cos A \cos B \sin C \cos^2 C \\ &= 2 \sin A \sin B \sin C - \cos A \cos B \cos C \Sigma \sin 2C \\ &= \sin A \sin B \sin C (2 - 4 \cos A \cos B \cos C). \end{aligned}$$

De là

$$2K_1K_2K_3 = \frac{R^2 \sin A \sin B \sin C (3 - 4 \cos A \cos B \cos C)}{(1 + 2\sin^2 A)(1 + 2\sin^2 B)(1 + 2\sin^2 C)}.$$

Observant que $ABC = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, on peut écrire

$$\frac{K_1K_2K_3}{ABC} = \frac{3 - 4 \cos A \cos B \cos C}{4(1 + 2\sin^2 A)(1 + 2\sin^2 B)(1 + 2\sin^2 C)}.$$

Cas particuliers. 1° Si $A = 90°$,

$$K_1K_2K_3 = \frac{R^3 \sin 2B}{4(3 + \sin^2 2B)}.$$

2° Si $A = 90°$, $B = C$, on trouve $K_1K_2K_3 = \frac{1}{16}R^3$.

3° Si $A = B = C$, on obtient $K_1K_2K_3 = \frac{3}{100}R\sqrt{3}$.

(EMMERICH.)

Question 1396.

(Voir *Mathesis*, (3), II, p. 264.)

On considère les triangles ABC *dont la base* AB *est fixe et l'angle* C *constant. Soient* D, D' *les pieds des bissectrices issues de* A. *Trouver le lieu du milieu de la distance* DD'. (E. N. BARISIEN.)

Solution par M. J. DEPREZ. M étant le milieu de DD', on a

$$MAB = MAD + DAB = MDA + DAC = 2^{dr} - C.$$

Le point M décrit la tangente en A au segment capable de l'angle C, décrit sur AB.

La droite DD' tourne autour du point B et l'on a $MD = MD' = MA$; par conséquent, les points D, D' décrivent une strophoïde oblique dont le point double est en A.

Ont résolu la même question MM. BASTIN, COUVERT, EMMERICH, ROSE et LEZ. M. EMMERICH a cherché l'équation du lieu des points D, D' par la géométrie analytique.

QUESTIONS D'EXAMEN

1398. Résoudre le système

$$x + y + z + t = 0,$$
$$ax + by + cz + dt = 0,$$
$$a^2x + b^2y + c^2z + d^2t = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

(*Faculté des Sciences*, BUCAREST, *Examens d'octobre* 1902).

Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ les déterminants obtenus en supprimant une colonne d[u] système d'éléments

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{matrix} \right\|,$$

et posons $S_m = a^m + b^m + c^m + d^m$. On a

$$\frac{x}{\delta_1} = \frac{y}{-\delta_2} = \frac{z}{\delta_3} = \frac{t}{-\delta_4} = \frac{1}{\pm\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2}},$$

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = \left| \begin{matrix} 4 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{matrix} \right|.$$

1089. Si x_1, x_2, x_3 sont les racines de l'équation

$$x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0,$$

calculer la fonction symétrique $\Sigma x_1^2 x_2^2$.

(*Ibid.*)

1090. Étant donnée $\operatorname{tg} \alpha = a$, former l'équation qui donne $\operatorname{tg} \frac{2x}{3} = x$. Cas particulier où $a = 1$.

(*Ibid.*)

1091. Étant donnés deux cercles, de centres A et B, une tangente quelconque au premier cercle rencontre la seconde circonférence aux points C et D. Trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle BCD.

Une inversion dont B est le centre et $\overline{BC}^2$ la puissance change la droite CD en la circonférence BCD; l'enveloppe cherchée est donc la transformée de la circonférence A.

1092. Décomposer en facteurs rationnels

$$P = x^{[illegible]} + x^{[illegible]} + 1.$$

On a

[illegible]

1093. Résoudre l'équation

[illegible]

(… Candido).

Le premier membre peut s'écrire :

$$a[(\sqrt[5]{x})^3 + (\sqrt[5]{b})^3] = a(\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{b})(\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{xb} + \sqrt[5]{b^2}),$$

et le second membre :

$$\sqrt[5]{x}(\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{xb} + \sqrt[5]{b^2});$$

de sorte que l'équation se décompose en

$$\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{xb} + \sqrt[5]{b^2} = 0, \quad a(\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{b}) = \sqrt[5]{x}.$$

Si l'on prend $\sqrt[5]{x}$ pour inconnue, le premier facteur donne

$$\sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{b}\,\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \text{ d'où } x = -b.$$

Cette solution ne satisfait à l'équation proposée que si l'on prend pour $\sqrt[5]{xb^3}$, $\sqrt[5]{x^3b}$ des déterminations imaginaires.

1004. Soient (D, E, F), (D_a, E_a, F_a), ... les points de contact des côtés a, b, c d'un triangle ABC avec les cercles tritangents I, I_a, ... On a :

$$\overline{E_bF_c}^2 = a^2 \sin^2\frac{A}{2} + (b-c)^2\cos^2\frac{A}{2},$$

$$\overline{E_cF_b}^2 = (a+b)^2\cos^2\frac{A}{2} + c^2\sin^2\frac{A}{2},$$

$$\overline{E_cF_c}^2 = (a+c)^2\cos^2\frac{A}{2} + b^2\sin^2\frac{A}{2},$$

$$\text{aire } DEF = D_aE_bF_c = \frac{r}{2R}S,$$

$$D_bE_cF_a = D_cE_aF_b = \frac{p^2 - r^2}{4Rr}S.$$

Si $E_bF_b = E_cF_c$, le triangle est isoscèle ou bien $2p\cos A + a = 0$.

(J. N.).

1005. La normale en un point M d'une courbe C rencontre les axes Ox, Oy aux points A, B; la perpendiculaire élevée en M sur le rayon OM coupe les mêmes axes en A', B'. Déterminer la courbe C par la condition que les points A, A', B, B' soient sur une même circonférence.

(*F. d. Sc.*, Bucarest),

On trouve $y' = \pm\frac{x}{y}$, d'où $x^2 \pm y^2 = C$.

1096. Résoudre l'équation

$$\cos 7x \cos {}^5x - \sin 7x \sin {}^5x = a.$$

(V. Cristesco).

Cette équation se ramène à

$$6\cos^2 4x + \cos 4x - (3 + 4a) = 0.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1415. Par un point donné P, on mène une droite quelconque Δ, qui rencontre les faces d'un tétraèdre donné ABCD aux points A_1, B_1, C_1, D_1; soient A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 les symétriques de ces points par rapport à P. Démontrer par la géométrie que 1° Les milieux des droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont situés dans un même plan; 2° Les milieux des droites AA'_1, BB'_1, CC'_1, DD'_1 sont les sommets d'un tétraèdre de volume constant.

Trouver l'enveloppe du plan passant par les milieux des droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. (J. Déprez.)

1416. On considère les hyperboles d'Apollonius d'un point fixe P par rapport aux coniques passant par quatre points fixes A, B, C, D. Démontrer que ces hyperboles ont, en outre du point P trois points communs L, M, N situés sur la conique des neuf points du quadrangle ABCD; les droites PL, PM, PN sont tangentes à une même courbe de la troisième classe, indépendante de la position du point P et qui est la projection orthogonale (réelle ou imaginaire) d'une hypocycloïde à trois rebroussements. (A. Gob.)

1417. Une courbe plane C tourne dans son plan autour d'un point fixe O; on lui mène une tangente parallèle à une direction donnée.

Trouver le lieu du point de contact : 1° lorsque C est une circonférence tournant autour de l'un de ses points; 2° lorsqu'on fait tourner une développante de cercle autour du centre du cercle générateur; 3° lorsqu'une spirale logarithmique tourne autour de son pôle.

(H. Brocard.)

1418. Une parallèle à la base BC d'un triangle ABC rencontre AB en B', AC en C'. Déterminer cette droite B'C' par la condition que les cônes AB'C', BB'C' engendrent des volumes égaux lorsqu'elles tournent : 1° autour de B'C'; 2° autour de BC; 3° autour de la parallèle à BC menée par A. (J. Neuberg.)

SUR LES COUPLES DE TRIANGLES HOMOLOGIQUES DONT LES SOMMETS SONT SITUÉS SUR SIX DROITES DONNÉES;

par M. J. Neuberg.

Soient a, a', b, b', c, c', six droites données dont deux quelconques ne sont pas situées dans un même plan, et soient A, A', B, B', C, C' les points où elles sont rencontrées par un même plan μ. Je vais étudier l'enveloppe φ du plan μ sous la condition que les triangles ABC, A'B'C' soient homologiques, ainsi que le lieu F du centre d'homologie M de ces triangles. Le cas particulier où les droites a, b, c concourent en un même point S et les droites a', b', c' en un autre point S', a fait l'objet de la question 1382, résolue par M. Stuyvaert (*Mathesis*, (3), III, p. 74).

Le problème qui nous occupe ici, peut encore être énoncé ainsi : On considère les triples de droites a_1, b_1, c_1 qui s'appuient respectivement sur les couples de droites aa', bb', cc', concourent en un même point M et sont situés dans un même plan μ ; trouver le lieu de M et l'enveloppe de μ.

Il est facile de voir que les surfaces F et φ se correspondent par voie de dualité ; je vais cependant étudier chacune d'elles directement.

1. Les droites a, a', b, b', c, c' appartiennent à la surface F.

En effet, par un point quelconque M pris sur a par exemple, menons les droites $BB' \equiv b_1$, $CC' \equiv c_1$ s'appuyant sur les couples bb', cc' ; le plan b_1c_1 coupera a' en un point A' tel que les triangles MBC, A'B'C' ont pour centre d'homologie le point M.

Lorsque M se déplace sur a, le plan b_1c_1 passant par deux génératrices des systèmes réglés (abb'), (acc') enveloppe la développable circonscrite à deux hyperboloïdes ayant une génératrice commune ; cette développable est également circonscrite à la surface φ.

2. Les droites a, a' ... appartiennent à la surface φ.

En effet, un plan quelconque μ mené par a par exemple, rencontre les autres droites a', b, ... en des points déterminés A', B ...; si les droites $BB' \equiv b_1$, $CC' \equiv c_1$ se rencontrent au point M, la droite MA' coupe a en un point A, tel que les triangles ABC, A'B'C' sont homologiques.

Lorsque le plan μ tourne autour de a, les droites b_1, c_1 engendrent

deux systèmes réglés (abb'), (acc') et leur point de rencontre M décrit une cubique gauche, intersection de deux hyperboloïdes qui ont une droite commune.

3. Prenons arbitrairement la droite $CC' \equiv c_1$ s'appuyant sur c et c'. Si par un point M' mobile sur c_1 on mène les droites a'_1, b'_1 s'appuyant respectivement sur les couples aa', bb', les plans $c_1a'_1$, $c_1b'_1$ se correspondront dans deux faisceaux qui sont projectifs avec la ponctuelle (M') et par suite projectifs entre eux. Les deux éléments doubles de ces faisceaux sont deux plans μ appartenant à φ. Il résulte de là que la droite c_1 contient en dehors des points C, C' de c, c' encore deux autres points M; donc la surface F est du quatrième ordre. Semblablement, il passe par c_1, en dehors des plans c_1c, c_1c', deux plans μ; donc la surface φ est de la quatrième classe.

4. Voici une autre manière d'arriver aux mêmes conclusions.

Prenons arbitrairement les points A, B sur a, b. Le point M doit alors se trouver dans les plans a'A, b'B; donc si le plan a'A coupe b en B_1 et que le plan b'B rencontre a en A_1, le point M appartient à la droite A_1B_1. La droite CC' est donc l'une des deux droites qui s'appuient sur les quatre droites c, c', A_1B_1, AB.

Nous trouvons ainsi, outre les plans aB, bA, deux plans μ passant par la droite AB, et outre les points A_1, B_1 deux points M situés sur la droite A_1B_1.

5. Soit g l'une des deux droites qui s'appuient sur les quatre droites a, a', b, b'. Tout plan μ passant par g appartient à φ; car s'il rencontre c et c' en C et C', les triangles correspondants ABC, A'B'C' ont pour centre d'homologie M le point de rencontre de g avec la droite CC'.

On voit par là que les surfaces F et φ contiennent en dehors des droites a, a', b, b', c, c', encore six autres droites qui sont les quadrisécantes de deux des couples aa', bb', cc'.

6. Soit δ une droite quelconque.

Si par un point M mobile sur δ on mène les trois droites a'_1, b'_1, c'_1 s'appuyant respectivement sur les couples aa', bb', cc', ces droites seront situées dans un même plan π chaque fois que M appartient à la surface F, et π sera un plan tangent de chacun des hyperboloïdes $(aba'b')$, $(bcb'c')$, $(cac'a')$. Mais trois hyperboloïdes qui ont une droite commune ont quatre

points communs et quatre plans tangents communs. Donc il existe sur k quatre points M et la surface F est du quatrième ordre.

De même, si un plan mobile μ passe constamment par k et rencontre a, a', b, b', c, c' aux points A, A', B, B', C, C', les droites AA', BB', CC' concourent en un même point M chaque fois que μ appartient à l'enveloppe φ, et M est alors un point commun aux trois hyperboloïdes (kaa'), (kbb'), (kcc'). De là il résulte de nouveau que φ est de la quatrième classe.

Ces dernières considérations conduisent à une nouvelle définition des surfaces F et φ :

Etant donnés trois couples de droites aa', bb', cc', on considère les trois systèmes réglés (kaa'), (kbb'), (kcc') qui ont une même directrice commune variable k. F est le lieu des points communs, et φ l'enveloppe des plans tangents communs à ces systèmes réglés variables.

7. Lorsque les droites a, b, c passent par un même point S, tout plan mené par S peut être considéré comme un plan μ ; par suite, l'enveloppe φ se compose du point S et d'une surface de la troisième classe.

Lorsque les droites a, b, c concourent en un point S, et les droites a', b', c' en un autre point S', l'enveloppe φ se compose des deux points S, S', et d'une surface de la deuxième classe (hyperboloïde). J'ai proposé ce cas particulier dans la question 1382 de *Mathesis*.

Supposons maintenant les droites a, b, c situées dans un même plan π et les droites a', b', c' situées dans un second plan π'. Le lieu proprement dit du point M tel que les droites a_1, b_1, c_1 passant par M et s'appuyant respectivement sur les couples aa', bb', cc' soient situées dans un même plan μ, est l'hyperboloïde ayant pour directrices les droites joignant les couples de points $(bc, b'c')$, $(ca, c'a')$, $(ab, a'b')$. — J'ai également proposé ce cas particulier dans la NCM, t. II, p. 190, question 121.

Qu'il me soit permis de rapporter ma première démonstration de cette question. Désignons par P, Q, R, P', Q', R' les sommets des deux triangles abc, $a'b'c'$. Si l'on projette, à partir du point M, le triangle P'Q'R' en P''Q''R'' sur le plan abc, les triangles PQR, P''Q''R'' auront pour axe d'homologie la trace du plan μ ; par conséquent, les droites PP'', QQ'', RR'' concourent en un même point S, ce qui revient à dire que les plans MPP', MQQ', MRR' se coupent suivant une même droite MS ou que MS s'appuie sur les droites PP', QQ', RR'.

6. *Soient données* les équations des droites a, a', b, b', c, c' sous la forme

$$\begin{cases} a_x \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0, \\ f_x \equiv f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a'_x = 0. \\ f'_x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_x = 0, \\ g_x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b'_x = 0, \\ g'_x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} c_x = 0, \\ h_x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} c'_x = 0. \\ h'_x = 0; \end{cases}$$

et soit

$$\mu_x = \mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3 + \mu_4x_4 = 0$$

l'équation du plan μ, qui coupe les droites a', b', c' aux points A′, B′, C′.

Les plans aA′, bB′, cC′ peuvent être représentés par

$$pa_x + qf_x = 0, \; p'b_x + q'g_x = 0, \quad p''c_x + q''h_x = 0. \tag{1}$$

Ces plans et le plan μ doivent concourir en un même point M, d'où la condition

$$\left| \begin{matrix} pa_1 + qf_1 & p'b_1 + q'g_1 & p''c_1 + q''h_1 & \mu_1 \end{matrix} \right| = 0; \tag{2}$$

j'indique ici un déterminant par sa première ligne seulement, les autres lignes ne diffèrent de la première que par l'indice 2, 3 ou 4.

Pour déterminer les coefficients encore inconnus p, q, ···, j'exprime par exemple que les plans

$$pa_x + qf_x = 0, \quad a'_x = 0, \quad f'_x = 0, \quad \mu_x = 0$$

concourent en un même point, ce qui donne l'égalité

$$\left| \begin{matrix} pa_1 + qf_1 & a'_1 & f'_1 & \mu_1 \end{matrix} \right| = 0,$$

de sorte qu'on peut prendre

$$p = \left| \begin{matrix} f_1, & a'_1, & f'_1, & \mu_1 \end{matrix} \right|, \quad q = -\left| \begin{matrix} a_1, & a'_1, & f'_1, & \mu_1 \end{matrix} \right|. \tag{3}$$

Comme ces valeurs de p, q, ··· sont du premier degré en μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, l'équation (2) est du quatrième degré par rapport à ces mêmes quantités; donc la surface φ qui est représentée par l'équation (2) en coordonnées tangentielles, est de la quatrième classe.

Pour obtenir l'équation de la surface F, substituons les valeurs (3) et les valeurs analogues de p, q, ··· dans les équations (1) et éliminons x_1, x_2, x_3, x_4 entre ces équations (1) et $\mu_x = 0$. L'élimination se fait aisément parce que μ_x n'entre qu'au premier degré. On trouve ainsi une équation de quatrième degré en μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 qui représente la surface F.

8. [illegible] ABC, [illegible]

THÉORIE PUREMENT ANALYTIQUE DES FONCTIONS CIRCULAIRES D'APRÈS SEIDEL.

(*Suite*, voir pp. 81-84).

II. Propriété fondamentale des sinus et cosinus.

1. *Théorème de l'addition sous forme incomplète.* Considérons, outre les quantités $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ dont il a été question dans le § I, deux quantités non négatives x', y' vérifiant la relation

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

Déterminons, comme plus haut, une suite de quantités (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), ..., (x'_n, y'_n) non négatives, telles que l'on ait

$$\begin{aligned}(x'_1 + y'_1 i)^2 &= x' + y' i,\\ (x'_2 + y'_2 i)^2 &= x'_1 + y'_1 i,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ (x'_n + y'_n i)^2 &= x'_{n-1} + y'_{n-1} i.\end{aligned}$$

On aura, θ' étant une certaine quantité bien déterminée,

$$\lim 2^n y'_n = \theta',$$

et, d'après les définitions du sinus et du cosinus,

$$x' = \cos\theta', \quad y' = \sin\theta'.$$

Soit maintenant

$$X + Yi = (x + yi)(x' + y'i),$$

ou

$$X = xx' - yy', \quad Y = xy' + x'y. \tag{1}$$

On aura

$$X^2 + Y^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = 1.$$

Supposons X non négatif et formons la suite illimitée de quantités non négatives (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n), vérifiant les relations

$$\begin{aligned}(X_1 + Y_1 i)^2 &= X + Yi,\\ (X_2 + Y_2 i)^2 &= X_1 + Y_1 i,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ (X_n + Y_n i)^2 &= X_{n-1} + Y_{n-1} i.\end{aligned}$$

On aura, Θ étant une nouvelle quantité bien déterminée,

$$\lim 2^n \cdot Y = \Theta$$

et l'on posera

$$X = \cos\Theta, \quad Y = \sin\Theta.$$

Les relations (1) peuvent maintenant se mettre sous la forme

$$\cos \Theta = \cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi', \quad \sin \Theta = \sin \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi' \cos \varphi.$$

2. *Théorème de l'addition sous forme complète :* $\Theta = \varphi + \varphi'$. La relation qui définit X_1 et Y_1 peut s'écrire

$$(X_1 + Y_1 i)^2 = (x + yi)(x' + y'i) = (x_1 + y_1 i)^2 (x'_1 + y'_1 i)^2.$$

On a donc

$$X_1 + Y_1 i = \pm (x_1 + y_1 i)(x'_1 + y'_1 i)$$

ou

$$X_1 = \pm (x_1 x'_1 - y_1 y'_1), \quad Y_1 = \pm (x_1 x'_1 + x'_1 y'_1).$$

Je dis que l'on doit toujours prendre le signe supérieur dans ces formules.

En effet, supposons d'abord x, y, x', y', différents de zéro. Dans ce cas, x_1, y_1, x'_1, y'_1 sont aussi différents de zéro. Pour que Y_1 ne soit pas négatif, on doit évidemment prendre le signe supérieur ; par suite, on doit aussi prendre le signe supérieur pour X_1 puisque les signes supérieurs ou inférieurs se correspondent dans X_1 et Y_1.

Si $x = 0$, et, par suite, $y = 1$, on a $X = -y'$. Pour que X ne soit pas négatif, il faut que $y' = 0$ et, par suite, $x' = 1$. Alors, on a aussi $y'_1 = 0$, $x'_1 = 1$ (§ 1, n° 4) et il en résulte que $X_1 = \pm x_1$, $Y_1 = \pm y_1$. Pour que X_1, Y_1 ne soient pas négatifs, on doit donc prendre les signes supérieurs. — La démonstration est la même si l'on suppose $x' = 0$.

Si $y = 0$, et, par suite, $x = 1$, on a $y_1 = 0$, $x_1 = 1$, $X_1 = \pm x'_1$, $Y_1 = \pm y'_1$ et évidemment, on doit de nouveau prendre les signes supérieurs. — La démonstration est la même si l'on a $y' = 0$.

On a donc

$$X_1 + Y_1 i = (x_1 + y_1 i)(x'_1 + y'_1 i)$$

[illegible] de même,

$$X_2 + Y_2 i = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)$$

. . . .

$$X_n + Y_n i = (x_n + y_n i)(x_n + y_n i)$$

[illegible]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

mais, pour $n = \infty$, lim. $x_n = 1$, lim. $x'_n = 1$. On a donc, en passant à la limite, dans la dernière relation, d'après la définition de θ, θ', Θ,

$$\Theta = \theta + \theta'.$$

Par suite, les formules d'addition deviennent

$$\cos(\theta + \theta') = \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta',$$
$$\sin(\theta + \theta') = \sin\theta \cos\theta' + \sin\theta' \cos\theta.$$

3. *Formules* $\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta) = \cos\theta$, $\cos(\frac{1}{2}\pi - \theta) = \sin\theta$. Soit $\theta + \theta' = \frac{1}{2}\pi$. Dans ce cas, on aura

$$\cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' = \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0,$$
$$\sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta' = \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1.$$

Résolvant ces équations par rapport à $\sin\theta'$, $\cos\theta'$, on trouve

$$\sin\theta' = \cos\theta, \quad \cos\theta' = \sin\theta,$$

c'est-à-dire,

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = \cos\theta, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = \sin\theta.$$

4. *Les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions bien déterminées et continues.* On a évidemment

$$\cos(\theta + \theta') - \cos\theta = -\cos\theta(1 - \cos\theta') - \sin\theta \sin\theta' < 0.$$

La fonction $\cos\theta$ décroît donc, et, par suite, $\sin\theta = +\sqrt{1 - \cos^2\theta}$ croît quand θ croît de 0 à $\frac{1}{2}\pi$. A une valeur de θ correspond donc une valeur unique de $\cos\theta$ et $\sin\theta$; autrement dit, sinus et cosinus sont des fonctions bien déterminées.

De la formule qui donne la valeur de $\sin(\theta + \theta')$, on déduit

$$\frac{\sin(\theta + \theta')}{\theta + \theta'} < \frac{\sin\theta}{\theta}. \qquad (2)$$

En effet, cette relation peut s'écrire successivement,

$$\theta \sin(\theta + \theta') < (\theta + \theta') \sin\theta,$$
$$\theta \sin\theta \cos\theta' + \theta \sin\theta' \cos\theta < \theta \sin\theta + \theta' \sin\theta,$$
$$\theta' \cos\theta \left(\theta \frac{\sin\theta'}{\theta'} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) < \theta \sin\theta (1 - \cos\theta').$$

Le second membre de cette dernière inégalité est positif. Le premier, au contraire, est négatif, car on a (§ I, n° 5)

$$\theta' > y' \text{ ou } \sin\theta', \quad \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} > \theta > \theta \frac{y'}{\theta'} = \theta \frac{\sin\theta'}{\theta'}.$$

On sait, au moins depuis Ptolémée (*), qu'au moyen du théorème de l'addition et de la relation (2), on peut faire des tables aussi exactes qu'on le veut, des fonctions sinus et cosinus.

On tire, de la relation (2),

$$\sin(\theta+\theta') - \sin\theta < \theta' \frac{\sin\theta}{\theta} < \theta',$$

ce qui prouve que sin θ est une fonction continue. D'après le n° précédent, il en est de même, par suite, de cos θ.

(*A continuer*). (P. M.).

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×9. *Sur une nouvelle définition du point de Lemoine* K *d'un triangle* ABC. Soient x, y, z les distances d'un point quelconque K aux côtés d'un triangle et α, α', β, β', γ, γ' les angles CAK, KAB, ABK, KBC, BCK, KCA. La perpendiculaire x partage le triangle KBC en deux triangles desquels on déduit facilement

$$a = x(\cot\beta' + \cot\gamma).$$

Par analogie

$$b = y(\cot\gamma' + \cot\alpha), \quad c = z(\cot\alpha' + \cot\beta).$$

Donc si

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2},$$

on a

$$\cot\beta' + \cot\gamma = \cot\gamma' + \cot\alpha = \cot\alpha' + \cot\beta = \frac{a^2+b^2+c^2}{2S} = 2\cot V.$$

Ces dernières égalités peuvent servir à définir le point de Lemoine.

(E. N. Barisien.)

10. *Constructions du centre de courbure de la parabole.* 1° *La normale au point* M *de la parabole rencontre l'axe en* P. *On élève la perpendiculaire en* P *à* PM *et on mène par* M *la parallèle à l'axe. Ces deux droites*

(*) Ptolémée trouve le rapport de la corde d'un degré à l'arc d'un degré grâce à la relation (2), en remarquant qu'il est compris entre les rapports analogues pour $\frac{3}{4}$ degré et pour $1\frac{1}{2}$ degré. Bien des manuels modernes de trigonométrie sont moins scrupuleux dans le calcul approximatif des valeurs des fonctions trigonométriques.

se coupent en Q. *La projetante de* Q *sur l'axe rencontre* MP *au centre de courbure* N.

2° *On prend le symétrique* M' *de* M *par rapport à l'axe. On mène la parallèle à l'axe par* M' *qui rencontre la droite joignant* M *au foyer* F, *au point* K. *La perpendiculaire élevée en* K *à* KM *rencontre la normale en* M *au centre de courbure* N.

Ces constructions sont elles-connues? (E. N. Barisien).

×88. *Identités algébriques.* On vérifie facilement les identités

$$n^6 = (2n-2)^5 + (n^2-1)^3 + (2n-2)^5 + (2n-6)^5 + (n^2-8n+15)^2 + (n^2-3n+2)^2 + (n^2-n)^2 + (3n-2)^2,$$

$$n^6 = (2n-3)^5 + (n^2-1)^3 + (2n-2)^5 + (2n-6)^5 + (n^2-8n+15)^2 + (n-1)^2 + (n^2-5n+5)^2 + (n^2+n-1)^2.$$

Il en résulte que toute puissance sixième $n^6 > 1$ est la somme de quatre cubes et de quatre carrés dont aucun n'est nul.

On trouve directement

$$2^6 = (1^3+1^3+2^3+3^3) + (1^2+1^2+3^2+4^2),$$
$$3^6 = (1^3+3^3+4^3+8^3) + (3^2+4^2+6^2+8^2),$$
$$5^6 = (4^3+7^3+8^3+24^3) + (4^2+5^2+20^2+21^2).$$

(de Rocquigny-Adanson.)

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons de Mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de première (latin-sciences ou sciences-langues vivantes) conformément aux programmes du 31 mai 1902, par P. Appell, Membre de l'Institut, et J. Chappuis, Professeur à l'École Centrale. Paris, Gauthier-Villars, 1903 (VIII-177 p. in 18). Prix: 2 fr. 75 c.

I.

Voici, d'après la Préface, quelques détails sur la composition de ce petit Volume, que nous recommandons vivement à nos lecteurs.

« La Partie géométrique relative aux *vecteurs* a été développée par des méthodes géométriques élémentaires qui offrent l'avantage d'habituer l'élève à raisonner directement sur les objets eux-mêmes, tandis que l'abus des méthodes de la Géométrie analytique détruit l'intuition et l'esprit d'invention. (*)

(*) A la page 51, ligne 5, on a imprimé par inadvertance, *au sixième du* pour *six fois le*.

Dans les principes de la Cinématique nous avons fait comprendre, par de nombreux exemples, la *relativité* de la notion de *mouvement* et nous avons supprimé complètement le mot de *mouvement absolu*. Pour la notion de *temps*, nous avons donné quelques développements sur l'égalité, l'addition, la multiplication et la division du temps, sur l'unité de temps et sur le pendule considéré comme instrument de mesure du temps. L'exposition de la Cinématique du point se trouve simplifiée, grâce à l'heureuse idée qu'on a eue d'introduire franchement la notion de dérivée dans les éléments. Il est alors aisé de définir d'une façon précise, d'abord le *vecteur vitesse*, puis le *vecteur accélération* considéré, par l'intermédiaire de l'hodographe, comme la vitesse de la vitesse.

Pour les mouvements élémentaires d'un solide translation, rotation, mouvement hélicoïdal [illegible] et une étude rigoureuses, puis nous avons [illegible] des exemples familiers [illegible] objets usuels. Dans l'application [illegible] de ces mouvements, nous avons donné [illegible] des glissières, [illegible] des pivots [illegible] mais il est [illegible] que le professeur [illegible] mais qu'il devra [illegible] dans les machines [illegible] et dans les appareils de physique.

[illegible] nous sommes [illegible] aux [illegible], le [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

« **32. Du mouvement; sa relativité.** Quand on dit qu'un corps est *en repos* ou *en mouvement*, on sous-entend toujours que ce repos et ce mouvement ont lieu *par rapport* à certains autres corps regardés comme fixes. Par exemple, quand on dit qu'une bille posée sur un billard reste immobile, cela signifie que les distances des divers points qui forment la bille aux divers points qui forment le billard sont invariables; quand la bille est en mouvement sur le billard, les distances de ses divers points aux points du billard varient avec le temps.

« Le billard est en repos par rapport à la maison qui le contient; celle-ci est en repos par rapport à la Terre; mais la Terre est en mouvement par rapport aux étoiles.

« Un train en marche est en mouvement par rapport à la Terre, aux maisons, parce que les distances des divers points formant le train à ceux qui constituent la Terre, les maisons, varient constamment.

« Une personne assise dans le train peut rester en repos à sa place, c'est-à-dire rester immobile par rapport au compartiment qu'elle occupe; elle est en mouvement par rapport à la Terre, aux maisons, etc.; cette personne peut changer de place dans son compartiment, elle est alors en mouvement par rapport au compartiment et aussi par rapport à la Terre.

« Les arbres, les champs situés sur le passage du train sont en repos les uns par rapport aux autres et par rapport à la Terre, mais ils sont en mouvement par rapport au train; le voyageur assis dans le train peut se donner facilement la sensation que le train est immobile et que le paysage se déplace: il observe alors le mouvement du paysage par rapport au train.

« Les exemples de corps qui sont ainsi en repos ou en mouvement, suivant qu'on étudie leurs relations de distances à un corps ou à un autre, sont tous analogues à ceux que nous venons de présenter. En voici quelques autres:

« Un homme reste debout immobile sur un trottoir roulant: il est en mouvement par rapport à la Terre. S'il se met à marcher, il sera en mouvement par rapport au trottoir; le plus souvent, il sera, en même temps, en mouvement par rapport à la Terre; cependant, si, tout en marchant sur le trottoir, il s'appuie de la main sur un arbre devant lequel passe le trottoir roulant, il pourra maintenir certaines parties de son corps, sa main, par exemple, immobiles par rapport à la Terre.

« La Terre est en mouvement par rapport au Soleil, à la Lune, aux planètes; ces divers corps sont en mouvement les uns par rapport aux autres.

« D'après cela, l'idée de mouvement est essentiellement relative; *quand on dit qu'un corps est en repos ou en mouvement, cette proposition n'a aucun sens si l'on n'indique pas quels sont les autres corps par rapport auxquels on définit le repos ou le mouvement.*

« **33. Repères d'un mouvement ou système de comparaison.** On appelle *repères d'un mouvement* ou *système de comparaison*, le système invariable par rapport auquel on étudie un mouvement. Ainsi, quand on dit qu'un voyageur est en repos ou en mouvement dans son compartiment, on prend comme système

de comparaison le compartiment. Quand on dit qu'un train est en marche, qu'une pierre abandonnée à elle-même tombe suivant la verticale, que le Soleil se lève ou se couche, on prend comme système de comparaison la Terre. En Astronomie et en Mécanique céleste, on étudie les mouvements de la Terre, des planètes, du Soleil par rapport à l'ensemble des étoiles dites *fixes* par définition; le système de comparaison est alors le système des étoiles fixes. » (*)

Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte von Dr G. Loria, ord. Professor der höheren Geometrie an der Universität Genua. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schutte, Oberlehrer am königlichem Gymnasium zu Neuwied. Leipzig, Teubner, 1902. (In-8° de xxi-744 pages avec 124 figures en 17 planches). — Prix: 26 mars (**)

« Par la nature même du sujet qu'il traite, l'ouvrage de M. Loria se prête assez difficilement à l'analyse. Tel un bon dictionnaire, qu'on ne peut guère recommander que d'une manière générale, en faisant connaître sommairement le genre de renseignements qu'on y trouve et en disant au lecteur: ouvrez de confiance le volume, lisez et vous verrez l'exactitude, la variété et la richesse des renseignements qu'il contient. C'est qu'en effet, la *Théorie et l'Histoire des courbes planes* par M. Loria est comme une espèce de dictionnaire des principales propriétés de ces courbes, dictionnaire aussi indispensable désormais au géomètre de profession qu'à l'historien des mathématiques.

M. Loria à cherché à remonter aussi haut que possible dans l'histoire de chaque ligne et à en faire connaître les plus lointaines origines. Après quoi, il donne les principales propriétés de cette ligne et indique les meilleures méthodes à employer pour son étude; mais il ne prétend pas donner la liste complète de tous les théorèmes qui lui sont propres.

(*) Comme le remarque M. Pasquier, dans un article récent de la *Revue des Questions scientifiques* (avril 1903, t. 53, pp. 501-516), « A propos du pendule de Foucault » article qui nous a suggéré celui-ci, il résulte de ce qui précède que « c'est un non-sens de parler du mouvement de la Terre sans dire par rapport à quels repères on considère ce mouvement. En réalité, ce mouvement est généralement rapporté aux étoiles considérées comme fixes. De ce point de vue, la Terre a un mouvement de rotation sur elle même. » Mais « il est tout aussi correct de dire que les étoiles tournent autour de la Terre que de dire que la Terre tourne par rapport aux étoiles; *dire l'un, c'est dire la même chose que de dire l'autre* ». — Sur la portée de l'expérience de Foucault, voir le § IV de cet article et, en particulier, la note de la page 518.

(**) Ce compte rendu est un extrait de celui que le P. Bosmans, S. J., a fait paraître dans la livraison d'avril 1903 de la *Revue des Questions scientifiques*. t. 53, pp. 603-609.

Voici un très court sommaire des sept sections dans lesquelles le livre est divisé :

I. Lieux plans et solides. 1. Droite. 2. Cercle. 3. Coniques.

II. Courbes du 3e ordre. 1. Généralités et classification. 2. Courbes rationnelles du 3e ordre. 3. Courbes cycliques du 3e ordre. 4. Cissoïde de Dioclès. 5. Généralisations de la cissoïde. 6. Parabole de Descartes. 7. Folium de Descartes. 8. Focale de Quetelet ou Strophoïde oblique. Logocyclique de Booth ou Strophoïde droite. 9. Généralisations de la Strophoïde. 10. Conchoïde de Sluse. 11. Courbes rationnelles du 3e ordre qui touchent la droite à l'infini. Courbe de Rolle. 12. Versiera. Visiera et Pseudo-Versiera. 13. Trisectrices de Mac-Laurin, de Catalan et de de Longchamps. 14. Cubique duplicatrice et Folium parabolique.

III. Courbes du 4e ordre. 1. Généralités et classifications. 2. Courbes rationnelles du 4e ordre. 3. Courbes elliptiques et bicirculaires du 4e ordre en général. 4. Spiriques de Persée; 5. Conchoïde de Nicomède. 6. Généralisations de la conchoïde et en particulier de la conchoïde du cercle. 7. Courbes du 4e degré tricuspidales. 8. Quelques podaires du 4e ordre. Hypocycloïde tricuspide. 9. Ovales de Descartes. 10. Courbes du 4e ordre polyzomales et symétriques. 11. Courbes du 4e ordre ayant un point de rebroussement. 12 Conchales. 13. Courbe de Cassini; 14. Courbes du 4e ordre avec trois points d'inflexion. 15. L'araignée et la Trisécante. 16. D'une courbe du 4e ordre transformée des coniques.

IV. Courbes algébriques d'un degré supérieur au 4e. 1. Transformées des coniques. 2. Astroïde et Scarabée. 3. Courbe de Watt. 4. Nephroïde, Atriphtaloïde et autres courbes du 6e et du 8e ordre. 5. « Trifolium pratense » et Cornoïde. 6. Une courbe du 8e ordre et une autre du 25e ordre.

V. Courbes algébriques communes à plusieurs ordres. 1. Généralités. 2. Paraboles de divers ordres. 3. Hyperboles de divers ordres. 4. Perles. 5. Courbes de Lamé. Courbes triangulaires symétriques. 6. Courbes polyzomales. 7. Courbes de Darboux. Courbes équilatères de Serret. 8. Rhodonées de Grandi. 9. Feuilles géométriques. 10. Ovales. Courbes triangulaires et orbiformes. 11. Multiplicatrice et Médiatrice. 12. Sectrices. 13. Courbes à centre ou à axe de symétrie. 14. Courbes autopolaires. Courbes anallagmatiques. Courbes de direction. 15. Géométrie des polynomes. 16. Généralités sur la rectification des courbes. 17. Courbes rectifiables par des arcs d'ellipse. Courbes de Serret. 18. Courbes rectifiables par des arcs de lemniscate. Spirale sinusoïdale. 19. Courbes de Lissajous.

VI. Courbes transcendantes. 1. Introduction. 2. Quadratrice. 3. Spirale d'Archimède. 4. Spirales de degrés supérieurs. 5 Autres spirales algébriques. 6. Spirale logarithmique et ses dérivées. 7. Clothoïde. 8. Cycloïde. 9. Epicycloïde. Hypocycloïdes. Développantes du cercle. 10. Pseudocycloïde. 11. Courbes de Delaunay et de Sturm. 12. Reptoires. 13. Courbes de Debeaune. 14. Courbes de Ribaucour. 15. Spirales de Norwich (ou de Sturm). Courbe d'Euler. 16. Courbes trigonométriques et hypertrigonométriques. 17. Logarithmique. Courbe hyper-

géométrique de Wallis. 18. Courbes extraordinaires (Ausserordentliche Kurven). 19. Courbe W. de Klein et de Lie. 20. Lignes de Mercator et de Sumner. 21. Tractrices. 22. Chaînettes. 23. Courbes élastiques. 24. Herpolhodie. Spirale de Poinsot. 25. Autres courbes de la Physique mathématique.

VII. Courbes dérivées. 1. Méthode des changements de coordonnées. 2. Courbes de poursuite. 3. Développées et développantes. 4. Généralisation. 5. Courbes parallèles. 6. Radiales. 7. Focales. 8. Podaires. Antipodaires. Podoïdes. 9. Courbes isoptiques et orthoptiques. 10. Courbes différentielles et intégrales. 11. Courbes transformées (Gegenkurven). 12. Sur un groupe de courbes dérivées.

Postface. Aperçu historique sur le développement de la théorie des courbes. » Courbes panalgébriques.

Parmi ceux dont les écrits ont été du plus grand secours à M. Loria, il cite en première ligne, avec justice, le plus ancien et le plus fidèle des collaborateurs de *Mathesis*, M. H. Brocard, l'auteur des *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (voir *Mathesis*, 1898, p. 32, 1899, p. 164).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1385.

(Voir *Mathesis*, (3), II, p. 216).

Si x est un nombre impair ou une puissance de 2, *l'équation*

$$2(x+1)y - x^3 + y^2 = 0$$

est impossible en nombres entiers. (Paulmier).

Solution par M. Emmerich. L'équation proposée peut s'écrire

$$(y+x+1)^2 = (x+1)^2 + x^3.$$

Or, toutes les solutions entières de l'équation

$$z^2 = w^2 + x^3$$

sont données par

$$z = \tfrac{1}{2}st(tu^3 + sv^3), \quad w = \tfrac{1}{2}st(tu^3 - sv^3), \quad x = stuv,$$

où l'on doit prendre u et v de même parité, à moins que l'un des deux facteurs s, t ne soit pair (Voir *Intermédiaire des Mathématiciens*, II, p. 309). En effet, pour que le produit $z^2 - w^2$ soit un cube, on doit avoir

$$z + w = st^2u^3, \quad z - w = s^3tv^3,$$

d'où les valeurs indiquées. Le cas actuel exigerait donc $w = x + 1$ ou

$$\tfrac{1}{2}st(tu^3 - sv^3) = stuv + 1. \qquad (1)$$

1° Si x est un nombre impair, s, t, u, v doivent être impairs, puis $st = 1$, $s = 1$, $t = 1$. On est donc ramené à

$$u^5 - v^5 = 2uv + 2,$$

ou bien à

$$(u - v)^5 + 3uv(u - v) = 2 + 2uv.$$

C'est impossible, car u, v devant être deux nombres impairs différents et $u > v$, on a

$$(u - v)^5 > 2, \quad 3uv(u - v) > 2uv.$$

2° Si $x = stuv$ était une puissance de 2, l'équation (1) exigerait qu'un multiple de 2 fût égal à l'unité.

Observons encore qu'une solution négative en x est impossible ; car on aurait

$$(q - 1)^2 - q^5 > 0,$$

q étant un nombre entier positif.

Solution par M. Plakhovo. En résolvant l'équation par rapport à y, on trouve

$$y = -(x + 1) \pm \sqrt{(x + 1)^2 + x^5}. \qquad (1)$$

La question est ramenée à l'étude de l'équation

$$(x + 1)^2 + x^5 = z^2. \qquad (2)$$

Celle-ci est impossible pour tous les nombres de la forme $x = 3p + 1$ ou $3p - 1$; car le premier membre aura la forme $3q - 1$, et tout carré parfait est M9 ou M3 + 1. En particulier, si $x = 2^n$, on a $x = M3 \pm 1$; donc l'équation proposée est impossible si x est une puissance de 2. Dans le dernier cas, l'équation (2) devient

$$2^{5n} + 2^{2n} + 2 \cdot 2^n + 1 = z^2;$$

le premier membre, si l'on prend pour base du système de numération 2^n ($n > 1$), peut s'écrire 1121 ; or, d'après un théorème de M. Rouché (NAM, 1860, p. 247), un tel nombre n'est jamais carré parfait.

Supposons maintenant $x = 2p + 1$; alors l'équation (2) peut s'écrire

$$8p^5 + 16p^2 + 14p + 5 = z^2. \qquad (3)$$

Tout carré impair étant de la forme M8 + 1, l'équation (3) exige : $6p + 4 = M8$; égalité impossible si p est impair.

Si l'équation (2) est possible, z est nécessairement impair et les trois nombres z, x, $x + 1$ sont premiers deux à deux. Or, en écrivant

$$x^5 = (z + x + 1)(z - x - 1)$$

et en supposant x impair, on voit que les deux facteurs $z+x+1$, $z-x-1$, qui sont impairs, sont premiers entre eux, car leur somme et leur différence ont le seul facteur commun 2.

Par conséquent, chacun de ces facteurs est un cube parfait, et l'on peut poser

$$z+x=1+u^3, \quad z-x-1=v^3, \quad x=uv,$$

d'où l'on déduit

$$u^3-v^3=2(uv+1)=(u-v)(u^2+uv+v^2).$$

Mais $u-v$ est au moins égal à 2, et $u^2+v^2>4$, donc l'égalité précédente est impossible.

Sur la même question, voir une note de M. Plakhovo, dans l'*Intermédiaire des mathématiciens*, 1903, p. 63-64 et dans les NAM, 1901, p. 190-192.

×Question 1393.

(Voir *Mathesis*, (3), II, p. 240).

Construire un triangle ABC, *connaissant le rayon r du cercle inscrit, la différence b — c de deux côtés et la médiane m_a relative au troisième côté.* (Cl. Thiry).

Solution par MM. Déprez, Emmerich et Mac-Alister-Loup. Désignons par D, D′ les points de contact de BC avec le cercle inscrit I et le cercle exinscrit I′; on sait que $DD'=b-c$ et que le milieu A′ de BC est aussi celui de DD′. Soit E la seconde extrémité du diamètre DE du cercle I. A étant le centre de similitude externe des cercles I et I′, la droite D′E qui joint les extrémités de deux rayons parallèles, passe par A.

D'où la solution suivante : construire le triangle rectangle EDD′ avec les côtés $2r$ et $b-c$; du milieu A′ de DD′ avec le rayon m_a, décrire une circonférence qui coupe la droite D′E en A; de A mener deux tangentes au cercle I.

On doit avoir

$$D'A>D'E, \quad A'A>A'G,$$

c'est-à-dire

$$m_a^2>4r^2+\tfrac{1}{4}(b-c)^2.$$

Remarques. I. On peut remplacer m_a par la hauteur h_a ou encore

r par r_a; dans le dernier cas, on observe que AD passe par la seconde extrémité E′ du diamètre D′I′ du cercle exinscrit, et qu'il suffit d'avoir

$$m_a > \tfrac{1}{2}(b-c).$$

(D. et E.).

II. Si l'on donne $b-c$, r et la longueur de la bissectrice de l'angle A, on devra mener par I dans l'angle AA′D une droite de longueur donnée.

(D.)

III. Si l'on donne $b+c$, r_b, m_a, on observe que la distance des points de contact D″, D‴ de BC avec les cercles exinscrits I″, I‴ est égale à $b+c$ et que son milieu est encore A′; de plus, si E″ est la seconde extrémité du diamètre D″I″ du cercle I″, la droite E″D‴ passe par A. On construira donc le triangle auxiliaire D″E″D‴, et le point A est à l'intersection de l'hypoténuse D‴E″ avec le cercle de centre A′ et de rayon m_a. Soit l la perpendiculaire abaissée de D″ sur D‴E″ ; pour que le problème soit possible, il faut avoir

$$m_a^2 > \frac{1}{4}l^2 \quad \text{ou} \quad > \frac{1}{4}\frac{4r_b^2(b-c)^2}{4r_b^2+(b-c)^2} \quad \text{et} \quad < \overline{A'E''}^2.$$

L'hypothèse extrême $2m_a = l$ correspond à un triangle spécial remarquable dans lequel la médiane AA′ est perpendiculaire à AD‴. En comparant les deux triangles semblables dans lesquels entrent m_a, h_a et r_b, l, on trouve $m_a^2 = h_a r_b$, ou en exprimant tout en fonction de a, b, c :

$$a^2 + a(b-c) - (b+c)^2 = 0.$$

Cette condition prend encore les formes

$$2a(p-c) = (b+c)^2, \quad 4p(p-a) = a(b-c),$$

$$2\cos\frac{A}{2} = \text{coséc C} - \text{coséc B}. \qquad \text{(E.)}$$

Solution par MM. Rose *et* Plakhovo. Soit k la distance du centre I à la médiane AA′; on a $k = \dfrac{(b-c)r}{2m_a}$ (*Mathesis*, 1902, p. 166); de plus $DA' = \dfrac{1}{2}(b-c)$.

Par suite, après avoir placé à angle droit les longueurs connues DA′ DI et décrit le cercle I, construisons un cercle de centre I et de rayon k et menons de A′ à ce second cercle une tangente sur laquelle nous

portons la longueur $A'A = m_a$; enfin, tirons de A deux tangentes au cercle inscrit.

Solution algébrique par M. Barisien. On a les équations

$$b - c = d, \tag{1}$$

$$2(b^2 + c^2) = 4m^2 + a^2, \tag{2}$$

$$pr^2 = (p - a)(p - b)(p - c). \tag{3}$$

L'équation (3) peut s'écrire :

$$4r^2(a + b + c) = (b + c - a)(a^2 - d^2),$$

d'où l'on tire la valeur

$$b + c = \frac{a(a^2 + 4r^2 - d^2)}{a^2 - 4r^2 - d^2}. \tag{4}$$

Comme $2(b^2 + c^2) = (b + c)^2 + (b - c)^2$, on déduit de (1) et (2) :

$$(b + c)^2 = 4m^2 + a^2 - d^2. \tag{5}$$

Par conséquent, l'équation qui donne a est

$$(4m^2 + a^2 - d^2)(a^2 - 4r^2 - d^2)^2 = a^2(a^2 + 4r^2 - d^2)^2.$$

Prenons pour inconnue $a^2 - d^2 = x^2$; nous aurons

$$(4m^2 + x^2)(x^2 - 4r^2)^2 = (x^2 + d^2)(x^2 + 4r^2)^2,$$

ou

$$x^4(4m^2 - d^2 - 16r^2) - 8r^2x^2(4m^2 + d^2) + 16r^4(4m^2 - d^2) = 0. \tag{6}$$

Les deux valeurs de x^2 sont réelles si

$$m^2d^2 + r^2(4m^2 - d^2) > 0. \tag{7}$$

Il y a trois cas à examiner.

1° $2m > d$. En considérant le produit et la somme des deux valeurs de x^2, on voit que ces deux valeurs sont positives lorsque $4m^2 > d^2 + 16r^2$ et qu'elles sont de signes contraires lorsque $4m^2 < d^2 + 16r^2$.

2° $2m = d$; l'équation (6) se réduisant à $x^2(x^2 + 4m^2) = 0$, le problème n'a pas de solution.

3° $2m < d$. Si l'on a l'inégalité (7), l'équation (6) donne pour x^2 deux valeurs négatives.

M. Lez a résolu la même question en rapportant la figure à deux axes rectangulaires, la droite BC et sa médiatrice.

Question 1394.

(Voir *Mathesis* (3), II, p. 264.)

Par les sommets d'un tétraèdre ABCD, *on mène des parallèles qui rencontrent les faces opposées aux points* A_1, B_1, C_1, D_1 ; *on divise les droites* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *en* A_2, B_2, C_2, D_2 *dans des rapports donnés* a, b, c, d.

1° *Démontrer que le volume du tétraèdre* $A_2B_2C_2D_2$ *est indépendant de la direction* AA_1, *et qu'il en est de même du volume* $A_1B_1C_1D_1$ (Voir *Mathesis* (1), V, p. 94 et (1), X, p. 253). 2° *Si* A'_2, B'_2, C'_2, D'_2 *sont les symétriques des points* A_2, B_2, C_2, D_2 *par rapport à* $A_1B_1C_1D_1$ *la somme algébrique des volumes des tétraèdres* $A'_2B'_2C'_2D'_2$ *et* $A_2B_2C_2D_2$ *vaut le double du volume* ABCD. 3° *Quelle relation doit-il exister entre* a, b, c, d *pour que* A_2, B_2, C_2, D_2 *soient dans un même plan?* 4° *Trouver dans cette hypothèse l'enveloppe du plan* $A_2B_2C_2D_2$, *les nombres* a, b, c, d *restant constants et la direction* AA_1 *étant variable.* (Déprez).

Solution par MM. Emmerich et Bastin. 1° Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les coordonnées barycentriques du point à l'infini sur AA_1 de sorte que

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0.$$

La droite AA_1 ayant pour équations

$$\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\frac{u}{\delta},$$

le point A_1 a pour coordonnées absolues

$$0,\quad -\frac{\beta}{\alpha},\quad -\frac{\gamma}{\alpha},\quad -\frac{\delta}{\alpha}.$$

Avec les coordonnées des points A_1, B_1, C_1, D_1 on forme le déterminant qui représente le rapport des volumes des tétraèdres $A_1B_1C_1D_1$, ABCD, savoir :

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\beta}{\alpha} & -\frac{\gamma}{\alpha} & -\frac{\delta}{\alpha} \\ -\frac{\alpha}{\beta} & 0 & -\frac{\gamma}{\beta} & -\frac{\delta}{\beta} \\ -\frac{\alpha}{\gamma} & -\frac{\beta}{\gamma} & 0 & -\frac{\delta}{\gamma} \\ -\frac{\alpha}{\delta} & -\frac{\beta}{\delta} & -\frac{\gamma}{\delta} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Le premier volume est donc triple du second.

Soient $AA_2 = a \cdot A_2A_1$, etc. On trouve pour coordonnées de A_2 :

$$(a+1)x = 1, \quad (a+1)y = -\frac{a\beta}{\alpha}, \quad (a+1)z = -\frac{a\gamma}{\alpha}, \quad (a+1)u = -\frac{a\delta}{\alpha}.$$

Si p désigne le produit des facteurs $(a+1)$, $(b+1)\cdots$, le déterminant des coordonnées des points A_2, B_2, C_2, D_2, après multiplication des lignes et division des colonnes respectivement par α, β, γ, δ, prend la forme

$$\frac{1}{p}\begin{vmatrix} 1 & -a & -a & -a \\ -b & 1 & -b & -b \\ -c & -c & 1 & -c \\ -d & -d & -d & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{p}\begin{vmatrix} 1+a & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1+b & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1+c & -c \\ 1+d & 1+d & 1+d & -1 \end{vmatrix}$$

V et V_2 représentant respectivement les volumes de ABCD et de $A_2B_2C_2D_2$, on en conclut

$$\frac{V_2}{V} = 1 - \Sigma\frac{a}{a+1}.$$

2° A_2' divise AA' dans le rapport $a' = -\dfrac{a}{2a+1}$, etc. En remplaçant dans la formule (1) a, b, c, d par a', b', c', d', on trouve pour le volume $A_2'B_2'C_2'D_2'$,

$$\frac{V_2'}{V} = 1 + \Sigma\frac{a}{a+1}.$$

Conséquemment,

$$V_2 + V_2' = 2V.$$

3° Si les points A_2, B_2, C_2, D_2 sont dans un même plan, $V_2 = 0$ et l'on a la relation (voir question 1380, p. 26)

$$\Sigma\frac{a}{a+1} = 1.$$

4° L'équation du plan $A_2B_2C_2D_2$ est

$$\Sigma\frac{ax}{\alpha(a+1)} = 0.$$

Remplaçant dans le dernier terme δ par $-(\alpha+\beta+\gamma)$, puis égalant à 0 les dérivées de l'équation par rapport à α, β, γ, on trouve

$$\frac{ax}{\alpha^2(a+1)} = \frac{by}{\beta^2(b+1)} = \frac{cz}{\gamma^2(c+1)} = \frac{du}{\delta^2(d+1)}.$$

Si on élimine $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entre ces dernières équations et $\Sigma \frac{ax}{\alpha(a+1)} = 0$, on obtient l'équation de l'enveloppe du plan :

$$\Sigma \sqrt{\frac{ax}{a+1}} = 0.$$

L'équation débarrassée des radicaux est, si l'on pose $\frac{ax}{a+1} = X$, ...

$$\Sigma X^4 - 4\Sigma X^3 Y + 6\Sigma X^2 Y^2 + 4\Sigma X^3 YZ - 40XYZU = 0.$$

Soient λ, μ, ν, ρ les coordonnées du plan $A_2B_2C_2D_2$, de sorte que

$$\lambda = \frac{a}{\alpha(a+1)}, \quad \mu = \frac{b}{\beta(b+1)}, \quad \ldots;$$

tirons de là les valeurs de $\alpha, \beta, \ldots$ pour les substituer dans les relations $\Sigma\alpha = 0$. Nous aurons ainsi l'équation de l'enveloppe de ce plan, en coordonnées tangentielles.

Question 1397.

(Voir *Mathesis*, (3), II, p. 280.)

Une droite AB ***de longueur constante l se meut entre deux droites données non situées dans un même plan. Trouver le lieu des foyers et des sommets des ellipses décrites par les différents points de la droite*** AB.

Solution par M. Audibert. Les coordonnées sont rectangulaires ; une des droites données est l'axe Oz, la perpendiculaire OC $= p$ qui leur est commune est l'axe OX, la seconde droite CB perpendiculaire à OC fait avec le plan XY un angle de tangente m.

Le point A est situé sur OZ, et OA $= \alpha$; le point B se meut sur CB et ses coordonnées sont p, y_1, my_1. Le point M dont la position sur AB est déterminée par la donnée $\frac{AM}{AB} = n$ a pour coordonnées

$$x = pn, \quad y = ny_1, \quad z = \alpha + n(my_1 - \alpha), \tag{1}$$

et l'on devra avoir

$$(my_1 - \alpha)^2 + y_1^2 + p^2 = l^2. \tag{2}$$

Eliminant y_1 et α entre (1) et (2) on a les équations de l'ellipse

$$\frac{(my - nz)^2}{(n-1)^2} + y^2 = n^2(l^2 - p^2), \quad x = pn. \tag{3}$$

Cette courbe se projette sur le plan YZ en vraie grandeur ; un foyer se projette donc en un foyer de la projection. Si donc $X = np$, Y, Z sont les coordonnées d'un foyer, on a, d'après des relations connues,

$$Y^2 - Z^2 = (l^2 - p^2)\left(\frac{2X}{p} - 1 - m^2\right),$$

$$YZ = m(l^2 - p^2)\frac{X}{p};$$

ces deux équations représentent le lieu des foyers.

La longueur δ d'un rayon vecteur de l'ellipse représenté par les équations $x = pn$, $z = ty$ est donnée par la formule

$$\delta^2 = \frac{n^2(n-1)^2(l^2 - p^2)(1 + t^2)}{(m - nt)^2 + (n-1)^2};$$

en égalant à zéro la dérivée de δ^2 par rapport à la variable t, on trouve

$$mnt^2 - t(m^2 - 2n + 1) - mn = 0; \qquad (4)$$

les deux racines de cette équation fixent les axes principaux de l'ellipse.

En remplaçant t par $\frac{y}{x}$, n par $\frac{x}{p}$ dans l'équation (4) et dans la première des équations (3), nous aurons deux égalités qui représentent le lieu des sommets des ellipses considérées.

×QUESTIONS D'EXAMEN

1097. Calculer $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, étant donné

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 3\beta = \operatorname{tg} 4\gamma = \operatorname{tg}(2\alpha + 3\beta + 4\gamma).$$

(A. G. Ioachimesco).

On trouve immédiatement

$$2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 2\alpha + K_1\pi = 3\beta + K_2\pi = 4\gamma + K_3\pi,$$

K_1, K_2, K_3 étant des nombres entiers quelconques, d'où

$$\alpha = K'\frac{\pi}{4}, \quad \beta = K''\frac{\pi}{6}, \quad \gamma = K'''\frac{\pi}{8}.$$

K', K'', K''' étant des entiers arbitraires, etc.

1098. Soit S la somme de $2n + 1$ nombres entiers consécutifs dont le premier est a. Démontrer que $S - a$ et $2(S + n) + 1$ ont un facteur commun. (Biddle).

1099. Soient B′, C′ les projections des extrémités de l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle ABC sur une droite quelconque AU menée par le sommet A de l'angle droit. Démontrer que la parallèle menée par B′ à AC et la parallèle par C′ à AB se rencontrent sur l'hypoténuse.

(Mac Leod).

1100. Une parabole et une ellipse ont un foyer commun, et le sommet de la parabole coïncide avec le centre de l'ellipse. L'ellipse est définie par son grand axe $2a$ et par sa distance focale $2c$.

Calculer, en fonction des quantités a et c : 1° la distance du foyer commun à l'un des points d'intersection, M, de l'ellipse et de la parabole ; 2° la distance de ce même foyer au point où la tangente en M rencontre le grand axe ; 3° la distance de ce foyer au point où la tangente en M à la parabole rencontre ce grand axe.

(*Baccalauréat*, Paris, 1900).

1101(*). Trois paniers A, B, C contiennent ensemble 70 prunes. On double le contenu de B et de C aux dépens de A, ensuite le contenu de A et C aux dépens de B, enfin le contenu de A et B aux dépens de C. Il se trouve alors que A contient le double de prunes de B et B le double de prunes de C. Chercher combien de prunes il y avait au commencement dans chaque panier.

1102. Un piéton part à 8 heures de la ville A pour se rendre à la ville B éloignée de A de 25 kilom. A 8 $\frac{1}{2}$ h., un autre piéton part de A et suit la route AC, prolongement de BA ; par heure il fait 1 kilom. de moins que le premier piéton. A 7 $\frac{1}{2}$ h. est parti de B un cycliste qui, en suivant la route BA, a rencontré à 9 heures le premier piéton ; il continue sans s'arrêter jusqu'à la ville A où il se repose pendant une demi-heure, parcourt la route AC sur laquelle il rencontre le second piéton à 11 heures. Chercher la vitesse de chacun des trois voyageurs.

Equations : $x + 2y = 25$, $\frac{7}{2}y - \frac{5}{2}(x-1) = 25$.

1103. Pour quelles valeurs de m le nombre 5 est-il compris entre les deux racines de l'équation

$$4x^2 - 7x + 5m = 0 ?$$

Le premier membre de l'équation doit être négatif pour $x = 5$; d'où $m < -13$.

(*) Les questions 1101-1104 sont tirées du recueil Bardey-Piehzker (*Mathesis*, III (3), p. 49).

1404. Cinq ouvriers A, B, C, D, E travaillant dans un même atelier conviennent de contribuer chacun pour la même part au chauffage de la pièce. A, B, C, D ayant fourni respectivement 9, 6, 3, 2 quintaux de charbon et E ayant payé pour sa part 8 francs, on demande d'établir le compte de chacun.

Chacun aurait dû fournir $\frac{9+6+3+2}{5} = 4$ quintaux de charbon ; le quintal coûte donc $\frac{8}{4} = 2$ fr. A et B ont droit à $2 \times 9 - 8 = 10$ fr. et $2 \times 6 - 8 = 4$ fr. C et D doivent encore payer $8 - 2 \times 3 = 2$ fr. et $8 - 2 \times 2 = 4$ fr.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1415bis. Soient P_a et P'_a, P_b et P'_b, P_c et P'_c, les projections d'un point P sur les bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle ABC. Les hyperboles équilatères circonscrites aux rectangles $PP_aAP'_a$, $PP_bBP'_b$, $PP_cCP'_c$ ont, en outre du point P, trois autres points communs M, M', M''. Ces points sont situés sur la circonférence ABC ; P est l'orthocentre du triangle MM'M'', et les hauteurs de ce triangle sont tangentes à une même hypocycloïde à trois rebroussements indépendante de la position du point P. (A. Gob.)

Cette question remplace 1415 qui est identique à 1393.

1419. Le lieu du centre d'une ellipse de grandeur donnée (demi axes a et b) normale à deux droites rectangulaires fixes est une sextique fermée. Evaluer l'aire de cette courbe. (A. H. Couvert.)

1420. Trouver les solutions entières de l'équation

$$x^2 = y^2(1 + 2z + z^2 + z^3).$$

(Paulmier.)

1421. On considère la figure formée par un rectangle ABCD et les trois triangles équilatéraux BCE, CDF, DAG construits extérieurement sur les côtés BC, CA, DA. Le périmètre de la ligne brisée (non fermée) BECFDGA étant donné, quel doit être le rapport AB : BC pour que ce périmètre en tournant autour de AB engendre une surface maximum ?

1422. On considère les hyperboles qui touchent les côtés d'un triangle fixe ABC et deux transversales réciproques variables m, m' de ce triangle. Lorsque le centre d'une telle hyperbole parcourt une droite donnée, trouver le lieu des pôles trilinéaires M, M' des transversales réciproques m, m'. Démontrer que la droite MM' passe par un point fixe. (Boutin).

THÉORIE PUREMENT ANALYTIQUE DES FONCTIONS CIRCULAIRES D'APRÈS SEIDEL.

(*Suite et fin*, voir pp. 81-84, 109-112).

III. Définition et propriété fondamentale dans tous les cas.

1. *Les deux conventions fondamentales.* Nous avons défini $\cos\theta$ et $\sin\theta$ dans le § I pour les valeurs de θ de 0 à $\frac{1}{2}\pi$.

Nous les définissons pour les autres valeurs réelles de θ au moyen des deux conventions fondamentales :

$$\text{I.}\quad \cos(-\theta)=\cos\theta, \qquad \sin(-\theta)=-\sin\theta;$$
$$\text{II.}\quad \cos(\theta+\pi)=-\cos\theta, \qquad \sin(\theta+\pi)=-\sin\theta.$$

La convention I donne d'abord $\cos\theta$ et $\sin\theta$ de 0 à $-\frac{1}{2}\pi$, au moyen des valeurs de ces fonctions de 0 à $\frac{1}{2}\pi$.

Au moyen de la convention II, on déduit de ces valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, quand θ varie de $-\frac{1}{2}\pi$ à 0, les valeurs de ces fonctions, de $-\frac{1}{2}\pi+\pi=\frac{1}{2}\pi$ à $0+\pi=\pi$.

Cette même convention donne ensuite $\cos\theta$ et $\sin\theta$, de π à 2π, de 2π à 3π, et ainsi de suite indéfiniment.

La première convention permet enfin de trouver les deux fonctions pour toutes les valeurs négatives de θ, non encore considérées.

Comme corollaire de la seconde convention on a évidemment

$$\cos(\theta+n\pi)=(-1)^n\cos\theta, \quad \sin(\theta+n\pi)=(-1)^n\sin\theta.$$

2. *Formules donnant* $\cos(\theta+\frac{1}{2}\pi)$, $\sin(\theta+\frac{1}{2}\pi)$. On trouve sans peine, d'après les deux conventions fondamentales,

$$\cos(\theta+\tfrac{1}{2}\pi)=-\cos(\theta+\tfrac{1}{2}\pi-\pi)=-\cos(\theta-\tfrac{1}{2}\pi)=-\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\theta),$$
$$\sin(\theta+\tfrac{1}{2}\pi)=-\sin(\theta+\tfrac{1}{2}\pi-\pi)=-\sin(\theta-\tfrac{1}{2}\pi)=+\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)$$

et, d'après le § II, n° 3, *si* θ *est compris entre* 0 *et* $\frac{1}{2}\pi$,

$$\cos(\theta+\tfrac{1}{2}\pi)=-\sin\theta,$$
$$\sin(\theta+\tfrac{1}{2}\pi)=-\cos\theta.$$

3. *Propriété fondamentale.* On a, pour toute valeur de θ et de θ', les relations

$$\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta',$$
$$\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta.$$

En effet, soient $\theta = \alpha + n\pi$, $\theta' = \alpha' + n'\pi$, α et α' étant compris entre 0 et π, et n et n' des nombres entiers positifs ou négatifs. Les formules à démontrer deviendront

$$(-1)^{n+n'} \cos(\alpha + \alpha') = (-1)^{n+n'} \cos\alpha \cos\alpha' - (-1)^{n+n'} \sin\alpha \sin\alpha',$$
$$(-1)^{n+n'} \sin(\alpha + \alpha') = (-1)^{n+n'} \sin\alpha \cos\alpha' + (-1)^{n+n'} \sin\alpha' \cos\alpha,$$

ou

$$\cos(\alpha + \alpha') = \cos\alpha \cos\alpha' - \sin\alpha \sin\alpha',$$
$$\sin(\alpha + \alpha') = \sin\alpha \cos\alpha' + \sin\alpha' \cos\alpha.$$

Soient 1° $\alpha = \frac{1}{2}\pi + \beta$, $\alpha' = \frac{1}{2}\pi + \beta'$, β et β' étant au plus égaux à $\frac{1}{4}\pi$. Les égalités précédentes deviendront

$$-\cos(\beta + \beta') = -\sin\beta(-\sin\beta') - \cos\beta\cos\beta',$$
$$-\sin(\beta + \beta') = -\cos\beta\sin\beta' - \cos\beta'\sin\beta,$$

vraies d'après le § II, 2. Le théorème est donc démontré dans ce cas.

2° $\alpha = \frac{1}{2}\pi + \beta$, $\alpha' = \pi - \gamma'$, γ' étant au plus égal à $\frac{1}{4}\pi$. 3° $\alpha = \pi - \gamma$, $\alpha' = \frac{1}{2}\pi + \beta'$, γ étant au plus égal à $\frac{1}{4}\pi$. 4° $\alpha = \pi - \gamma$, $\alpha' = \pi - \gamma'$. Démonstrations analogues.

La propriété fondamentale est donc établie dans tous les cas.

4. Remarque. I. La convention II du n° 1 et les formules donnant $\cos(\frac{1}{2}\pi \pm \theta)$, $\sin(\frac{1}{2}\pi \pm \theta)$, *même pour* θ *quelconque*, sont des cas particuliers de la propriété fondamentale, comme il est facile de le voir.

II. On peut éviter de se servir des conventions fondamentales du n° 1, et définir $\cos\theta$, $\sin\theta$, quand θ surpasse $\frac{1}{2}\pi$ ou est négatif, par une voie analytique analogue à celle qui a été employée au § I. Il suffit pour cela de considérer non seulement les valeurs non négatives de (x_1, y_1), (x_2, y_2) etc., mais d'autres solutions des équations $(x + yi) = (x_1 + y_1 i)^2$, $(x_1 + y_1 i) = (x_2 + y_2 i)^2$, etc. Mais ce procédé est beaucoup plus pénible que celui que nous venons d'exposer et, au fond, il est tout aussi arbitraire. Il y a d'ailleurs toujours quelque chose d'arbitraire dans toutes les définitions de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, pour θ non compris entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, que ces définitions soient analytiques ou géométriques, élémentaires ou non.

III. Les fonctions circulaires autres que les cosinus et les sinus sont

définies et étudiées le plus simplement au moyen des relations suivantes : $tang\ \theta = sin\ \theta : cos\ \theta$, $cot\ \theta = cos\ \theta : sin\ \theta$, $séc\ \theta = 1 : cos\ \theta$, $coséc\ \theta = 1 : sin\ \theta$.

Historiquement, c'est d'ailleurs sous forme de quotients qu'elles se sont introduites dans la science appliquée, en astronomie (*). (P. M.).

×EXERCICES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

1. A un secteur circulaire donné OAB, inscrire un rectangle MNPQ semblable à un rectangle donné *mnpq*.

a) Les côtés MN, PQ sont parallèles à la corde AB.

Construire sur AB un rectangle ABCD semblable à *mnpq ;* les droites OC, OD rencontreront la circonférence en deux sommets du rectangle cherché.

b) Le côté MN repose sur OA, et les sommets P, Q sont situés respectivement sur l'arc AB et sur le rayon OB.

Soit $m'q'$ une droite perpendiculaire à OA et rencontrant OA, OB en m', q'; construire sur $m'q'$ comme homologue de mq un rectangle $m'q'n'p'$ semblable $mqnp$; la droite Op' passera par le sommet cherché P.

2. A un segment circulaire donné ABC, inscrire un rectangle semblable à un rectangle donné.

Le milieu de la corde AB est un centre de similitude du rectangle cherché et d'un rectangle semblable construit sur la corde AB.

3. Trouver le lieu d'un point M dont les distances à des plans donnés P, Q, R, .., multipliées par des longueurs données $p, q, r, \ldots$ aient une somme donnée.

Il faut convenir pour chacun des plans P, Q, R, ... d'une *région positive* des perpendiculaires et d'une région négative.

Soient MP', MQ' les perpendiculaires sur les plans P, Q. Le plan MP'Q' est perpendiculaire à l'intersection des plans P, Q en un certain

---

(*) Soit dit incidemment, il y aurait avantage, pensons-nous, à enseigner la trigonométrie dans l'ordre suivant : I. Les fonctions trigonométriques dans le premier quadrant et la résolution des triangles rectangles. II. Les fonctions trigonométriques dans les deux premiers quadrants et la résolution des triangles quelconques. III. La trigonométrie générale. On peut placer après ou avant celle-ci la trigonométrie sphérique. Il est inutile de parler d'angles négatifs ou supérieurs à deux droits aux élèves qui ne feront pas d'études mathématiques à l'université.

point A. Prenons sur AP', AQ' (dans un sens ou l'autre, suivant les cas) les longueurs $AB = p$, $AC = q$; alors la somme $p.MP' + q.MQ'$ représente le double de la somme des surfaces des triangles MAB, MAC ou le double de la somme des surfaces CAB, MCB. Par conséquent, si l'on mène par l'intersection des plans P, Q un plan Q_1 parallèle à CB, la somme $p\,MP' + q.MQ'$ peut être remplacée par $q'.MQ'_1$, où $q' = CB$ et où MQ'_1 est la perpendiculaire abaissée de M sur le plan Q_1.

En continuant ainsi on réduira la somme $p.MP' + q.MQ' + \cdots$ à un seul terme; donc le lieu cherché est un plan.

4. A un triangle donné ABC inscrire un rectangle MNPQ dont un côté PQ repose sur BC et tel qu'en tournant autour de BC il engendre un volume maximum.

Si l'on pose $NM = x$, $NP = y$, la question revient à chercher le maximum du produit xy^2 sous la condition $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$. Or, $xy^2 = ah^2\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{h}\right)^2$; donc il faut poser $\frac{y}{h} = \frac{2x}{a} = \frac{2}{3}$.

5. Si deux cercles O, O' se touchent extérieurement et touchent intérieurement un troisième cercle O'', la somme des rayons de O et O' est toujours plus petite que le rayon du cercle O''. (E. N. Barisien).

6. Etant donné un quadrilatère convexe ABCD, par un point E de AD on mène jusqu'à AC, EF parallèle à DC, et jusqu'à DB, EH parallèle à AB. On mène encore FG parallèle à AB jusqu'en CB, et l'on joint GH.

Pour quelle position de E entre A et D le parallélogramme EFGH a-t-il une aire maxima? (E. N. Barisien).

Soit $AE = x.AD$; alors $EF = x.DC$, et $FG = (1 - x).AB$ et l'aire $EFGH = x(1 - x)\,CD.AB \sin(CD, AB)$. Le maximum cherché correspond à $x = \frac{1}{2}$.

7. Chercher la condition nécessaire pour que la hauteur AA', la médiane BB' et la bissectrice CC' concourent en un même point.

On doit avoir

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1,$$

ou

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

La même condition peut prendre la forme

$$\frac{\cot B}{\cot C}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}=1, \quad \text{ou} \quad \cot C=\frac{\cos B}{\sin A}.$$

8. Chercher la condition pour que le triangle antipodaire du centre de gravité G d'un triangle ABC soit isoscèle ou pour qu'il soit rectangle.

(Emile Weber, Athénée de Liége).

a) Les angles AGC, AGB étant égaux, la médiane AG est la bissectrice de l'angle CGB, d'où l'on conclut que le triangle ABC lui-même est isoscèle.

b) L'angle BGC étant droit, l'égalité $\overline{BC}^2=\overline{BG}^2+\overline{CG}^2$ conduit à la condition $5a^2=b^2+c^2$.

9. Trouver la condition pour que les symédianes BK, CK d'un triangle ABC soient rectangulaires.

On doit avoir (m_a, m'_a, ... désignant les longueurs des médianes et des symédianes) :

$$a^2=\overline{BK}^2+\overline{CK}^2=m_b'^2\left(\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^2+m_c'^2\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^2$$

$$=m_b^2\frac{4a^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}+m_c^2\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2+c^2)^2},$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2=(2a^2+2c^2-b^2)c^2+(2a^2+2b^2-c^2)b^2,$$

$$a^4=b^4-4b^2c^2+c^4.$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

12. *Piège*(*). On a successivement

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x,$$

$$(\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}=(1-\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\cos^3 x=(1-\sin^2 x)^{\frac{3}{2}},$$

$$\cos^3 x+3=(1-\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}+3,$$

$$(\cos^3 x+3)^2=[(1-\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}+3]^2;$$

d'où, pour $x=\frac{1}{2}\pi$, $\cos x=0$, $\sin x=1$,

$$3^2=3^2;$$

(*) Nous avons égaré le nom de l'auteur de ce joli piège.

pour $x = \pi$, $\cos x = -1$, $\sin x = 0$,

$$(-1+3)^2 = (1+3)^2 \quad \text{ou} \quad 4 = 16.$$

×**13**. *Sur la question* 1287 (Voir *Mathesis*, p. 32). 1° Cette question a été proposée par M. V. Cristesco dans la *Gazeta Matematica*, t. VI, p. 28, sept. 1900, et deux solutions en ont paru dans le même journal, t. VIII, p. 112. L'une d'elles se rapproche de celle de M. Bastin; voici l'autre, qui ne diffère pas de celle dont l'auteur accompagnait l'envoi de l'énoncé :

Supposons $A'B' = A'C'$ sans que l'on ait $AB' = AC'$, et soit B'' le symétrique de C' par rapport à la bissectrice AA'; ce point est situé sur AC, et à cause de $A'B' = A'C' = A'B''$, l'angle $A'B'A = A'B''C = A'C'B$. Il résulte de là que *la circonférence circonscrite au triangle* $A'B'C'$ *passe par le sommet* A. Soit D le second point de rencontre de la circonférence $A'B'C'$ avec BC; nous aurons

$$BA'.BD = BC'.BA, \quad CA'.CD = CB'.CA.$$

Tirons de ces égalités les valeurs de BD, CD et posons $BD + DC = a$; il vient

$$\frac{BC'.c}{BA'} + \frac{CB'.b}{CA'} = a,$$

équation d'où l'on déduit aisément

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}. \qquad (1)$$

2° La solution suivante nous a été communiquée par M.A.C.

Désignons par x, y les angles $AB'C'$, $CB'A'$. Le triangle $AB'C'$ donne

$$\frac{\sin x}{\sin(A+x)} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{bc}{a+b} : \frac{bc}{a+c} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin A + \sin B},$$

d'où l'on tire tang x, puis, par analogie tang y :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin A + \sin C}{1 + \cos C - \cos A}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{\sin A + \sin C}{1 + \cos A - \cos C}.$$

L'angle $A'B'C'$ résulte de

$$\operatorname{tg} A'B'C' = -\operatorname{tg}(x+y) = 2\,\frac{\sin A + \sin C}{1 + 2\cos B}. \qquad (2)$$

On voit aisément que l'égalité $A'C' = A'B'$ revient à

$$\frac{\sin A + \sin C}{1 + 2\cos B} = \frac{\sin A + \sin B}{1 + 2\cos C}.$$

On en déduit

$$\sin C - \sin B + 2 \sin A (\cos C - \cos B) + \sin 2C - \sin 2B = 0;$$

le facteur $\sin \frac{1}{2}(B - C)$ commun aux trois termes étant supprimé, il reste

$$2 \cos \frac{B+C}{2} - 4 \sin A \sin \frac{B+C}{2} + 4 \cos A \cos \frac{B-C}{2} = 0,$$

ce qui se ramène à la relation (3) de la p. 34.

Les angles A′, B′, C′, du triangle A′B′C′ vérifiant l'identité

$$\operatorname{tg} A' + \operatorname{tg} B' + \operatorname{tg} C' = \operatorname{tg} A' \operatorname{tg} B' \operatorname{tg} C',$$

on obtient, en substituant la valeur (2) et les valeurs analogues, l'identité suivante, où les lettres S et P signifient respectivement *somme* et *produit* :

$$S \frac{\sin A + \sin B}{1 + 2 \cos C} = 4P \frac{\sin A + \sin B}{1 + 2 \cos C},$$

il serait intéressant de vérifier directement cette relation.

3° La formule (1) est susceptible de plusieurs transformations. On en déduit d'abord, I désignant le centre du cercle inscrit

$$\frac{IA'}{AI} = \frac{IB'}{BI} + \frac{IC'}{CI}.$$

Remplaçons les numérateurs a, b, c par $2p - (b + c)$, $2p - (a + c)$, $2p - (a + b)$; on obtient

$$\frac{1}{2p} = \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c}.$$

Soient r. r', r'', r''' les rayons des cercles tritangents.

De $(a + b + c)\, r = (b + c - a)\, r'$ on tire

$$\frac{a}{b+c} = \frac{r' - r}{r' + r};$$

on en conclut que l'égalité (1) est équivalente à

$$\frac{r' - r}{r' + r} = \frac{r'' - r}{r'' + r} + \frac{r''' - r}{r''' + r}.$$

Enfin la formule $a + 4p \cos A = 0$ donne $r = -2R \cos A$.

Voici encore une interprétation de la formule (1). Les coordonnées barycentriques de I étant a, b, c, celles de son complémentaire I_1, centre de gravité du périmètre de ABC, sont $b+c, c+a, a+b$; les coordonnées normales de l'inverse I_2 de I_1 par rapport à ABC sont donc $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$. L'équation (1) exprime que ce point I_2 est situé sur la droite B'C', que l'isotomique de I_1 est sur la droite ayant pour équation $ax = by + cz$ et que la polaire trilinéaire de I_1 passe par le centre du cercle tritangent I_a. (J. N.)

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES.

21. Traité de Géométrie par C. GUICHARD, professeur à l'Université de Clermont. Deuxième partie. Compléments. Paris, Librairie Nony, 1903 (480 p. in-8° et 284 figures). Prix:

Table des matières. PREMIÈRE SECTION. Complément au livre III. I. La géométrie sur une droite. (Segments de droite, division harmonique, rapport anharmonique, divisions homographiques, involution). II. Géométrie des faisceaux de droites. (Angles; faisceaux harmoniques, homographiques, en involution). III. Applications. IV. Transversales. (Théorèmes de Ménélaüs, Céva, Pappus, Pascal). V. Pôle et polaires par rapport à un cercle. Involution sur le cercle. Figures polaires réciproques. VI. Cercles orthogonaux. Faisceaux de cercles. VII. Inversion. VIII. Cercles tangents. X. Propriétés diverses. (Droite de Simson. Cercle des neuf points). Exercices.

DEUXIÈME SECTION. Compléments aux livres V et VI. I. Polygones gauches. II. Faisceaux de plans. III. Trièdres et tétraèdres (Quadruples hyperboloïdes). IV. Projections orthogonales. V. Eléments de la Théorie des vecteurs (Résultante de vecteurs concourants. Théorie des moments. Systèmes de vecteurs. Systèmes équivalents. Couples. Vecteurs parallèles). VI. Projections centrales (Propriétés générales. Représentation de l'espace sur un plan. Figures homologiques). Exercices.

TROISIÈME SECTION. Compléments au livre VII. I. Pôle et plan polaire par rapport à une sphère. II. Figures inverses dans l'espace. III. Sphères orthogonales. IV. Sphères tangentes. V. Géométrie sur la sphère (Plus court chemin entre deux points. Polygones sphériques. Cercles sur la sphère. Aire des polygones sphériques. Constructions sur la sphère. Cercles orthogonaux et cercles tangents). Exercices.

QUATRIÈME SECTION. Compléments au livre VIII. I. Hyperbole. II. Directrices des coniques. III. Projection orthogonale d'un cercle. IV. Sections planes du

cône de révolution. V. Propriétés générales des coniques (Propriétés projectives, théorèmes de Pascal et de Brianchon. Centre et diamètres. Sections planes d'un cône circulaire. Génération des coniques au moyen de formes homographiques. Figures polaires réciproques par rapport à une conique). Exercices.

Cinquième section. Géométrie de situation. Mesure des aires. I. Polygones plans. II. Polyèdres. III. Théorème d'Euler. IV. Polyèdres réguliers convexes. V. Mesure des aires.

Nous recommandons volontiers aux lecteurs de *Mathesis* ce volume qui développe sous une forme claire et méthodique des compléments indispensables des éléments de géométrie. La table des matières que nous venons de transcrire indique suffisamment quelles sont les matières traitées. On peut regretter l'absence d'un aperçu de la géométrie récente du triangle. (J. N.)

32. Lezioni di Calcolo infinitesimale dettate da Ernesto Pascal, Professore ordinario nella R. Università di Pavia, etc. I. Calcolo differenziale, II. Calcolo integrale. Seconda edizione completamente riveduta. Milano, Hoepli, 1902-1903 (XII-811 pp. in 18; VIII-329 pp.). Prix : 3 fr. + 3 fr. cartonné.

Nouvelle édition, soigneusement revue pour beaucoup de points de détails, d'un cours élémentaire de calcul infinitésimal, déjà très bon au point de vue des principes, quand il a paru la première fois. Voici un aperçu des matières qui y sont traitées: I. 1. Limites; continuité; fonctions d'une variable. 2. Dérivées. 3. Développements en série. 4. Maxima et minima. 5. Formes indéterminées. Déterminants fonctionnels. Wronskiens. 6. Géométrie infinitésimale. II. 1. Intégrales définies et indéfinies. 2. Intégrabilité des fonctions. 3. Calcul des intégrales indéfinies ou définies. 4. Intégrales multiples. 5. Différentielles totales du premier ordre et du premier degré. 6. Applications géométriques du calcul intégral. 7. Equations différentielles. (P. M.)

33. Complementi di matematica ad uso dei chimici et dei naturalisti di G. Vivanti, Prof. ord. nella R. Università di Messina. Milano, Hoepli, 1903. (Cartonné, in-18 de X-382 pp.). Prix : 3 francs.

Sommaire. Algèbre(combinaisons, binome, déterminants et équations linéaires, séries). Géométrie analytique (coordonnées, point, droite, plan, coniques, quadriques, autres courbes planes, hélice). Calcul infinitésimal (dérivées, séries, applications géométriques, maxima et minima, intégrale, équations différentielles). Calcul des probabilités (principes, théorème de Bernoulli, théorie des erreurs, méthode des moindres carrés). Mécanique (mouvement d'un point; systèmes; centre de gravité; principes des vitesses virtuelles, de d'Alembert et de la conservation de l'énergie; potentiel). Thermodynamique et mécanique chimique (principes de Mayer et de Carnot; gaz parfaits; équation aux dérivées partielles de T; équilibre; vapeurs saturées; vitesses des réactions).

Le plan de l'ouvrage est excellent, mais hélas, l'auteur, en plus d'un endroit, sans renoncer absolument à la rigueur, a dû, ou a cru devoir se contenter de montrer, au lieu de démontrer. (P. M.)

24. Grundriss der Differential- und Integral Rechnung. I. Theil: **Differential-Rechnung** von Dr L. Kiepert. Mit 171 figuren im texte. Hannover, 1901. Helwingsche Verlagsbuchhandlung. (In-8° de XVII-750 p.).

Neuvième édition augmentée et refaite du manuel de Stegemann. On y trouve beaucoup d'exemples et d'applications; mais malheureusement aussi des idées fausses sur les infiniment petits.

25. Cours d'analyse infinitésimale par Ch. de la Vallée-Poussin, Professeur à l'Université de Louvain, correspondant de l'Académie Royale de Belgique. Tome I. Louvain, Uystpruyst, Paris, Gauthier-Villars, 1903 (XIV-372 pp. in-8°). Prix: 12 francs.

Sommaire. Introduction (limites, fonctions, continuité). 1. Dérivation des fonctions explicites. 2. Formule de Taylor, formes indéterminées, maxima et minima. 3. Fonctions de plusieurs variables. 4. Fonctions implicites. Changements de variables. 5-6. Intégrales indéfinies et définies. 7-8. Géométrie infinitésimale. 9. Calcul des aires, des arcs et des volumes. 10. Séries.

Caractérisque de l'ouvrage: la rigueur. En réalité, c'est déjà une seconde édition, la première a été autographiée. Voir, dans le n° de mai 1903 du *Bulletin des sciences mathématiques*, pp. 121-126 une analyse par M. J. Tannery de ce consciencieux manuel.

26. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Eine Revision der Principien. Vorlesung gehalten während des Sommersemesters 1901 von F. Klein. Ausgearbeitet von Conrad Müller. Leipzig, Teubner 1902 (VIII-468 pages autographiées in-4°). Prix:

Voir dans le n° de juillet 1902 du *Bulletin des sciences mathématiques*, pp. 185-198, une analyse par M. J. Tannery de ce livre suggestif, mais dont il est difficile de donner une idée en peu de lignes.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1809.

(Voir *Mathesis*, (3), t. II, p. 56 et t. III, p. 93).

Un point A *décrit une courbe passant par l'origine de deux axes rectangulaires; on voit facilement que la droite qui joint les projections* M *et* N *du point* A *sur les axes contient le point* B *dont les coordonnées sont l'abscisse et l'ordonnée moyennes de la courbe* C *comptées depuis l'origine jusqu'en* A. *Déterminer* 1° *l'équation de la courbe* C *pour laquelle la droite* AB *est perpendiculaire à* MN *pour toutes les positions de* A *sur cette courbe;* 2° *l'équation de la courbe* C *pour laquelle le point* B *décrit la parabole représentée par* $y^2 = 2px$. (L. Collette).

Solution et généralisation de la seconde partie par M. A. Demoulin. Soient, comme à la page 93, (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées des points A et B. On a

$$x_1 y_2 = \int_0^{x_1} y\,dx,$$

$$x_2 y_1 = x_1 y_1 - \int_0^{x_1} y\,dx,$$

et si l'on pose

$$\int_0^{x_1} y\,dx = u, \quad \text{d'où} \quad y_1 = \frac{du}{dx_1}, \tag{1}$$

ces égalités s'écrivent

$$y_2 = \frac{u}{x_1},$$

$$x_2 = x_1 - u\frac{dx_1}{du}.$$

Proposons-nous de déterminer la courbe C de manière que le point B décrive la courbe $x_2 = f(y_2)$. En portant dans cette équation les valeurs ci-dessus de x_2 et de y_2, il vient

$$\frac{x_1 du - u dx_1}{du} = f\left(\frac{u}{x_1}\right),$$

ou

$$\frac{x_1 du - u dx_1}{u^2} = \frac{du}{u^2} f\left(\frac{u}{x_1}\right),$$

ou encore

$$\frac{d\left(\frac{x_1}{u}\right)}{f\left(\frac{u}{x_1}\right)} = d\left(\frac{1}{u}\right),$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{u} + c = \int \frac{d\left(\frac{x_1}{u}\right)}{f\left(\frac{u}{x_1}\right)}. \tag{2}$$

Cette équation donnera x_1 en fonction de u et l'égalité (1) permettra d'exprimer y_1 en fonction de la même variable.

Lorsque le point B est assujetti à décrire la parabole $y_2^2 = 2px_2$, on trouve

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{u^2 + cu^3}{\frac{2p}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ y_1 &= \left(\frac{u^2 + cu^3}{\frac{2p}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2p}{2u + 3cu^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ou, après élimination de u et toutes réductions faites,

$$9pc^2x_1^2y_1^3 - 6p^2cx_1^3 + 3px_1y_1 - 2y_1^3 = 0. \qquad (4)$$

Quant aux coordonnées (x_2, y_2), elles ont pour valeurs :

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{3\left(\frac{2p}{3}\right)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{u} + c\right)^{\frac{2}{3}}} \\ y_2 &= \left(\frac{2p}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{u} + c\right)^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

L'étude de la courbe (4) présente un certain intérêt(*).

Si $c = 0$, on obtient la parabole $y_1^2 = \frac{3p}{2}x_1$.

Supposons c différent de zéro. L'équation (4) peut s'écrire

$$(9pc^2x_1^2 - 2)\,y_1^3 + 3px_1y_1 - 6p^2cx_1^3 = 0.$$

Elle est cubique en y_1. En combien de points réels une parallèle à l'axe des y coupe-t-elle la courbe ? Ce nombre dépend du signe de l'expression $p^3x_1^3(9pc^2x_1^3 - 2)(9pc^2x_1^3 - 1)^2$.

Supposons p positif. On reconnaîtra aisément que l'équation a trois racines réelles ou une seule suivant que x_1 appartient ou n'appartient pas à l'intervalle $\left(0, \sqrt[3]{\frac{2}{9pc^2}}\right)$.

(*) Si, dans les formules (3), on pose $u = \frac{1}{t^3 - c}$, il viendra

$$x_1 = \frac{1}{\left(\frac{2p}{3}\right)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{t}{t^3 - c}, \quad y_1 = 3\left(\frac{2p}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{t^6}{2t^3 + c}.$$

La courbe (4) est donc unicursale.

L'équation admet une racine triple, $y_1 = 0$ pour $x_1 = 0$, et une racine double pour $x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{9pc^2}}$.

La courbe ne rencontre les axes coordonnés qu'à l'origine et admet deux asymptotes d_1, d_2 respectivement définies par les équations $y_1 = \left(\frac{2p}{3c}\right)^{\frac{1}{3}}$, $x_1 = \left(\frac{2}{9pc^2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Etudions enfin l'allure de la courbe aux environs de l'origine, et, à cet effet, recourons aux formules (3). x_1 et y_1 s'annulent pour $u = 0$ et pour $u = -\frac{1}{c}$.

Pour les valeurs de u voisines de 0, on a, α, β, γ étant infiniment petits en même temps que u,

$$x_1 = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{2p}{3}\right)^{\frac{1}{3}}}(1+\alpha), \quad y_1 = \frac{pu^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{2p}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}(1+\beta),$$

$$y_1^2 = x_1\left(\frac{3p}{2}+\gamma\right).$$

Cette dernière équation met en évidence une branche de courbe tangente à l'axe des y à l'origine et située à droite de cet axe.

Pour étudier le lieu des points dont le paramètre u est voisin de $-\frac{1}{c}$, observons que des équations (3), on déduit

$$y_1 = x_1^3 \frac{2p}{u(2+3cu)}.$$

Si l'on pose $u = -\frac{1}{c} + h$, il viendra

$$y_1 = x_1^3(2pc + \delta),$$

δ étant infiniment petit avec h. On a donc une branche tangente à l'axe des x à l'origine et située au-dessus ou au-dessous de cet axe suivant que c est positif ou négatif. Pour fixer les idées, je supposerai, dans la suite, c positif.

Les indications précédentes permettent de se faire une idée suffisamment exacte de la forme de la courbe (*). Celle-ci se compose de deux

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

branches. La première, tout entière au-dessus de l'axe ox et tangente à cette droite à l'origine, s'étend indéfiniment dans le sens des x négatifs en se rapprochant asymptotiquement de la droite d_1, tandis que du côté des x positifs elle ne dépasse pas la droite d_2 qu'elle admet comme asymptote. L'autre branche, située à droite de l'axe oy et tangente à cet axe à l'origine, admet comme asymptotes les droites d_1 et d_2.

Chacune de ces deux branches peut être divisée en deux parties se raccordant à l'origine. On obtient ainsi quatre arcs indéfinis dans un sens et que je numéroterai 1, 2, 3, 4. Les arcs 1 et 2 constitueront la première branche, l'arc 1 étant situé à gauche de oy, et les arcs 3 et 4, la seconde branche, l'arc 3 étant situé au-dessous de ox.

Les formules (3) montrent que si un mobile décrit l'arc 1 en partant de l'infini, le paramètre u variera de $-\infty$ à $-\frac{1}{c}$; si, continuant à se mouvoir, il décrit l'arc 2, u variera de $-\frac{1}{c}$ à $-\frac{2}{3c}$. Le mobile décrivant l'arc 3 en partant de l'infini, u variera de $-\frac{2}{3c}$ à 0 et, enfin, si le mobile décrit l'arc 4, u variera de 0 à $+\infty$.

Traçons la parabole $y_1^2 = 2px_1$ et appelons A son point d'intersection avec d_1, B et D ses points d'intersection avec d_2, et C et E ses points à l'infini. Je supposerai que B et C sont situés au-dessus de ox. Le point A l'est nécessairement attendu que la constante c a été prise positive.

En faisant usage des résultats ci-dessus et des formules (5), on reconnaîtra aisément que si le point (x_1, y_1) décrit les arcs 1, 2, 3, 4, en partant de l'origine, le point (x_2, y_2) parcourra respectivement les arcs CA, ED, OD, OA.

Une question importante et délicate se pose ici : les quatre arcs 1, 2, 3, 4 satisfont-ils aux conditions de l'énoncé? Il est certain que si le point (x_1, y_1) décrit un quelconque de ces arcs, le point (x_2, y_2) se déplacera sur la parabole $y_2^2 = 2px_2$, mais les coordonnées du point (x_2, y_2) seront-elles l'abscisse et l'ordonnée respectives de l'arc correspondant à l'arc joignant l'origine au point (x_1, y_1)? De prime abord cette question peut paraître superflue; il semble bien, en effet, que la manière dont les nombres x_2 et y_2 ont été obtenus permette de répondre sur-le-champ par l'affirma-

tive. Il n'en est rien cependant. Nous avons appelé u l'intégrale $\int_0^{x_1} y\,dx$, c'est-à-dire l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et l'ordonnée du point (x_1, y_1). La question à résoudre est donc la suivante : Pour chacun des arcs 1, 2, 3, 4, la variable u a-t-elle réellement la signification qui lui a été attribuée dans la solution du problème? Il est clair tout d'abord qu'à une constante additive près, cette aire est égale à u. En effet, ayant obtenu l'expression de x_1 en fonction de u, on a calculé y_1 par la formule $y_1 = \frac{du}{dx_1}$, de laquelle on déduit $\int_0^{x_1} y_1 dx_1 = u + h$. La question ci-dessus peut donc être ainsi formulée : Parmi les arcs 1, 2, 3, 4, quels sont ceux pour lesquels la constante h est nulle? Dans l'égalité précédente, faisons $x_1 = 0$, il viendra $u_0 + h = 0$, u_0 désignant la valeur de u qui correspond à l'origine. Si donc h est nul, on aura $u_0 = 0$ et réciproquement. *Les arcs 3 et 4 satisfont seuls à cette condition.* Si le point (x_1, y_1) décrit la branche formée des arcs 3 et 4, le point (x_2, y_2), dont les coordonnées ont la signification indiquée dans l'énoncé, décrira l'arc DOA de la parabole $y_2^2 = 2px_2$.

Quant à la branche formée des arcs 1 et 2, elle doit être considérée comme une solution étrangère. Pour un point quelconque de cette branche, correspondant à la valeur u du paramètre, l'aire égale $u + \frac{1}{c}$. Cette expression de l'aire conduit pour l'abscisse et l'ordonnée moyennes à des valeurs complètement différentes de celles que donnent les formules (5).

En général, parmi les différentes branches de courbe passant par l'origine et définies par les équations (1) et (2), il ne conviendra de prendre que celles pour lesquelles l'origine correspond à la valeur zéro du paramètre u.

Dans la discussion précédente, j'ai supposé c différent de zéro. Lorsque $c = 0$, la courbe (4), on l'a vu, se réduit à la parabole $y_1^2 = \frac{3p}{2} x_1$. Celle-ci répond à la question et la parabole $y_2^2 = 2px_2$ est entièrement décrite par le point (x_2, y_2) lorsque le point (x_1, y_1) parcourt la parabole $y_1^2 = \frac{3p}{2} x_1$.

Autre solution par M. L. Collette.

Question 1386.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p 216.)

Soit le triangle ABC *coupé par la transversale* A'B'C' *harmoniquement associée au point* M ; A'', B'', C'' *les symétriques de* A, B, C, *par rapport aux milieux respectifs des segments* B'C', C'A', A'B'. *Démontrer les théorèmes suivants* : 1° A'', B'', C'' *sont situés sur une même ligne droite parallèle à la transversale réciproque* $A_0B_0C_0$ *de* A'B'C'. 2° $B''C'' = B_0C_0$, $C''A'' = C_0A_0$, $A''B'' = A_0B_0$. 3° *La distance du point de concours* G *des médianes de* ABC *à la droite* A''B''C'' *est double de la distance du même point à* $A_0B_0C_0$. 4° *Chercher les coordonnées du point d'intersection* P *de* A'B'C' *et de* A''B''C'' *et le lieu de* P *quand* M *varie.*

(A. Boutin).

Solution par MM. Emmerich et Deprez. 1° et 2°. Comme les quadrilatères BA'B''C', CB'C''A' sont des parallélogrammes, et que $BC' = AC_0$, $CB' = AB_0$, les droites B''A' et AC_0, de même que C''A' et AB_0 sont équipollentes. Il s'ensuit que $B''C'' = B_0C_0$ est parallèle à B_0C_0. La même chose se démontre pour les autres couples correspondants. A_0, B_0, C_0 étant en ligne droite, il en est de même de A'', B'', C''.

3° Les distances des points A', B', C à la droite A''B''C'' sont respectivement égales aux distances des points A, B, C à la droite $A_0B_0C_0$. Le parallélogramme AC'A''B' fait voir que la distance du point A à la droite A'B'C'' se compose des distances des points C' et B' à cette droite. Il s'ensuit que les sommes des distances des sommets A, B, C aux droites A''B''C'' et $A_0B_0C_0$ sont comme 2 : 1 ; donc la distance du barycentre G à A''B''C'' est double de la distance du même point à $A_0B_0C_0$.

4° Soient maintenant p, q, r les coordonnées barycentriques de M. On a

$$\frac{PBC}{B'BC} = \frac{PA'}{B'A'} = \frac{PA'}{PB - PA} = \frac{AB'}{BA' - AB'} = \frac{BC'}{AC' - BC} = \frac{BC'}{AB} = \frac{p}{q - p};$$

$$\frac{B'BC}{ABC} = \frac{CB}{CA} = \frac{p}{p - r};$$

donc en multipliant

$$\frac{PBC}{ABC} = \frac{p^2}{(p - r)(q - p)}.$$

Les coordonnées du point P sont ainsi

$$x_1 = p^2(q-r), \quad y_1 = q^2(r-p), \quad z_1 = r^2(p-q).$$

Ces valeurs satisfont à l'équation de A'B'C' :

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 0. \tag{1}$$

Elles satisfont de même à l'équation de A''B''C'' :

$$(q+r)x + (r+p)y + (p+q)z = 0, \tag{2}$$

parallèle à la droite $A_0B_0C_0$ dont l'équation est $px + qy + rz = 0$.

Comme

$$\frac{x_1}{p^2} + \frac{y_1}{q^2} + \frac{z_1}{r^2} = 0, \tag{3}$$

le point P se trouve aussi sur la droite qui passe par les milieux des distances A_1A', B_1B', C_1C' où A_1, B_1, C_1 désignent les pieds de AM, BM, CM respectivement. Notons d'ailleurs l'identité :

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r}\right)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) = \Sigma\frac{x}{p^2} + \frac{\Sigma(q+r)x}{pqr}.$$

Si le point M parcourt la droite

$$lp + mq + nr = 0, \tag{4}$$

on tire des équations (2) et (4)

$$p = m(x+y) - n(z+x), \text{ etc.}$$

et l'équation (1) donne la cubique

$$\Sigma x[n(y+z) - l(x+y)]\,[l(z+x) - m(y+z)] = 0.$$

Si le point M se meut sur la conique

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} = 0, \tag{5}$$

circonscrite au triangle de référence, les équations (5), (1) et (3) donnent pour P la cubique

$$x(ny - mz)^2 + y(lz - nx)^2 + z(mx - ly)^2 = 0.$$

S'il s'agit de la quartique

$$\frac{l}{p^2} + \frac{m}{q^2} + \frac{n}{r^2} = 0, \tag{6}$$

l'équation du lieu de P s'écrit ainsi

$$x\sqrt{ny - mz} + y\sqrt{lz - nx} + z\sqrt{mx - ly} = 0.$$

Remarque. Nous croyons connue l'inversion du système

$$p^2(q-r)=x,\quad q^2(r-p)=y,\quad r^2(p-q)=z.$$

En posant

$$-\frac{xyz}{x+y+z}=w^2,$$

on trouve

$$p^2=\frac{w(w^2-x^2)}{(w+y)(w-z)}=\frac{x^2(w-y)(w+z)}{w(y+z)^2}. \qquad \text{(E.)}$$

M. P. Bastin a résolu la même question.

---

*Question 1399.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 280.)

Parmi tous les rectangles inscrits à un triangle donné ABC *et dont un côté repose sur* BC, *quel est celui qui en tournant autour de* AB *engendre le volume maximum?*

Quel est celui dont le périmètre engendre la plus grande surface?

(J. Neuberg).

Cette question a été résolue par MM. Bastin, Emmerich et Barisien. Nous publions, avec quelques retouches, la solution de M. Bastin, qui a un caractère élémentaire et est la plus complète.

Pour écarter les triangles qui sont *traversés* par l'axe de révolution AB, nous supposons qu'aucun des angles A, B ne soit obtus et nous ne considérons que des rectangles entièrement intérieurs au triangle ABC.

1. Une parallèle à BC coupe AB en M, AC en N; les points M et N se projettent en Q et P sur BC. Si la droite MN passe par A ou si elle coïncide avec BC, le rectangle MNPQ en tournant autour de AB engendre un volume nul; on conclut de là l'existence d'un maximum.

Soient a le côté BC; AD $=h$, CE $=h'$, les hauteurs issues de A et C; x, y les côtés MN, MQ du rectangle; δ la distance du centre du rectangle à l'axe AB. D'après le théorème de Guldin,

$$V=xy.2\pi\delta.$$

Si $C=\frac{1}{2}\pi$, $\delta=\frac{1}{2}h'$ et la question revient à chercher le maximum de l'aire du rectangle; MN joint alors les milieux des côtés AC, AB.

Si l'angle C est aigu, δ est la moitié de la distance de P à AB; donc

$$2\delta = (a - CP)\sin B = (a - y\cot C)\sin B = k' - ky,$$

k désignant $\cot C \sin B$. Cette égalité subsiste également dans le cas de C obtus; k est alors négatif.

Les triangles semblables AMN, ABC donnent

$$x : a = k - y : k.$$

Par conséquent,

$$V = \frac{\pi a}{k} y\,(k - y)\,(k' - ky).$$

En écrivant

$$V = \frac{\pi a}{k\alpha\beta} \times y\,(\alpha k - \alpha y)\,(\beta k' - \beta k y),$$

où α et β sont deux indéterminées, on voit que le maximum de V a lieu lorsque les facteurs du produit $y\,(\alpha k - \alpha y)\,(\beta k' - \beta k y)$ ont une somme constante et sont égaux entre eux. Posons donc

$$1 - \alpha - \beta k = 0, \quad y = \alpha\,(k - y) = \beta\,(k' - ky);$$

l'élimination de α et β donne

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{k - y} + \frac{k}{k' - ky} = \frac{1}{k - y} + \frac{1}{l - y},$$

l désignant la quantité $\frac{k'}{k}$. Celle-ci est égale à la perpendiculaire BF élevée en B sur CB et terminée en F à AC; il faut la considérer comme positive ou comme négative suivant que A et F sont situés du même côté de BC ou de part et d'autre.

L'équation en y est donc

$$3y^2 - 2y\,(k + l) + kl = 0, \qquad (1)$$

d'où

$$y = \frac{k + l \pm \sqrt{k^2 - kl + l^2}}{3}.$$

Ces valeurs sont toujours réelles. Le premier membre de (1), pour $y = 0$ et $y = k$ prend des valeurs de signes contraires; on en conclut que l'une des valeurs de y est comprise entre 0 et k et convient à un

maximum de V. La seconde racine est $> h$ ou < 0 suivant que $l > 0$ ou < 0. Pour avoir la première racine, il faut prendre $\sqrt{h^2 - hl + l^2}$ avec le signe — si $l > 0$, avec le signe + si $l < 0$.

Si $B = \frac{\pi}{2}$, on a $l = h$, $y = \frac{h}{3}$; donc MN passe par le centre de gravité du triangle.

2. La surface engendrée par le périmètre du rectangle MNPQ a pour expression

$$S = 4\pi (x + y)\,\delta = 4\pi \left(a + \frac{h - a}{h} y\right) \delta.$$

Supposons d'abord $C = \frac{\pi}{2}$, de sorte que δ est constant. Alors si $h = a$, tous les rectangles inscrits engendrent la même surface. Si $h > a$, S croît avec y; sa plus petite valeur correspond à $y = 0$, sa plus grande à $y = h$; si $h < a$, ces conclusions sont renversées.

Supposons ensuite C aigu ou obtus; nous aurons

$$S = 4\pi \left(a + \frac{h - a}{h} y\right) (k' - ky).$$

Si $h = a$, la somme $x + y$ est constante. La plus grande et la plus petite valeur de S correspondent respectivement à $y = 0$ et $y = h$ dans le cas de $C < \frac{\pi}{2}$; ces conclusions sont renversées dans l'hypothèse $C > \frac{\pi}{2}$.

Si $h > a$ et $k > 0$, écrivons

$$S = \frac{4\pi (h - a)\,k}{h} \left(\frac{ah}{h - a} + y\right) (l - y).$$

Le produit des deux facteurs variables est maximum si ces facteurs sont égaux, ou si

$$y = \tfrac{1}{2}\left[l - \frac{ah}{h - a}\right].$$

Mais il faut encore que cette valeur soit comprise entre 0 et h. Quand il n'en est pas ainsi, S varie dans le sens inverse de la différence des deux facteurs variables.

Une discussion analogue est applicable à l'hypothèse $k < a$, $k < 0$.

Si $h > a$ et $k < 0$, les deux facteurs variables croissent avec y, de sorte

ne la plus petite valeur de S correspond à $y = 0$, la plus grande $y = k$. Ces conclusions sont renversées si $k < a$, $k > 0$.

Remarque. Le théorème de Guldin appliqué à une surface ou à une igne que l'axe de révolution coupe en deux parties, donne la différence les volumes ou des surfaces engendrés par les deux parties. De là, une nterprétation géométrique des maximums ou des minimums analytiques de V ou de S que nous avons écartés ci-dessus. (J. N.).

Question 1401.

(Voir *Mathesis* (3), III, p. 40).

Soient P, P′ *deux points donnés du plan d'une conique. Trouver le lieu du point d'intersection d'une droite quelconque* δ *menée par* P *avec la droite* δ' *qui joint* P′ *au pôle de* δ *par rapport à la conique.*

Ce lieu est une conique. Interpréter géométriquement les conditions nécessaires pour que ce lieu soit une circonférence, une hyperbole équilatère ou une parabole. (A. Gob).

Solution analytique par M. Barisien. 1° Soit l'ellipse d'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Soient (α, β), (α', β'), (x_1, y_1) les coordonnées des points P, P′, et du pôle D de δ. Les droites δ et δ' ont pour équations

$$a^2yy_1 + b^2xx_1 = a^2b^2, \tag{1}$$

$$(y - \beta')(x_1 - x') - (x - \alpha')(y_1 - \beta') = 0, \tag{2}$$

et l'on a la condition que la polaire de D passe par P :

$$a^2\beta y_1 + b^2\alpha x_1 = a^2b^2. \tag{3}$$

L'équation du lieu proposé s'obtient en éliminant x_1, y_1 entre les égalités (1), (2), (3). On trouve

$$(\beta\beta' - b^2)x^2 - (\alpha\beta' + \alpha'\beta)xy + (\alpha\alpha' - a^2)y^2$$
$$+ b^2(\alpha + \alpha')x + a^2(\beta + \beta')y - b^2\alpha\alpha' - a^2\beta\beta' = 0.$$

Le lieu est donc une conique.

Pour que cette courbe soit une circonférence, on doit avoir

$$\beta\alpha' + \alpha\beta' = 0, \quad \beta\beta' - b^2 = \alpha\alpha' - a^2. \tag{4}$$

Ces conditions peuvent s'écrire

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\beta'}{\alpha'}, \quad \alpha\alpha' - \beta\beta' = c^2. \tag{5}$$

La première égalité (5) indique que les lignes OP, OP′ sont symétriques par rapport à Ox; la seconde, que les points P, P′ sont conjugués par rapport à l'hyperbole $\alpha^2 - \beta^2 = c^2$.

Le lieu sera une hyperbole équilatère si

$$xx' + \beta\beta' = a^2 + b^2.$$

On peut prendre arbitrairement le point P, et P′ sera un point quelconque de la polaire de P par rapport au cercle de Monge.

Enfin, pour avoir une parabole, il faut poser

$$(\beta x' + \alpha\beta')^2 - 4(\alpha\alpha' - a^2)(\beta\beta' - b^2) = 0$$

ou

$$(\alpha\beta' - x'\beta)^2 + 4(b^2\alpha x' + a^2\beta\beta' - a^2b^2) = 0.$$

Après avoir choisi le point P, on peut prendre pour P′ un point quelconque d'une parabole qui touche la polaire de P et a pour diamètre correspondant à cette tangente la droite OP.

2° Si l'on traite la même question pour la parabole $y^2 = 2px$, un calcul analogue au précédent conduit à l'équation du lieu demandé

$$\alpha x^2 - 2\beta + \beta')xy + (\alpha + \alpha')y^2 + [2\beta\beta' - p(\alpha + \alpha')]x - (\alpha\beta' + \beta\alpha')y + p\alpha\alpha' = 0.$$

Le lieu sera un cercle si

$$\beta' = -\beta, \quad \alpha + \alpha' = p; \tag{6}$$

sera une hyperbole équilatère si

$$\alpha + \alpha' = -p; \tag{7}$$

enfin, on aura une parabole si

$$(\beta + \beta')^2 - 4p(\alpha + \alpha') = 0, \tag{8}$$

on remarque que lorsque P est donné, P′ doit se trouver sur une parabole déterminée.

Si l'on fait la somme des carrés des équations de condition

$$\beta x' + \alpha\beta' = 0, \quad \alpha\alpha' - \beta\beta' = c^2,$$

on obtient

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) = c^4;$$

le point (PP′) sera une circonférence si les triangles POF, [illegible] semblables, F étant un foyer de l'ellipse proposée.

Dans le cas de la parabole, les équations (6) indiquent que le lieu [illegible] circonférence si les points P, P′ sont symétriques par

apport au foyer ; une hyperbole équilatère, si la droite PP′ a son milieu ur la directrice. La parabole (8) a pour sommet le symétrique de P par apport au sommet de la parabole $y^2 = 2px$.

MM. Rose, Verheugen et Bastin démontrent facilement que le lieu u point $\partial\partial'$ est une conique : Le pôle de ∂ marque sur la polaire de P ne ponctuelle projective avec le faisceau (∂) ; donc les faisceaux (∂), (∂') sont projectifs. La seconde partie de la question n'est résolue que partiellement.

M. Bastin donne aussi une solution analytique en prenant pour axes coordonnés le diamètre mené par P et la corde conjuguée passant par P.

Les rôles des points P, P′ peuvent être intervertis, car ∂' passant par le pôle de ∂, ∂ passe aussi par le pôle de ∂'. Les points de contact des tangentes menées de P à P′ à la conique donnée font partie du lieu $(\partial\partial')$. Dans les faisceaux projectifs (∂), (∂'), la droite PP′ considérée comme rayon de l'un ou de l'autre faisceau a pour homologue la droite joignant P′ ou P au pôle Q de la droite PP′ par rapport à la conique donnée ; donc les droites P′Q et PQ touchent le lieu en P′ et P. On en conclut que dans le cas où le lieu cherché est une circonférence, le triangle QPP′ est isoscèle. Cette condition, indiquée par M. Verheugen, n'est pas suffisante. On peut ajouter que les droites OP, OP′ ont des directions symétriques par rapport à un axe de la conique donnée ; en effet, les polaires des points P et P′ sont un système de sécantes communes à cette conique et au lieu $(\partial\partial')$. (J. N.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Concours d'admission en 1903. — Composition de Matémathiques.

Deux points P, P_1, rapportés à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, ont pour coordonnées a, b, c, et a_1, b_1, c_1. De ces points partent respectivement deux droites D et D_1 ayant pour cosinus directeurs α, β, γ, et α_1, β_1, γ_1. L'axe des z est vertical.

Deux points pesants, placés d'abord en P et P_1, sont abandonnés à eux-mêmes, au même instant, et descendent sur les droites D et D_1 sur lesquelles ils occupent, au bout du temps t, les positions M et M_1.

I. Exprimer les coordonnées des points M et M_1 en fonction du temps. — Les masses des deux points étant μ et μ_1, déterminer le mouvement de leur centre de

gravité G. — En supposant $c_1 = c, \gamma_1 = \gamma$, trouver à quelles conditions doi[illegible] satisfaire $\alpha_1 \alpha_1, \beta, \beta_1$ et quelle doit être la valeur du rapport $(\mu : \mu_1)$ pour q[illegible] décrive une droite verticale.

II. Ces dernières conditions étant remplies, former l'équation de la surface [illegible] de la droite MM_1 quand le temps varie. — Mettre en évidence les génératr[illegible] rectilignes de cette surface. — Calculer les coordonnées de son sommet.

III. Le mètre étant pris pour unité de longueur, on suppose que l'on ait

$$a = b = 0, \qquad c = 1, \quad a_1 = 0, \qquad b_1 = 2, \quad c_1 = 1,$$

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = 0, \quad \alpha_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}.$$

Dans ce cas particulier, calculer le rapport $(\mu : \mu_1)$ de telle sorte que G parcoure une droite verticale : calculer en outre sa vitesse v à l'instant où il vie[illegible] rencontrer l'axe des y, ainsi que la durée T de sa chute jusqu'à cet instant. Ce[illegible] valeurs seront calculées en secondes pour le temps, en mètres à la seconde po[illegible] la vitesse, en prenant 9,8 pour valeur de l'accélération due à la pesanteur.

N. B. Il est bien entendu qu'on ne tient aucun compte du frottement, ni de l[illegible] résistance de l'air dans le mouvement des points M et M_1.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1423. Dans tout triangle sphérique ABC, on a

[illegible] (P[illegible].)

1424. [illegible] A, B, C [illegible] ACFG, ABKE [illegible] DEFGHKI [illegible] point de Lemoine [illegible]

[illegible]

1425. [illegible] direction donnée, [illegible]

[illegible]

1426. [illegible]

[illegible]

LA COURBE HOROPTÈRE,

par M. Stuyvaert (Gand).

1. La présente Note a pour but de signaler, aux lecteurs de *Mathesis*, les travaux récents de quelques géomètres sur une courbe curieuse qui se rencontre en Optique physiologique.

La maison M. Schilling, de Halle, met en vente un modèle de cette figure accompagné d'une Notice analytique par M. W. Ludwig (*); M. F. Schuh (**) consacre un mémoire de géométrie à la courbe en question ; l'initiative de ces travaux revient à M. Félix Klein.

J'emprunte aux écrits précités les préliminaires, la figure et la plupart des résultats; je les établis par la Géométrie analytique, en simplifiant un peu les formules et j'ajoute quelques propriétés.

Je renvoie, à ces mêmes ouvrages et au grand *Traité d'Optique* de Helmholz, le lecteur désireux de connaître les développements se rapportant à l'Optique, et je ne considérerai ici que le point de vue géométrique.

2. Physiologiquement, l'*horoptère* est le lieu des points de l'espace qui sont *vus simples* pour une position donnée des deux yeux.

Géométriquement, l'*horoptère* est le lieu des intersections des rayons homologues de deux gerbes égales.

Voici, en résumé, les hypothèses au moyen desquelles on passe de la première définition à la seconde, hypothèses en partie conformes aux observations, en partie légèrement inexactes pour simplifier (analogues, par exemple, à celles que l'on fait dans la théorie élémentaire des miroirs sphériques).

Les rayons visuels partant d'un œil vers les différents points de l'espace forment une gerbe et marquent, sur la rétine, une perspective du monde extérieur. Entre les points de la rétine de l'œil droit et ceux de la rétine de l'œil gauche, il existe une certaine correspondance : les impressions reçues en des points correspondants sont les seules qui donnent une sensation visuelle unique.

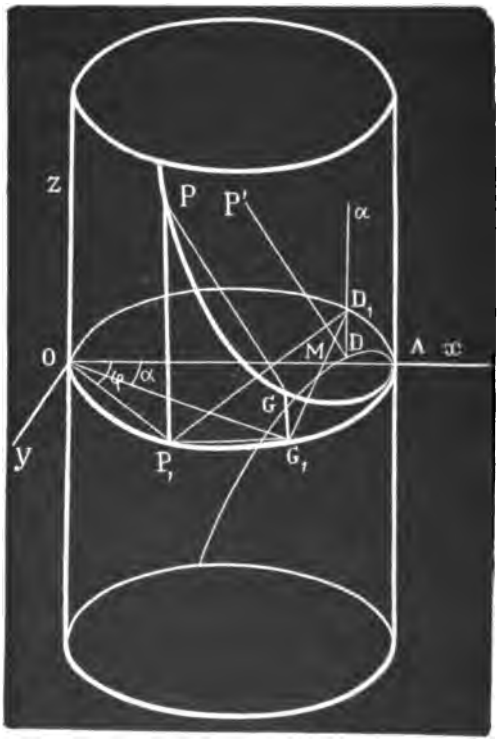
On admet que, si les axes optiques des deux yeux sont parallèles, les rayons correspondants des deux gerbes sont aussi parallèles, en d'autres termes que les deux gerbes sont égales. Soient D et G les sommets de ces gerbes, respectivement dans l'œil droit et dans l'œil

(*) *Die Horopterkurve mit einer Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve*. Halle, M. Schilling, 1903, 36 p. in-8°.

(**) *Die Horopterkurve* (Zeitschrift f. Math u. Phys , t. 47, 1903, pp.375-399).

gauche. Si l'on dirige les deux axes optiques vers un point F de l'espace, c'est-à-dire si l'on *regarde* ce point F, la position des deux gerbes est déterminée de la manière suivante : la gerbe de sommet D peut être amenée à être parallèle à la gerbe de sommet G par une simple rotation autour d'un certain axe a. Cet axe dépend du point F d'après une loi, importante en Optique, mais dont je n'aurai pas à tenir compte, car je prendrai, pour point de départ, l'axe a et non le point F (*).

3. Soient DP′ et GP deux rayons parallèles menés par D et G. Si le rayon DP′ tourne autour de l'axe fixe a, d'un angle donné 2α, et vient alors rencontrer GP en un point P, ce dernier est un point de l'*horoptère*.



Par le milieu M de DG, on mène le plan xOy perpendiculaire à l'axe a. Les projections de DP et GP sur ce plan font entre elles l'angle constant 2α et se coupent en un point P_1 d'une circonférence de rayon r passant par les projections D_1 et G_1 de D et de G.

L'arc D_1OG_1 du segment capable de l'angle 2α est supposé *devant* les yeux; l'arc D_1AG_1 situé derrière serait à rejeter dans la question d'optique, mais non dans la théorie géométrique. Par le milieu 0 du premier arc, on mène $0s$ parallèle à a.

(*) Je ferai remarquer, en passant, l'erreur de certains traités de physiologie : ils donnent la définition exacte de l'horoptère, mais affirment ensuite que cette figure est un cylindre, oubliant que parmi les ∞^2 couples de rayons correspondants de deux gerbes projectives, il n'y en a que ∞^1 qui se rencontrent. — La définition du mot *horoptère* dans les dictionnaires encyclopédiques est généralement fantaisiste.

Puisque la projection de P sur xOy appartient à la circonférence r, l'*horoptère est situé sur un cylindre de révolution*.

Considérons des semi-droites, donnons aux angles un signe (positif de Ox vers Oy), et posons $(Ox, OG_1) = \alpha$, $(Ox, OD_1) = -\alpha$, $(Ox, OP_1) = \varphi$.

Cherchons l'angle de Ox avec G_1P_1 ou P_1G_1 suivant que P_1 est sur l'arc G_1O ou sur l'arc G_1AO ; faisons tourner d'abord le rayon Ox jusque OG_1, puis OG_1 autour de G_1 jusqu'à ce qu'il coïncide avec G_1P_1 (ou P_1G_1) ; ce dernier angle a, dans tous les cas, pour mesure la moitié de l'arc OP_1 (compté dans le sens OD_1A) et vaut donc toujours $\frac{\pi}{2} + \varphi$. Ainsi G_1P_1 (ou P_1G_1) fait toujours avec l'axe des x un angle $\frac{\pi}{2} + \varphi + \alpha$ et, par suite P_1D_1 ou D_1P_1 fait, avec Ox, l'angle $\frac{\pi}{2} + \varphi + \alpha - 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi - \alpha$.

Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées de G ; celles de D seront $x_1, -y_1, -z_1$ et, comme les droites GP et DP font le même angle ω avec le plan xOy, leurs équations sont respectivement

$$\frac{x - x_1}{\cos\omega \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi + \alpha\right)} = \frac{y - y_1}{\cos\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi + \alpha\right)} = \frac{z - z_1}{\sin\omega},$$

$$\frac{x - x_1}{\cos\omega \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \alpha\right)} = \frac{y + y_1}{\cos\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \alpha\right)} = \frac{z + z_1}{\sin\omega}.$$

En divisant les premiers rapports et les derniers, on trouve

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \alpha\right)} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\sin(\varphi - \alpha)} = \frac{z + z_1}{z - z_1},$$

et de là, *componendo*,

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\sin\varphi \cos\alpha}{\cos\varphi \sin\alpha},$$

ou encore

$$\frac{z}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{z_1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\lambda}. \tag{1}$$

D'autre part, les coordonnées de P_1 sont

$$x = 2r\cos^2\varphi = \frac{2r}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}, \quad y = 2r\cos\varphi\sin\varphi = \frac{2r\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Donc, en tenant compte des égalités (1), on a les équations de la courbe

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2r}{1+\lambda^2 z^2} \\ y = \dfrac{2r\lambda z}{1+\lambda^2 z^2}. \end{cases}$$

4. Un plan quelconque

$$ax + by + cz = d$$

coupe la courbe en des points dont les ***hauteurs*** z sont données par

$$\frac{2ra}{1+\lambda^2 z^2} + \frac{2rb\lambda z}{1+\lambda^2 z^2} + cz = d$$

ou

$$(3) \qquad c\lambda^2 z^3 - d\lambda^2 z^2 + z(2rb\lambda + c) + 2ra - d = 0.$$

Cette équation étant du troisième degré, tout plan coupe la courbe en trois points, donc l'***horoptère est une cubique gauche***.

Pour $z = 0$, on trouve $x = 2r$ et $y = 0$, donc la courbe passe par A.

Pour $1+\lambda^2 z^2 = 0$ ou $z = \dfrac{\pm\sqrt{-1}}{\lambda}$, x et y sont infinis et $\dfrac{y}{z} = \pm\sqrt{-1}$;

mais les points à l'infini du plan $z = \dfrac{\pm\sqrt{-1}}{\lambda}$ sont aussi dans le plan parallèle $z = 0$; donc l'***horoptère passe par les points cycliques du plan*** xOy.

Si z augmente indéfiniment, x et y tendent vers zéro; donc l'***axe*** Oz ***est l'asymptote réelle***.

Si z change de signe, y change de signe et x demeure inaltéré, donc Ox ***est un axe de symétrie***.

5. D'après ce qui précède, les coordonnées de deux points P et Q, symétriques par rapport à Ox sont

$$(4) \qquad \frac{2r}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}, \quad \pm\frac{2r\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}, \quad \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\lambda}.$$

Pour les coordonnées de G et de D, on trouve, comme plus haut, pour P,

$$x_1 = 2r\cos^2\alpha = \frac{2r}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \pm y_1 = \pm 2r\cos\alpha\sin\alpha = \pm\frac{2r\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

et, à cause des relations (1),

$$\pm z_1 = \frac{\pm\operatorname{tg}\alpha}{\lambda}.$$

Les coordonnées de G et de D se déduisent de celles de P et Q en substituant α à φ; donc, *la courbe passe par les centres* D *et* G *des gerbes initiales*; et, *deux points symétriques quelconques* P *et* Q *peuvent remplacer* D *et* G *comme centres de gerbes génératrices.*

Par suite, *les droites qui joignent un point* N *quelconque de la courbe à deux points symétriques* P *et* Q *sont également inclinées sur* xOy.

Si N tend vers P, on voit que *la tangente en un point* P *et la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe de symétrie sont également inclinées sur* xOy.

Cette dernière propriété donne une *construction de la tangente* en P à l'horoptère, puisque cette tangente doit aussi toucher le cylindre de révolution. La trace de la tangente sur le plan xOy se trouve donc de la manière suivante : on mène, en P_1, la tangente au cercle r et l'on porte, sur cette tangente, une longueur égale à l'y du contact. D'après cette construction, *la trace de la tangente sur le plan* xOy *décrit une cardioïde.*

6. Les équations de la courbe donnent, par division,

$$\frac{y}{x} = \lambda z \quad \text{ou} \quad y = \lambda xz;$$

cette égalité représente un paraboloïde hyperbolique passant par l'*horoptère*; les deux systèmes de génératrices sont

$$\begin{cases} y = k\lambda z, \\ x = k; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = kx, \\ \lambda z = k; \end{cases}$$

les premières sont des perpendiculaires à l'axe de symétrie, les secondes sont des perpendiculaires à l'asymptote.

Puisque chaque génératrice de l'un des systèmes rencontre toutes celles de l'autre, on a cette double construction de l'*horoptère : D'un point de la courbe, par exemple du centre initial* G, *on abaisse une perpendiculaire sur* Ox (*ou* Oz) *et, de tous les points de celle-ci, des*

perpendiculaires sur Oz (*ou* Ox); *ces dernières droites percent le cylindre de révolution en des points de la courbe.*

L'*horoptère* étant l'intersection d'un cylindre de révolution et d'un paraboloïde, sa tangente en P est dans le plan tangent à chacune de ces surfaces, et le plan tangent au paraboloïde est déterminé par les perpendiculaires abaissées de P sur Ox et Oz, d'où une autre construction de la tangente.

Pour $x = 2r$, on a $y = 2r\lambda z$ et ces relations représentent la tangente en A ; ainsi $2r\lambda$ donne l'inclinaison de la tangente en A sur le plan xOy, ou la *pente de l'horoptère.*

Cette tangente en A peut être utilisée pour la construction de la courbe qui vient d'être énoncée. Si donc on appelle projection *conoïdale*(*) d'une ligne sur un plan, le lieu de la trace, sur ce plan, de la perpendiculaire abaissée d'un point de la ligne sur un axe fixe, on a cette propriété :

La projection conoïdale de l'horoptère, l'axe étant son asymptote Oz, *sur le plan tangent en* A *au cylindre, est une droite* (**).

7. On a vu la relation $\lambda z = \operatorname{tg} \varphi$ et, comme l'angle φ est proportionnel à l'arc AP_1, il en résulte que, si l'on développe le cylindre de révolution, l'*horoptère* se transforme en une courbe dont l'équation est de la forme $y = \mu \operatorname{tg} rx$. Par conséquent l'aire comprise entre un arc d'*horoptère* et la projection de cet arc sur le plan xOy s'exprime par la fonction *log. cos.*

8(***). L'équation a pour racines les *hauteurs* z des intersections de

---

(*) Cas particulier de la projection *gauche* de Steiner au moyen de droites projetantes s'appuyant sur deux directrices rectilignes.

(**) J'ai, sans m'en douter, rencontré déjà l'*horoptère* en posant, dans *Mathesis*, la Question 1131 (résolue par MM. Audibert, Jeřábek, Buysens, 1898, p. 233) : « Une droite fixe a est tangente en A à un cylindre de révolution dont l'axe est « vertical; soit a' la génératrice du cylindre passant par le point diamétralement « opposé à A. Une droite mobile b s'appuie sur a et a' et est constamment « horizontale; elle engendre un paraboloïde qui rencontre le cylindre suivant « une certaine courbe gauche. Trouver le lieu décrit par la tangente à cette « courbe sur le plan horizontal mené par A. » Les auteurs de solutions ont établi que ce lieu est une *cardioïde*. La courbe gauche en question est évidemment l'*horoptère*. Il serait intéressant de la représenter sur une épure de Géométrie descriptive.

(***) Les propriétés qui suivent ne se trouvent pas dans les ouvrages que j'ai consultés.

la courbe et d'un plan. Pour que ces trois racines soient égales à z', il faut que l'on ait

$$c\lambda^2 : -d\lambda^2 : (2rb\lambda + c) : (2ra - d) = 1 : -3z' : 3z'^2 : -z'^3,$$

d'où successivement,

$$c\lambda^2 : -d\lambda^2 : 2rb\lambda^3 : 2ra\lambda^2 = 1 : -3z' : (3\lambda^2 z'^2 - 1) : (-\lambda^2 z'^3 + 3z'),$$

$$a : b : c : d = \frac{-\lambda z'^3 + 3z'}{2r} : \frac{3\lambda^2 z'^2 - 1}{2rb\lambda} : 1 : 3z'.$$

Dès lors, l'équation du *plan osculateur* au point de *hauteur* z' est

$$\frac{-\lambda^2 z'^3 + 3z'}{2r}x + \frac{3\lambda^2 z'^2 - 1}{2rb\lambda}y + z - 3z' = 0.$$

En y faisant $x = y = 0$, on trouve $z = 3z'$:

Tout plan osculateur à l'horoptère coupe l'asymptote à une hauteur triple de celle du contact.

Donc, pour construire le plan osculateur, il suffit de construire la tangente et le point situé sur l'asymptote à une *hauteur* $3z'$.

9. Pour $z' = 0$, l'équation du plan osculateur donne $y = 2r\lambda z$. Donc (ce qui était évident), le plan osculateur en A a pour équation $y = 2r\lambda z$ et il passe par O.

Ce plan coupe le cylindre suivant une ellipse dont le demi-petit axe est r, tandis que le demi-grand axe s'obtient en faisant $y = r$ dans l'équation du plan, de sorte que $z = \frac{1}{2\lambda}$ et le demi-grand axe vaut $\sqrt{r^2 + \frac{1}{4\lambda^2}}$. Par suite le rayon de courbure en A à cette ellipse a pour valeur $\frac{r^2 + \frac{1}{4\lambda^2}}{r} = r + \frac{1}{4\lambda^2 r}$. Le centre de courbure est sur OA et a pour abscisse $2r - r - \frac{1}{4\lambda^2 r} = r - \frac{1}{4\lambda^2 r}$. La sphère S ayant ce point pour centre et passant par A a pour équation

$$\left(x - r + \frac{1}{4\lambda^2 r}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(r + \frac{1}{4\lambda^2 r}\right)^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2rx + \frac{x}{2\lambda^2 r} - \frac{1}{2\lambda} = 0.$$

Remplaçons x par $\frac{2r}{1+\lambda^2 z^2}$, y par $\frac{2r\lambda z}{1+\lambda^2 z^2}$; il vient, après simplification :

$$z^2 = \frac{z^2}{1+\lambda^2 z^2},$$

équation du quatrième degré qui n'est vérifiée que par $z = 0$, donc la sphère S coupe l'*horoptère* en quatre points coïncidents en A; par suite c'est la *sphère osculatrice* en A.

1°. On a trouvé, pour le plan osculateur au point de *hauteur* z', l'équation

$$\frac{-\lambda^2 z'^3 + 3z'}{2r} x + \frac{3\lambda^2 z'^2 - 1}{2r\lambda} y + z - 3z' = 0.$$

Pour que les plans osculateurs en deux points de *hauteurs* z' et z'' soient parallèles, il faut donc que l'on ait

$$-\lambda^2 z'^3 + 3z' = -\lambda^2 z''^3 + 3z'' \quad \text{et} \quad 3\lambda^2 z'^2 - 1 = 3\lambda^2 z''^2 - 1,$$

d'où $z'' = \pm z'$, mais le signe $+$ est évidemment à rejeter, donc $z'' = -z'$, et par suite on a

$$-\lambda^2 z'^3 + 3z' = \lambda^2 z'^3 - 3z' = 0;$$

négligeant la solution insignifiante $z' = 0$, on trouve $z' = \frac{\pm\sqrt{3}}{\lambda}$,

d'où $x' = \frac{2r}{1+\lambda^2 z'^2} = \frac{r}{2}$ et $y' = \frac{2r\lambda z'}{1+\lambda^2 z'^2} = \frac{\pm r\sqrt{3}}{2}$.

Les points de contact des deux plans osculateurs parallèles sont deux points symétriques d'abscisse $x = \frac{r}{2}$.

Les deux plans osculateurs parallèles ont pour équation

$$\frac{4}{r\lambda} y + z = \pm \frac{3\sqrt{3}}{\lambda}.$$

Le plan équidistant ou *plan central de l'horoptère* est

$$4y + r\lambda z = 0.$$

La droite joignant les contacts des plans osculateurs parallèles ou la *focale centrale* de l'horoptère a pour équations

$$x = \frac{r}{2} \text{ et } y = \frac{y'}{z'} z = \frac{\lambda r z}{2}.$$

11. Reprenons l'équation du plan osculateur; multiplions les termes par $\frac{2r}{1+\lambda^2 z'^2}$; il vient, après une transformation facile,

$$\frac{z'(-\lambda^2 z'^2 - 1) + 4z'}{1+\lambda^2 z'^2} x + \frac{3(\lambda^2 z'^2 + 1) - 4}{1+\lambda^2 z'^2} y + \frac{2rz}{1+\lambda^2 z'^2} - \frac{6rz'}{1+\lambda^2 z'^2} = 0,$$

ou, en tenant compte des équations de la courbe,

$$\left(-z' + \frac{2y'}{r\lambda}\right) x + 3\frac{y}{\lambda} - 2\frac{x'}{r}\frac{y}{\lambda} + x'z - \frac{3y'}{\lambda} = 0,$$

ou enfin, en chassant les dénominateurs,

$$\lambda r(x'z - xz') + 3r(y - y') + 2(xy' - yx') = 0.$$

En général, cette équation représente un plan dépendant d'un certain point (x', y', z') toujours contenu dans ce plan; le plan est appelé le *plan focal* du point et le point est le *pôle* du plan. Quand le point est sur la courbe, son plan focal est donc le plan osculateur.

Si l'on divise l'équation précédente par y', on voit que, pour x' fini et quelconque, pour $\frac{\lambda r z'}{y'} = 2$ et pour y' indéfiniment croissant, les coefficients de x, y, z tendent vers zéro, tandis que le terme indépendant reste fixe, c'est-à-dire que le plan focal s'éloigne à l'infini. Le plan de l'infini a donc pour pôle un point situé à l'infini dans la direction définie par les équations

$$x = \text{constante}, \quad \lambda r z = 2y.$$

Les droites parallèles à cette direction sont les *diamètres du système focal*. La focale centrale est un de ces diamètres.

Un plan perpendiculaire à la direction des diamètres a pour équation

$$\lambda r y + 2z = k,$$

k étant un paramètre arbitraire.

Pour que le plan focal d'un point (x', y', z') ait cette dernière forme, il faut que l'on ait

$$-z' = \frac{2y'}{r\lambda} = 0, \quad \left(\frac{3}{\lambda} - \frac{2x'}{\lambda r}\right) : \lambda r = z' : 2,$$

d'où, successivement,

$$\frac{3}{\lambda} - \frac{2x'}{\lambda r} = \frac{\lambda r x'}{2}$$

$$x' = \frac{6r}{4 + \lambda^2 r^2}.$$

La droite ayant pour équations

$$\lambda r z' + 2y' = 0, \quad x' = \frac{6r}{4 + \lambda^2 r^2}$$

est donc perpendiculaire aux plans focaux de ses points et s'appelle l'*axe* du système focal ou du *complexe linéaire* (*) défini par ce système.

La plus courte distance de cet axe à l'asymptote (qui est évidemment un rayon du complexe linéaire) est donc $\frac{6r}{4+\lambda^2 r^2}$, $\left($ ou les $\frac{3}{4}$ de l'abscisse du point de *hauteur* $\frac{1}{2}r\right)$; la tangente de l'angle de l'axe et de l'asymptote est $\frac{y'}{z'} = -\frac{\lambda r}{2}$; le produit de ces quantités, ou le *paramètre* du complexe est donc

$$-\frac{3\lambda r^2}{4 + \lambda^2 r^2}.$$

Gand, le 23 décembre 1902.

SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE DANS UN CERCLE;

par E. N. Barisien.

Les traités de trigonométrie donnent les expressions des diagonales, de la surface et du rayon d'un quadrilatère inscrit en fonction des côtés. Le but de la présente note est de signaler quelques autres formules moins connues, notamment la longueur de la troisième diagonale et l'aire du triangle formé par les trois diagonales.

1. Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans le cercle de centre O et de

---

(*) Voir *Mathesis*, 1901, p. 41.

rayon R. Les côtés AB et CD se rencontrent en E, les côtés AD et BC se rencontrent en F; la figure suppose le point E situé au delà de AD, le point F au delà de CD. Les diagonales AC et BD se coupent en I et rencontrent EF en H et K. On sait que le triangle IEF est autopolaire par rapport au cercle; O est donc l'orthocentre de ce triangle.

Soient $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$;

$AC = x$, $BD = y$, $EF = z$;

angle $ADB = ACB = \alpha$, *angle* $CAB = CDB = \beta$,

angle $DAC = DBC = \gamma$, *angle* $ABD = ACD = \delta$;

θ, l'angle aigu des diagonales x, y;

ω, l'angle BIO;

S, l'aire du quadrilatère ABCD; $2p$, son périmètre.

Rappelons d'abord les formules suivantes :

$$xy = ac + bd, \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}; \tag{1}$$

$$x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}, \quad y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}; \tag{2}$$

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)} = \tfrac{1}{2} xy \sin\theta. \tag{3}$$

$$R = \frac{\sqrt{(ab + cd)(ad + bc)(ac + bd)}}{4S}; \tag{4}$$

$$\sin A = \sin C = \frac{y}{2R} = \frac{2S}{ad + bc}, \quad \sin B = \sin D = \frac{x}{2R} = \frac{2S}{ab + cd}; \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A = -\cos C &= \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}, \\ \cos B = -\cos D &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p - a)(p - d)}{(p - b)(p - c)}}, \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \operatorname{cotg}\frac{D}{2} &= \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{(p - c)(p - d)}}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\operatorname{cotg}\frac{D}{2} = \frac{p - a}{p - c}; \tag{8}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}, \quad \sin\beta = \frac{b}{2R}, \quad \sin\gamma = \frac{c}{2R}, \quad \sin\delta = \frac{d}{2R}. \tag{9}$$

6. Calculons les distances des sommets A, B, C, D aux points E et F. Les triangles inversement semblables EAD, ECB donnent

$$\frac{d}{b} = \frac{EA}{ED + c} = \frac{ED}{EA + a};$$

d'où le système d'équations à deux inconnues EA, ED :

$$b.EA - d.ED = cd, \quad -d.EA + b.ED = ad.$$

De là et par analogie :

$$\left.\begin{aligned} AE &= \frac{d(ad+bc)}{b^2-d^2}, & BE &= \frac{b(ab+cd)}{b^2-d^2}, \\ CE &= \frac{b(ad+bc)}{b^2-d^2}, & DE &= \frac{d(ab+cd)}{b^2-d^2}, \\ AF &= \frac{a(ad+bc)}{a^2-c^2}, & DF &= \frac{c(ab+cd)}{a^2-c^2}, \\ CF &= \frac{c(ad+bc)}{a^2-c^2}, & BF &= \frac{a(ab+cd)}{a^2-c^2}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

8. On peut maintenant calculer la troisième diagonale EF par l'un quelconque des triangles AEF, BEF, CEF, DEF. Par exemple,

$$z^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2 + 2AE.AF \cos A,$$

et d'après les formules (10) et (6)

$$z^2 = (ad+bc)^2\left[\frac{d^2}{(b^2-d^2)^2} + \frac{a^2}{(a^2-c^2)^2} + \frac{ad\,[(a^2-c^2)-(b^2-d^2)]}{(ad+bc)(b^2-d^2)(a^2-c^2)}\right] - \frac{(ad+bc)(ab+cd)\,[bd(a^2-c^2)^2 + ac(b^2-d^2)^2]}{(a^2-c^2)^2(b^2-d^2)^2},$$

de sorte que

$$z = \sqrt{(ad+bc)(ab+cd)\left[\frac{ac}{(a^2-c^2)^2} + \frac{bd}{(b^2-d^2)^2}\right]}. \quad (11)$$

Cette valeur est infinie lorsque $a = c$ ou $b = d$; ce qui est évident, car ABCD est alors un trapèze isoscèle.

4. Nous allons chercher les segments IA, IB, IC, ID des diagonales. Le triangle IAD donne

$$\frac{IA}{\sin\alpha} = \frac{ID}{\sin\gamma} = \frac{d}{\sin\theta},$$

d'où, d'après les égalités (3) et (9),

$$IA = \frac{d \sin \alpha}{\sin \theta} = d \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{xy}{2S} = \frac{adxy}{4RS}.$$

On a donc, au moyen des formules (1) et (4),

$$\left.\begin{aligned} IA &= \frac{ad\sqrt{ac+bd}}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}}, \quad IB = \frac{ab\sqrt{ac+bd}}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}}, \\ IC &= \frac{bc\sqrt{ac+bd}}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}}, \quad ID = \frac{cd\sqrt{ac+bd}}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Par conséquent,

$$IA.IC = IB.ID = \frac{abcd(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)} = R^2 - \overline{OI}^2; \quad (13)$$

$$IA : IB : IC : ID = ad : ab : bc : cd. \quad (13')$$

Les relations (12) et (13') peuvent se déduire des triangles semblables IAB et IDC, IAD et IBC.

L'égalité (13) fait connaître la puissance de I par rapport au cercle O, ensuite la distance OI. Pour les puissances des points E, F, on trouve :

$$\left.\begin{aligned} EA.EB = EC.ED &= \frac{bd(ad+bc)(ab+cd)}{(b^2-d^2)^2} = R^2 - \overline{OE}^2, \\ FA.FD = FC.FB &= \frac{ac(ad+bc)(ab+cd)}{(a^2-c^2)^2} = R^2 - \overline{OF}^2. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

5. Passons au calcul des distances IK, IH.

Les divisions HICA, KIBD sont harmoniques; par conséquent,

$$\frac{1}{IH} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{IC} - \frac{1}{IA}\right);$$

d'où en ayant égard aux formules (12) et par analogie,

$$\left.\begin{aligned} IH &= \frac{2abcd\sqrt{ac+bd}}{(ad-bc)\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}}, \\ IK &= \frac{2abcd\sqrt{ac+bd}}{(ab-cd)\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

L'aire S′ du triangle IHK est donc

$$S' = \frac{1}{2} IK.IH \sin\theta = \frac{S}{xy} IK.IH$$

$$= S \frac{4a^2b^2c^2d^2}{(a^2b^2 - c^2d^2)(a^2d^2 - b^2c^2)}. \qquad (16)$$

Elle sera équivalente à l'aire du quadrilatère ABCD, si on a la relation

$$(a^2b^2 - c^2d^2)(a^2d^2 - b^2c^2) = 4a^2b^2c^2d^2.$$

6. On peut obtenir facilement les distances des points O et I à la diagonale z. En effet, le diamètre OI du cercle ABCD est divisé harmoniquement par I et par H en un point que nous désignons par L. Par suite

$$OI.OL = R^2, \quad IL = OL - OI = \frac{R^2}{OI} - OI = \frac{R^2 - \overline{OI}^2}{OI}. \qquad (17)$$

Connaissant S′ et IL, on peut calculer KH.

7. Voici une autre définition du quadrilatère ABCD que M. H. Brocard m'a obligeamment communiquée et qui conduit pour S et S′ à deux intéressantes formules.

Au lieu de définir le quadrilatère ABCD par ses quatre côtés a, b, c, d, prenons les données suivantes : φ, ψ les angles aigus des diagonales BD, AC avec EF ; OL = D, IL = h. Alors

$$R^2 = D(D - h), \quad \theta = \varphi - \psi, \qquad (18)$$

$$S = \tfrac{1}{2} AC.BD \sin(\varphi - \psi),$$

$$AC = 2\sqrt{R^2 - (D - h)^2 \cos^2\psi}, \quad BD = 2\sqrt{R^2 - (D - h)^2 \cos^2\varphi};$$

donc

$$S = 2\sqrt{[R^2 - (D - h)^2 \cos^2\psi][R^2 - (D - h)^2 \cos^2\varphi]} \sin(\varphi - \psi). \qquad (19)$$

En remplaçant R^2 par D (D — h), on obtient

$$S = 2(D - h) \sin(\varphi - \psi) \sqrt{(D^2 \sin^2\psi + h^2 \cos^2\psi)(D^2 \sin^2\varphi + h^2 \cos^2\varphi)}.$$

On voit immédiatement que

$$S' = \frac{h^2 \sin(\varphi - \psi)}{2 \sin\varphi \sin\psi}.$$

Note. I. Le calcul de z a été récemment proposé dans les *Wiskundige Opgaven*; voici les solutions parues dans ce Recueil.

a. Soit C′ le symétrique de C par rapport à EF. L'angle EC′F étant

égal à ECF = FAB, le quadrilatère EAFC′ est inscriptible; donc s est une diagonale intérieure d'un quadrilatère inscriptible ayant pour côtés EA, FA, EC, FC. Il suffit maintenant d'appliquer les formules (2) et (10).

b. Les circonférences circonscrites aux triangles EDA, EDC se coupent en un point M de EF. On a

$$EM.EF = ED.EC, \quad FM.FE = FC.FA,$$

d'où par addition

$$\overline{EF}^2 = ED.EC + FC.FA.$$

Ainsi, *le carré de la troisième diagonale est égal à la somme des puissances de ses extrémités par rapport au cercle* ABCD.

II. Cette propriété est proposée comme exercice dans le Traité de Géométrie de Rouché et de Comberousse; nous l'avons démontrée analytiquement dans la *Revue de l'Instruction publique*, 1866. En voici une démonstration des plus simples.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées de deux points M_1, M_2 par rapport au cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. On a

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2);$$

or $x_1x_2 + y_1y_2 = R^2$, donc

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_1^2 + y_1^2 - R^2) + (x_2^2 + y_2^2 - R^2).$$

III. Le calcul des aires des triangles IEF, IKH a été déjà fait antérieurement dans *Mathesis*. (J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

14. *Sur la droite de Simson.* Prenons un point quelconque M sur la circonférence circonscrite au triangle ABC; soient A′, B′, C′ ses projections sur les côtés BC, CA, AB et soient A″, B″, C″ ses symétriques par rapport à ses côtés. Nous allons démontrer que les points A″, B″, C″ sont sur une même droite passant par l'orthocentre H de ABC.

Les points A″, B″, C″ sont situés respectivement sur les circonférences O_a, O_b, O_c symétriques de la circonférence circonscrite au triangle ABC par rapport aux côtés BC, CA, AB; ces circonférences passent par l'orthocentre H. Pour fixer les idées, supposons M sur l'arc BC

soustendu par l'angle BAC. Les arcs soustendus par les angles AHB'' et AHC'' dans les circonférences O_b, O_c sont égaux à leurs symétriques ABM, ACM de la circonférence ABC; donc ces angles sont supplémentaires et les points B'', H, C'' sont collinéaires. On démontrerait aussi facilement que A'', B'', H sont collinéaires.

De ce qui précède, on conclut que les points A', B', C' sont sur une même droite qui passe au milieu de MH.

Cette démonstration est empruntée à un article de V. Hioux, *J. M. E. de Vuibert*, 1903, p. 129.

15. *Sur le centre de courbure de la parabole.* I. Les deux constructions du centre de courbure en un point d'une parabole, énoncées par M. E. N. Barisien (*Mathesis* (3), III, p. 112), sont des cas particuliers d'une construction générale applicable aux trois courbes du second degré que nous avons fait connaître (NAM (3), XI, p. 427) : *Si* H *et* H_1 *sont deux points conjugués par rapport aux foyers situés sur l'axe a, la perpendiculaire élevée au point* $N_a \equiv (a\ n)$ *sur la normale n au point* M, *coupe les droites* MH *et* MH_1 *en deux points* K *et* K_1, *tels que le centre de courbure en* M *est le point de rencontre des hauteurs du triangle* MKK_1.

Dans le cas de la parabole on peut supposer les points H et H_1 confondus au foyer à distance finie ou infinie, on a les deux constructions citées. (C. Servais.)

II. La première construction de M. Barisien est un cas particulier d'une construction indiquée, *Mathesis*, 1903, p. 90. En effet, dans le cas de la parabole, le centre O est rejeté à l'infini et la perpendiculaire à OM devient la perpendiculaire à l'axe, ce qui donne la construction de M. Barisien. (J. Rose.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1863.

(Voir *Mathesis*, (3); II, p. 80.)

Etant donnés dans un plan deux droites a, b, et trois points A, B, C, *mener par* C *une droite coupant a et b en deux points*, A' *et* B', *tels que les quatre points* A, B, A', B' *soient sur une même circonférence.*

Examiner le cas particulier où les points A, B, C *sont en ligne droite.* (Degueldre.)

Solution par M. J. Déprez. 1° Prenons C pour pôle et la perpendiculaire CH abaissée de C sur a pour axe polaire. Les coordonnés des points A, B étant désignées par (ρ_1, ω_1), (ρ_2, ω_2), l'équation de la circonférence ABA′ est de la forme

$$\rho^2 + \lambda\rho\cos\omega + \mu\rho\sin\omega + \nu = 0, \tag{1}$$

sous les conditions

$$\rho_1^2 + \lambda\rho_1\cos\omega_1 + \mu\rho_1\sin\omega_1 + \nu = 0, \tag{2}$$

$$\rho_2^2 + \lambda\rho_2\cos\omega_2 + \mu\rho_2\sin\omega_2 + \nu = 0. \tag{3}$$

Représentons par δ la distance CH, par ω l'angle A′CH, par B_1 le second point de rencontre de la droite CA′ avec la circonférence ABA′; les deux valeurs de ρ qui vérifient l'équation (1) seront $CA' = \frac{\delta}{\cos\omega}$ et le rayon vecteur CB_1 que nous désignons par ρ. Par conséquent, en considérant la somme et le produit des racines de (1), on trouve

$$\rho + \frac{\delta}{\cos\omega} + \lambda\cos\omega + \mu\sin\omega = 0, \tag{4}$$

$$\rho\frac{\delta}{\cos\omega} = \nu.$$

Si l'on remplace ν par la dernière valeur et qu'on élimine ensuite λ et μ entre les égalités (2), (3) et (4), on obtient l'équation du lieu décrit par le point B_1 lorsque A′ parcourt a :

$$\begin{vmatrix} \rho + \frac{\delta}{\cos\omega} & \cos\omega & \sin\omega \\ \rho\frac{\delta}{\cos\omega} + \rho_1^2 & \rho_1\cos\omega_1 & \rho_1\sin\omega_1 \\ \rho\frac{\delta}{\cos\omega} + \rho_2^2 & \rho_2\cos\omega_2 & \rho_2\sin\omega_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Multiplions la première colonne par $\cos\omega$ et développons ensuite suivant les éléments de cette colonne; il vient

$$(\rho\cos\omega + \delta)\sin(\omega_2 - \omega_1) + (\rho\delta + \rho_1^2\cos\omega)\frac{\sin(\omega - \omega_2)}{\rho_1}$$

$$+ (\rho\delta + \rho_2^2\cos\omega)\frac{\sin(\omega_1 - \omega)}{\rho_2} = 0.$$

Le lieu de B_1 est donc une cubique; en prenant les points de rencontre

de cette courbe avec la droite b, on aura les solutions du problème proposé.

2° A′ étant un point mobile sur a, la droite CA′ rencontre la circonférence ABA′ en un point B_1 et la droite b en un point B_2; en ces points, menons les droites B_1E_1, B_2E_2 perpendiculaires à CA′. La droite B_2E_2 enveloppe une parabole π ayant C pour foyer, b pour tangente au sommet. La droite B_1E_1 enveloppe une courbe σ qui est l'antipodaire de C par rapport à la cubique considérée ci-dessus et dont l'équation tangentielle se déduit immédiatement de (5); car si l'on adopte deux axes rectangulaires CH et CY, B_1E_1 a pour équation normale $x\cos\omega + \rho\sin\omega - \rho = 0$, de sorte que ses coordonnées sont $u = -\frac{\cos\omega}{\rho}$, $v = -\frac{\sin\omega}{\rho}$.

Nous allons chercher directement l'équation de σ en adoptant pour axe des y la droite a, pour axe des x la perpendiculaire à a au point de rencontre de a avec la droite AB. Les coordonnées des points A, B, C, A′ étant (x_1, mx_1), (x_2, mx_2), (x_3, y_3), $(0, \lambda)$, un calcul facile donne pour les coordonnées du point D diamétralement opposé à A sur la circonférence ABA′

$$x = \frac{(1+m^2)[\lambda(x_1+x_2) - mx_1x_2] - \lambda^2 m}{\lambda}, \quad y = \frac{x_1x_2(1+m^2)}{\lambda};$$

on en déduit l'équation de la droite B_1E_1 qui passe par D :

$$\lambda^2(y - mx_3) - \lambda[yy_3 + xx_3 - (1+m^2)(x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2)] + x_1x_2(1+m^2)(y_3 - mx_3) = 0.$$

L'équation de σ s'obtient en égalant à zéro le discriminant de l'équation précédente en λ. On en conclut que σ est une parabole tangente à la droite $y - mx_3 = 0$.

Les tangentes communes aux deux paraboles π et σ coupent la droite b aux points cherchés B′.

Cas particulier. Si les points A, B, C sont en ligne droite, on a

$$CA.CB = CA'.CB',$$

d'ou l'on conclut que le point B′ est à l'intersection de b avec la circonférence obtenue en transformant par inversion la droite a, le pôle étant en C et la puissance égale à CA.CB.

Le problème est encore quadratique lorsque A, B, C étant en ligne droite, on remplace b par une circonférence ou les deux droites a, b par des circonférences.

NOTE. Les cercles passant par A et B déterminent sur a et b deux involutions projectives. Elles sont projetées de C suivant deux involutions de rayons projectives. Ces dernières ont quatre éléments doubles dont l'un joint les points C et ab. Les trois autres donnent les solutions du problème. Ce qui précède s'applique à la question généralisée. (C. S.)

Question 1370 (NOUVELLE).

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 240.)

Soient ABC, A'B'C' *deux triangles métaparallèles*, D *et* D' *leurs métapôles* (question 1368). *On sait que les six points* (AD', B'C'), ···, (A'D, BC), ... *sont sur une même droite* Δ (AFAS, *Ajaccio*, 1901). *Démontrer que si les triangles sont homologiques, la droite* Δ *passe par les milieux des segments* MD *et* MD', M *étant le centre d'homologie.*

(L. RIPERT.)

Solution par M. P. BASTIN. Prenons ABC pour triangle de référence et appelons l, m, n les coordonnées barycentriques absolues de D, de sorte que $l+m+n=1$. Les droites AD, BD, CD ayant pour équations

$$ny-mz=0,\quad lz-nx=0,\quad mx-ly=0,$$

leurs parallèles B'C', C'A', A'B' peuvent être représentées par

$$ny-mz+\lambda=0,\quad lz-nx+\mu=0,\quad mx-ly+\nu=0,$$

où λ, μ, ν sont des constantes. En tirant des deux dernières équations combinées avec l'identité $x+y+z=1$ la coordonnée x du point A', on trouve $x=l+\mu-\nu$; telle est aussi l'équation de la droite A'D' parallèle à BC. On en conclut les coordonnées de D' :

$$x=l+\mu-\nu,\quad y=m+\nu-\lambda,\quad z=n+\lambda-\mu.$$

Les équations des droites A'D, AD' sont

$$lz-nx+\mu-k(mx-ly+\nu)=0,\qquad \frac{y}{m+\nu-\lambda}=\frac{z}{n+\lambda-\mu}.$$

En exprimant que la première est vérifiée par les coordonnées de D, on trouve $\mu-k\nu=0$, de sorte qu'elle prend la forme

$$(lz-nx)\nu-(mx-ly)\mu=0,$$

ou

$$l\Sigma\lambda x-x\Sigma l\lambda=0.$$

Il en résulte que le point (A'D, BC) et, par analogie, les points (B'D, CA), (C'D, AB) sont situés sur la droite

$$\lambda x+\mu y+\nu z=0. \qquad (1)$$

Le point (AD', B'C') vérifie les deux équations

$$y(n+\lambda-\mu)-z(m+\nu-\lambda)=0, \quad ny-mz+\lambda=0,$$

et aussi celle qu'on obtient en retranchant ces équations membre à membre, c'est-à-dire

$$y(\lambda-\mu)-z(\nu-\lambda)-\lambda=0;$$

cette dernière au moyen de l'identité $x+y+z=1$, se ramène à (1), ce qui prouve que les six points (AD', B'C'), (A'B, BC), ... sont sur une même droite Δ.

L'équation de la droite DD' est

$$\begin{vmatrix} x & l & l & +\mu-\nu \\ y & m & m & +\nu-\lambda \\ z & n & n & +\lambda-\mu \end{vmatrix}=0;$$

elle se ramène facilement à

$$\Sigma x(\lambda-\Sigma l\lambda)=0, \quad \text{ou} \quad \Sigma\lambda x-\Sigma l\lambda\Sigma x=0,$$

d'où l'on conclut que les droites DD', Δ sont parallèles.

La droite AA' a une équation de la forme

$$lz-nx+\mu=p(mx-ly+\nu);$$

en exprimant qu'elle passe par le point A (1, 0, 0), on trouve

$$(m+\nu)(lz-nx+\mu)=(\mu-n)(mx-ly+\nu). \qquad (2)$$

Si cette équation et les équations des droites BB', CC' ont une solution commune, on trouve, en les multipliant, la condition d'homologie :

$$(m+\nu)(n+\lambda)(l+\mu)=(\mu-n)(\nu-l)(\lambda-m).$$

L'équation (2) peut prendre la forme

$$(\mu m+n\nu)(1-x)+ly(\mu-n)+lz(m+\nu)=0;$$

en faisant la somme des équations des droites AA', BB', CC', on trouve

$$2\Sigma\lambda l+\Sigma x[-\mu m-\nu n+\lambda(m+n)]=0$$

ou
$$\Sigma\lambda l(2-\Sigma x)+\Sigma m\Sigma\lambda x=0,$$

ou
$$\Sigma\lambda x+\Sigma\lambda l=0. \qquad (3)$$

Cette équation représente une droite parallèle à DD' et à Δ et sur laquelle est situé le centre d'homologie ; on voit facilement que la droite (3) est symétrique de DD' par rapport à Δ. Donc ....

Note. I. Désignons les points (AD', B'C'), (BD', C'A'), (CD', A'B') (A'D, BC), (B'D, CA), (C'D, AB) par A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1. M. Ripert

a trouvé que ces six points sont en ligne droite; M. Bastin a donné ci-dessus une démonstration analytique de cette propriété; M. A. C. nous en a communiqué une démonstration géométrique basée sur le lemme suivant :

Étant donné un trapèze quelconque (convexe ou étoilé) MNPQ, *ayant pour bases* MN, QP, *si par deux sommets opposés* N, Q *on mène deux parallèles de direction quelconque qui rencontrent les côtés non parallèles* MQ, NP *respectivement en* N′ *et* Q′, *les droites* PN′, MQ′ *sont également parallèles entre elles.*

D'après ce lemme, si l'on considère le trapèze ADB′A_1, les parallèles AC, B′D′ menées par deux sommets opposés rencontrent les côtés non parallèles DB′, AA_1 en deux points B'_1, D′ tels que les droites $A_1B'_1$, DD′ sont parallèles. Par analogie, les droites A'_1B_1, $A_1C'_1$, ... sont parallèles à DD′; donc . .

2. Une projection centrale permet de passer du théorème de M. Ripert à une proposition plus générale, que nous allons démontrer bien qu'elle soit contenue dans notre article sur les quadrangles paralogiques.

Une transversale quelconque u rencontre les couples de côtés opposés (BC, AD), (CA, BD), (AB, CD) d'un quadrangle complet ABCD en trois couples de points (1, 1′), (2, 2′), (3, 3′) d'une involution. Réciproquement, étant donnés trois couples de points 11′, 22′, 33′ d'une involution, si les côtés d'un triangle ABC passent par les points 1, 2, 3, les droites A1, B2, C3 concourent en un même point.

D'après cela, si les côtés d'un second triangle A′B′C′ passent par les points 1′, 2′, 3′, les droites A′1, B′2, C′3 concourent en un même point D′. Les deux quadrangles complets ABCD, A′B′C′D′ sont alors tels que les six couples de côtés opposés (BC, A′D′), (CA, B′D′), (AB, C′D′), (B′C′, AD), ... ont leurs points d'intersection 1, 2, 3, 1′, ... sur une même droite u. Nous avons proposé d'appeler de tels quadrangles *paralogiques.*

Le théorème de M. Ripert, généralisé, peut être énoncé ainsi : *Si les quadrangles* ABCD, A′B′C′D′ *sont paralogiques, il en est de même des quadrangles* ABCD′, A′B′C′D *et les deux axes de paralogie se coupent sur la droite* DD′. Pour le démontrer, observons que l'involution (11′, 22′, 33′) est projetée à partir de D′ par un faisceau involutif; par suite, les droites D′A, D′B, D′C rencontrent les côtés du triangle A′B′C′ en trois points d'une même droite v. Par analogie, les droites C′A′, C′B′, C′D

rencontrent BA', AD', AB en trois points collinéaires; deux de ces points appartiennent déjà à la droite v, etc. Soient M, N les points (AC, DB'), (D'C, A'B') et considérons les deux ternes de points collinéaires (B'DM), (CMD'); en appliquant le théorème de Pascal sur un hexagone inscrit à deux droites, on voit que les points d'intersection des droites (B'M, DC), (DD', MN) (B'D', MC) sont en ligne droite; or, MN est la droite v et les points (B'N, DC), (B'D', MC) sont les points 3', 2, donc etc. (J. N.)

Question 1403.

(Voir *Mathesis*, (3) III, p. 40.)

Déterminer les trajectoires sous un angle quelconque d'une famille de courbes situées dans un même plan et déduite de l'une d'elles : 1° *en lui imprimant une translation de direction constante;* 2° *en la faisant tourner autour d'un point fixe;* 3° *en prenant son homothétique par rapport à un point fixe, le rapport d'homothétie étant variable.*

Démontrer que chacune de ces familles de trajectoires jouit de la même propriété que la famille à laquelle elle correspond. (A. Demoulin).

Solution par M. P. Thonet. 1° Prenons deux axes rectangulaires, l'axe oy ayant la direction de la translation. L'équation de la famille est $y + \lambda = fx$, λ désignant un paramètre variable. Soit m la tangente de l'angle sous lequel les trajectoires coupent les courbes de la famille; si α, α' sont les angles que Ox fait avec les tangentes à une courbe de la famille et à une trajectoire, on doit avoir :

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = m.$$

Or,

$$\operatorname{tg}\alpha = f'x,$$

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{dy}{dx}.$$

L'équation différentielle des trajectoires est dès lors :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'x - m}{1 + mf'x}, \tag{1}$$

On les obtient par une simple quadrature :

$$y + \mu = \int \frac{f'x - m}{1 + mf'x}\,dx,$$

ce qui montre que les trajectoires se déduisent de l'une d'elles par une translation parallèle à Oy(*).

Remarque. Soit M (x, y) un point du plan : il y passe une courbe Γ de la famille et une trajectoire T; si y_1 est l'ordonnée de la trajectoire, on a, en M,

$$y'_1 = \frac{y' - m}{1 + my'} = \varphi(y'). \tag{2}$$

Menons l'ordonnée correspondant à l'abscisse $x + \Delta x$; elle coupe Γ en c et T en t : les tangentes en ces points à ces courbes ont pour coefficients angulaires $y' + \Delta y'$ et $y'_1 + \Delta y'_1$. Par t, passe une courbe Γ_t de la famille : soit y'_t le coefficient angulaire de la tangente à Γ_t en ce point; on a, d'après (2) :

$$y'_1 + \Delta y'_1 = \varphi(y'_t). \tag{3}$$

Mais Γ_t se déduisant de Γ par une translation parallèle à Oy, les tangentes en deux points correspondants c et t sont parallèles, par suite $y'_t = y' + \Delta y'$ et l'équation (3) peut s'écrire

$$y'_1 + \Delta y'_1 = \varphi(y' + \Delta y').$$

En rapprochant cette dernière équation de l'équation (2), on voit qu'on peut égaler les dérivées des deux membres de ladite équation. On trouve :

$$\frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{1 + y'^2_1}{y''_1}, \tag{4}$$

ou

$$\rho \cos \alpha = \rho_1 \cos \alpha_1, \tag{5}$$

ρ et ρ_1 étant les rayons de courbure de Γ et T en M. Soient C et C_1 les centres de courbure : *ces points sont sur une parallèle à* Ox. En effet, d'après (5), les projections de MC et de MC_1 sur Oy sont égales et (4) montre que Γ et T sont à la fois concaves ou convexes vers Ox.

2° Prenons des coordonnées polaires, le point fixe O étant le pôle. L'équation de la famille est de la forme :

$$\theta - \omega = fr,$$

où ω est un paramètre variable. Soient, en un point M, α, α' les angles

(*) Certaines trajectoires ne peuvent pas être obtenues par ce procédé. Ce sont celles qui se réduisent à des parallèles à Oy. On reconnaît géométriquement l'existence de telles trajectoires. L'Analyse les met également en évidence : l'équation (1) est, en effet, vérifiée lorsqu'on y fait $1 + mf'x = 0$.

Une remarque analogue s'applique aux trajectoires des deux autres familles.

(A. Demoulin).

des tangentes à la courbe et à la trajectoire avec OM. On doit avoir

$$\operatorname{tg}(u - u') = m.$$

Or,

$$\operatorname{tg} u = rf'r, \quad \operatorname{tg} u' = r\frac{d\theta}{dr}.$$

L'équation différentielle des trajectoires est donc

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{rf'r - m}{1 + mrf'r}.$$

Séparant les variables et intégrant :

$$\theta - \alpha = \int \frac{rf'r - m}{(1 + mrf'r)r}\,dr.$$

Toutes ces trajectoires se déduisent donc de l'une d'elles par rotation de celle-ci autour du pôle.

3° Prenons encore des coordonnées polaires; l'équation de la famille sera dans ce cas :

$$kr = f\theta \qquad (6)$$

où k est un paramètre variable. On a donc $kdr = f'\theta d\theta$. Par suite, pour les courbes de la famille :

$$\operatorname{tg} u = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{f\theta}{f'\theta}.$$

L'équation différentielle des trajectoires s'écrit

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{f\theta - mf'\theta}{f'\theta + mf\theta}.$$

Séparant les variables, et intégrant, il vient

$$r = Ce^{\int \frac{f\theta + mf'\theta}{f'\theta - mf\theta}\,d\theta},$$

équation de la forme (6) : les trajectoires sont donc bien homothétiques l'une de l'autre.

M. Claeys a résolu la même question.

Note. On peut rattacher la propriété établie plus haut par M. Thonet à un théorème général concernant les trajectoires isogonales. Ce théorème, dû à M. G. Scheffers (*), est le suivant :

Étant donnée, dans un plan, une série simplement infinie de courbes, on considère les courbes qui les coupent sous l'angle ω. *Lorsque* ω *varie, on obtient* ∞^1 *trajectoires. Cela posé, les centres de courbure, en un point*

(*) *Leipziger Berichte*, 1898.

quelconque du plan, de celles de ces trajectoires qui passent en ce point sont distribués sur une droite.

Reprenons la famille de courbes déduites de l'une d'elles en lui imprimant une translation parallèle à Oy. Par un point quelconque M du plan passent une courbe Γ de la famille et une trajectoire T d'angle ω. Soient d la parallèle à Oy, issue de M, et ω_0 l'angle qu'elle fait avec Γ. Parmi les trajectoires d'angle ω_0, se trouve la droite d. Faisons observer, d'autre part, que les trajectoires d'angle *zéro* des courbes de la famille sont ces courbes elles-mêmes. Or, les centres de courbure des courbes Γ, T et d, au point M, sont les points C, C_1 et le point à l'infini de l'axe Ox. En vertu du théorème ci-dessus, ces points sont en ligne droite; autrement dit, la droite CC_1 est parallèle à Ox, ce qui est le théorème de M. Thonet.

Une propriété analogue peut être établie à l'égard des deux autres familles de courbes. Conservons les notations précédentes. On reconnaîtra aisément que, dans le cas des courbes de la deuxième famille, la droite CC_1 passe par le point O, et que, pour les courbes de la troisième famille, la droite CC_1 est perpendiculaire à OM.

Le théorème de M. Scheffers est compris dans le suivant, que M. Th. Caronnet a fait connaître, dès 1892, dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* :

Étant donnée, sur une surface, une série simplement infinie de courbes, on considère les courbes qui les coupent sous l'angle ω. *Lorsque* ω *varie, on obtient* ∞^2 *trajectoires. Les centres de courbure geodésique, en un point quelconque de la surface, de celles de ces trajectoires qui passent en ce point sont distribués sur une droite.*

Le théorème de M. Caronnet conduit naturellement à chercher la famille à deux paramètres la plus générale jouissant de la propriété indiquée.

Voici le résultat, inédit, auquel je suis parvenu en 1893. Rapportons une surface quelconque aux familles d'un système orthogonal et isotherme, et soit

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$$

l'expression du carré de son élément linéaire.

La famille la plus générale de courbes à deux paramètres telles que les centres de courbure géodésique de celles de ces courbes qui passent en un

II. La formule (1) admet l'interprétation géométrique suivante :

Soient E_1, F_1 les points de contact de AC, AB avec le cercle inscrit I; la droite F_1I rencontre AC en un point L tel que $F_1L = 2R$. En effet, le triangle E_1IL donne $IL = \frac{r}{\cos A} = 2R - r$, d'où $F_1L = 2R$.

III. Si le triangle DEF est rectangle en D, on a

$$2\cot A + \sin A = \sin B + \sin C,$$

de sorte que les angles B et C sont liés par la relation

$$-2\cot(B+C) + \sin(B+C) = \sin B + \sin C$$

ou

$$\cot(B+C) + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B+C}{2} = 0. \qquad \text{(Emmerich).}$$

Solution par MM. Ots *et* Weber. 1° On a

$$\overline{EF}^2 = (p-b)^2 + (p-c)^2 - 2(p-b)(p-c)\cos A, \qquad (1)$$

$$\overline{FD}^2 = (p-c)^2 + (p-a)^2 - 2(p-c)(p-a)\cos B, \qquad (2)$$

$$\overline{DE}^2 = (p-a)^2 + (p-b)^2 - 2(p-a)(p=b)\cos C. \qquad (3)$$

Supposons DF = DE; les égalités (2) et (3) donnent

$$(p-c)^2 - (p-b)^2 = 2(p-a)\,[(p-c)\cos B - (p-b)\cos C]. \qquad (4)$$

Le premier membre de (4) se réduit à $a(b-c)$; si l'on remplace cos B, cos C par les valeurs $\frac{a^2-(b^2-c^2)}{2ac}$, $\frac{a^2+(b^2-c^2)}{2ab}$, le second membre se ramène à

$$\frac{p-a}{abc}[a^2p(b-c) - (b^2-c^2)(pb+pc+2bc)].$$

L'équation (4) admet donc la solution $b-c=0$, qui correspond au cas d'un triangle isoscèle ABC. En écartant cette solution, on a encore

$$a^2bc = (p-a)[a^2p - p(b+c)^2 - 2bc(b+c)]$$
$$= -(p-a)[4p^2(p-a) + 2bc(b+c)],$$

égalité impossible.

2° L'égalité $\overline{EF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2$ revient à

$$(p-a)[p-a-(p-c)\cos B - (p-b)\cos C]$$
$$+(p-b)(p-c)\cos A = 0.$$

La quantité entre crochets, à cause de $a = b\cos C + \cos B$, se réduit à $p(1 - \cos B - \cos C)$; en observant ensuite que

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = (p-b)(p-c) : p(p-a)$$

on trouve

$$\cos B + \cos C - 1 = \cos A \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}.$$

Ajoutons aux deux membres de cette égalité cos A et ayons égard à la relation

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{R};$$

il vient

$$\frac{r}{R} = \cos A\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right) = \frac{\cos A}{\sin^2\frac{1}{2}A} = \frac{2\cos A}{1-\cos A},$$

d'où enfin

$$\cos A = \frac{r}{2R-r}.$$

On peut encore remarquer les formules

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{R}{2R-r}, \quad \sin^2\frac{A}{2} = \frac{R-r}{2R-r}, \quad \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \frac{R-r}{R}.$$

M. Ots indique encore d'autres expressions des côtés du triangle DEF; par exemple

$$\overline{EF}^2 = a^2 - \frac{aS}{R} = a^2(1 - \sin B \sin C),$$

et en déduit une autre démonstration de la question 1405.

Pour l'aire du triangle DEF, il trouve $\frac{Sr}{2R}$; c'est la même expression que pour le triangle qui a pour sommets les points de contact des côtés de ABC avec le cercle inscrit, circonstance qui s'explique par la propriété que les sommets des deux triangles inscrits à ABC sont deux à deux symétriques par rapport aux milieux des côtés de ABC.

Question 1413.

(Voir *Mathesis*, (3) III, p. 80).

Résoudre le système

$$x + y = 2a$$

$$\sqrt{mx^2 + nx + p} + \sqrt{my^2 + ny + p} = 2b.$$

Solution par M. Emmerich. Le système peut s'écrire

$$x + y = 2a, \quad t + u = 2b,$$

$$mx^2 + nx + p = t^2, \quad my^2 + ny + p = u^2.$$

l'une le point D, l'autre le point E. 4° Trouver les lieux des centres des cercles S_1, S_2 quand le cercle O et la corde BC varient en satisfaisant aux conditions suivantes : *a*) Le point B reste fixe et le cercle O touche une droite donnée *l*; *b*) La corde BC du cercle variable O passe par le point fixe B; de plus elle est vue du centre O de ce cercle variable O sous un angle *constant* égal à 2A.

(*Agrégation de l'enseignement secondaire des jeunes filles*, 1902.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1427. Soient, sur une conique donnée Σ, A, B deux points fixes et C un point variable. Par C on mène une tangente *t* à une seconde conique donnée Σ'; trouver l'enveloppe de la conjuguée harmonique de *t* par rapport à l'angle ACB. (St. N. Mirea.)

1428. ABCD étant un tétraèdre équifacial (dont les arêtes opposées sont égales), soient O_a, O_b, O_c, O_d les centres des cercles circonscrits aux faces, et soient O'_a, O'_b, O'_c, O'_d les réciproques de ces centres dans les faces correspondantes. Démontrer que les droites AO_a, BO_b, CO_c, DO_d sont des génératrices d'un même mode d'un hyperboloïde et que les droites AO'_a, BO'_b, CO'_c, DO'_d sont des génératrices du second mode du même hyperboloïde.

Calculer en fonction des angles d'une face le rapport des volumes des tétraèdres $O_aO_bO_cO_d$, ABCD. (J. Neuberg.)

1429. Si l'on appelle $(xyz)_i$ le mineur du terme m_i dans le déterminant $|\,mxyz\,|$, démontrer que l'on a

$$|\,(aa'a'')_i,\ (ba'a'')_i,\ (bb'a'')_i,\ (bb'b'')_i\,| = |\,baa'a''\,| \times |\,bb'a'a''\,| \times |\,bb'b''a''\,|.$$

(M. Stuyvaert.)

×**1430.** Parmi tous les quadrilatères ABCD, plans ou gauches, déterminer ceux pour lesquels on a, M désignant un point quelconque de l'espace,

$$\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MD}^2.$$

(*École Militaire, Armes spéciales; Examens oraux.*)

Rectifications. Page 83, ligne 19, lire $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$; Page 83, ligne 17, lire y_1 au lieu de y_2; Page 110, ligne 9, lire $Y_1 = (x_1y'_1 + x'_1y_1)$; ligne 2 en remontant, lire $Y_a =$; Page 129, ligne 5 en remontant, lire $+ \cos\theta$.

SUR LE COMPLEXE DES AXES D'UNE QUADRIQUE,

par M. C. Servais, professeur à l'Université de Gand.

1. D'un point M_1 réel ou imaginaire on abaisse une perpendiculaire m_1, sur son plan polaire μ_1 par rapport à une quadrique (Σ); m_1 et μ_1 déterminent dans un plan de symétrie α un point M et sa polaire m relativement à la conique focale du plan α. La droite m_1 est normale à sa conjuguée m'_1 et ces droites rencontrent le plan α en deux points conjugués aux coniques focale et principale du plan α. Le rayon m_1 et ses analogues appartiennent à un complexe tétraédral (T) appelé par M. Reye le complexe des axes de la quadrique (Σ). (*Leçons sur la Géométrie de position*, t. II, p. 181). M. Kœnigs appelle le point M_1, *le point de départ du rayon* m_1; il étudie les points de départ des rayons du complexe (T) qui font partie d'un complexe linéaire. Nous démontrons géométriquement, sans recourir au principe de continuité les résultats de cet intéressant travail (*Sur le complexe formé par les axes d'une surface du second ordre*. N.A.M. 1883, p. 267).

2. *Tétraèdre principal.* Le tétraèdre principal ABCD d'un ellipsoïde ou hyperboloïde a pour sommets le centre de la surface et les pôles des trois plans de symétrie.

Si D est le point à l'infini d'un paraboloïde, A et B les pôles des plans de symétrie α et β, le tétraèdre principal est ABCD, C et D étant deux points infiniment voisins sur l'axe a du paraboloïde.

3. *Systèmes réglés et coniques du complexe* (T). Les perpendiculaires m_1, m_2, ... abaissées des points M_1, M_2, ... d'une droite réelle s sur leurs plans polaires décrivent un système réglé $(m_1 m_2 \ldots.)$ du complexe (T). Ce système est tangent aux faces du tétraèdre principal, et la figure réciproque par rapport à la quadrique (Σ) est un système réglé $(m'_1, m'_2, \ldots.)$ circonscrit au tétraèdre principal; il appartient au complexe (T).

Si la quadrique (Σ) est un paraboloïde, le système $(m_1 m_2 \ldots.)$ est tangent au plan de l'infini en un point de la droite AB. En effet, soit s' la conjuguée de s par rapport à (Σ); un rayon m_1 joint les pôles d'un plan μ du faisceau (s') relativement à (Σ) et à l'une des coniques focales. En particulier, le rayon à l'infini du système $(m_1 m_2 \ldots.)$ joint les pôles S et S' du plan s'D relativement à (Σ) et au cercle imaginaire à l'infini. Quant

à la directrice à l'infini, elle est la polaire de s' par rapport au même cercle; elle passe par le point S' qui est d'ailleurs sur AB.

Le système $(m'_1 m'_2 \ldots)$, dans le cas où (Σ) est un paraboloïde, passe donc par A et B et est tangent en D à l'axe a. On peut dire aussi qu'il est circonscrit au tétraèdre ABCD.

4. Si les droites s et s' sont perpendiculaires, les droites $m_1, m_2, \ldots$ enveloppent une parabole du complexe (T); elle est tangente aux faces du tétraèdre principal. La figure réciproque est un cône du complexe circonscrit au tétraèdre principal. Si la quadrique (Σ) est un paraboloïde, la parabole du complexe est tangente au plan de l'infini en un point de AB.

En effet, une tangente m_1 joint les pôles d'un plan du faisceau (s') par rapport à (Σ) et au cercle imaginaire à l'infini. Les pôles relativement au cercle sont sur la polaire s'' de s' par rapport à ce cercle. Mais la tangente à l'infini doit joindre les pôles S et S' du plan $s'D$, par suite le point S' situé sur AB est le point de contact de s'' avec la parabole. Le cône réciproque $(m'_1, m'_2 \ldots)$ passe par A et B et est tangent en D à l'axe a. On peut dire aussi qu'il est circonscrit au tétraèdre ABCD.

5. *Si un système réglé* $(m_1 m_2 \ldots)$ *du complexe* (T) *est tangent à une face* α *du tétraèdre principal, il est tangent aux autres faces, et le lieu des points de départ est une directrice de ce système.*

Soient p la directrice du système réglé située dans le plan α, $(m'_1, m'_2 \ldots)$ le système réglé réciproque de $(m_1 m_2 \ldots)$ par rapport à la quadrique (Σ); (C) la section de $(m'_1 m'_2 \ldots)$ par le plan α; M et M' les traces de m_1 et m'_1 sur le plan α. La conique (C) est le lieu des points M' conjugués des points M de la droite p relativement aux coniques focale et principale du plan α; elle passe par le pôle P de p par rapport à la conique focale, et par suite $P(m'_1 m'_2 \ldots)$ est un faisceau de plans; les pôles $M_1 M_2 \ldots$ de ces plans relativement à (Σ) sont respectivement sur $m_1, m_2, \ldots$ et appartiennent à une directrice du système réglé $(m_1 m_2 \ldots)$. La droite PM' étant la polaire de M par rapport à la conique focale, M_1 est le point de départ du rayon m_1. Le système $(m_1 m_2 \ldots)$ est ainsi formé par les perpendiculaires abaissées des points $M_1 M_2 \ldots$ sur leurs plans polaires et il est tangent aux faces du tétraèdre principal.

6. On en conclut que le système réglé $(m'_1, m'_2 \ldots)$ passe par les sommets du tétraèdre principal (2). Le point de départ M'_1 du rayon m'_1

est le pôle du plan μ' mené par m_1 normal à m'_1. La trace m' de μ' sur le plan α est la polaire de M′ par rapport à la conique focale; on en déduit que m' enveloppe une conique (C′) polaire réciproque de (C) par rapport à la conique focale. Si (Σ) est un ellipsoïde ou un hyperboloïde, la courbe (C′) est une parabole tangente aux axes; il existe des coniques analogues dans les autres faces du tétraèdre et le plan μ' enveloppe une développable osculatrice à une cubique gauche. Cette développable est tangente aux faces du tétraèdre principal. Le lieu du point de départ M'_1 est donc une cubique gauche circonscrite à ce tétraèdre. Si la surface (Σ) est un paraboloïde, la conique (C) a pour asymptote l'axe a et passe par B; la courbe (C′) est donc une parabole passant par B et tangente à l'axe a. La conique analogue à (C′) dans le second plan de symétrie β, est une parabole passant par A et tangente à a. La développable engendrée par le plan μ' est circonscrite à ces deux coniques et est osculatrice à une cubique gauche; la droite AB est une tangente à cette cubique. Le lieu des points de départ des rayons (m'_1, m'_2 ....) est donc une cubique gauche passant par A et B et tangente en D à l'axe a. On peut dire aussi qu'elle est circonscrite au tétraèdre ABCD. Ainsi : *Si un système réglé du complexe* (T) *passe par un sommet du tétraèdre principal, il passe par les autres sommets; le lieu des points de départ est une cubique gauche circonscrite au tétraèdre principal.*

7. On démontre de même ce théorème : *Le lieu des points de départ des génératrices d'un cône du complexe* (T) *est une cubique gauche circonscrite au tétraèdre principal.*

On examine au numéro **15**, le cas où le cône se décompose.

8. Réciproquement *si un point décrit une cubique gauche circonscrite au tétraèdre principal, le rayon du complexe* (T) *dont il est le point de départ, décrit un cône ou un système réglé.*

D'un point réel M_1 de la cubique donnée C_3 on abaisse une perpendiculaire m_1 sur son plan polaire. Si m_1 rencontre C_3 en un second point R, le cône projetant de ce point la courbe C_3 appartient au complexe (T), et cette cubique est le lieu des points de départ des génératrices de ce cône (7).

Si m_1 est une semi-sécante de C_3 on mène d'un second point réel M_2 de la courbe une normale m_2 à son plan polaire. Les rayons m_1 et m_2 déterminent un système réglé du complexe (T) circonscrit au tétraèdre

principal. Le lieu des points de départ des rayons de ce système est la cubique C_3 (⑧).

Remarque. Les rayons m_1 et m_2 ne peuvent se rencontrer, sinon leur point d'intersection S serait le sommet d'un cône du complexe dont m_1 et m_2 seraient des génératrices, le lieu des points de départ des rayons de ce cône serait C_3 et cette cubique passerait par S; la droite m_1 ne serait pas alors une semi-sécante.

⑨. *Le lieu des points de départ des droites réelles ou imaginaires du complexe* (T) *rencontrant une droite donnée réelle l, est une surface réglée du second ordre* H_1, *polaire réciproque par rapport à* (Σ) *de celle engendrée par les perpendiculaires abaissées des points de l', conjuguée de l, sur leurs plans polaires respectifs. La surface* H_1 *passe par l et est circonscrite au tétraèdre principal.*

Soient π un plan réel ou imaginaire mené par la droite l, P son pôle, n la normale au plan π issue de P, n' la conjuguée de n. Le point P et la droite n' sont respectivement sur l' et sur π. Un plan μ_1 mené par n a son pôle M_1 sur n' et la perpendiculaire abaissée de M_1 sur μ_1 est dans le plan π. Cette droite m_1 du complexe (T) rencontre l et son point de départ M_1 est situé sur n'. D'ailleurs toute droite m_1 du complexe (T) située dans le plan π a sa conjuguée m'_1 passant par P et le plan nm'_1 est normal à m_1. Le pôle M_1 de ce plan, point de départ du rayon m_1 est situé sur n'. La droite n' est donc le lieu des points de départ des rayons du complexe (T) situés dans le plan π. Quand P se meut sur l', la droite n décrit un paraboloïde inscrit au tétraèdre principal, la surface engendrée par n' est la polaire réciproque de ce paraboloïde; elle passe par l et est circonscrite au tétraèdre principal.

⑩. Si l appartient au complexe (T), l' est normale à l; n enveloppe une parabole du complexe (T) (4); elle est dans un plan λ_1, mené par l' normal à l. La figure réciproque est le cône du complexe (T) ayant pour sommet le pôle L_1 du plan λ_1, c'est-à-dire le point de départ du rayon l.

⑪. Si l est dans une face α du tétraèdre principal, la détermination précédente du lieu n' des points de départ des rayons du complexe situés dans un plan π issu de l est applicable, si π est distinct de α. Alors en désignant par L le pôle de l par rapport à la conique focale, par λ le plan polaire de L, les perpendiculaires n abaissées des points de l' sur

leurs plans polaires respectifs, passent par L, et leurs conjuguées s' décrivent un faisceau dans le plan λ; le centre de ce faisceau est le pôle du plan Ll' ou le point de départ de l.

Mais si π est le plan α, chacun de ses points est le point de départ d'une droite du complexe située dans ce plan. La quadrique l se compose donc des deux plans λ et α.

12. Chaque génératrice réelle de H_l de même système que l est le lieu des points de départ des rayons d'un système réglé du complexe, inscrit au tétraèdre principal et dont l est une directrice. Ainsi *une droite l n'appartenant pas au complexe* (T), *est directrice d'une infinité simple de systèmes réglés du complexe, inscrits au tétraèdre principal.*

13. Sur la surface H_l il y a un faisceau de cubiques gauches circonscrites au tétraèdre principal, et dont la droite l est une sécante. Chacune d'elles est le lieu des points de départ des rayons d'un système réglé du complexe, circonscrit au tétraèdre principal et dont l est une directrice. Ainsi : *Une droite l n'appartenant pas au complexe* (T), *est directrice d'une infinité simple de systèmes réglés du complexe, circonscrits au tétraèdre principal.*

14. Il existe un second faisceau de cubiques gauches sur H_l, circonscrites au tétraèdre principal et dont l est une semi-sécante. Chacune d'elles est le lieu des points de départ des rayons d'un cône du complexe dont le sommet est un point de la droite l.

15. La droite l perce le plan de symétrie α en un point R; si r est la polaire de R par rapport à la conique focale, r' la conjuguée de r, le cône (R) du complexe (T) se compose des plans α et Rr'. La droite r' est le lieu des points de départ des rayons issus de R dans le plan Rr', et à ce titre appartient à la surface H_l. Dans le plan α le lieu des points de départ des rayons issus de R est la conique (C) intersection de H_l par le plan α. Elle est déterminée par les sommets du tétraèdre principal situés dans α, le point R et le point $R' \equiv (r', \alpha)$.

16. *Tout système réglé* (S) *du complexe* (T) *est inscrit ou circonscrit au tétraèdre principal.*

Soient l et l_1 deux directrices réelles quelconques de (S), H_l et H_{l_1} les quadriques lieux des points de départ des rayons du complexe qui rencontrent l ou l_1. Les quadriques H_l et (S) ayant une directrice commune, les points de départ des rayons de (S) seront sur une droite, une conique, ou

une cubique gauche de H_l. Dans le premier cas (S) est un système réglé inscrit au tétraèdre principal. Dans les deux autres, la conique et la cubique gauche appartiennent également à H_{l_1}. L'intersection complète de H_l et H_{l_1} comprenant les sommets du tétraèdre principal au moins un de ces points sera sur la conique, au moins deux sur la cubique. Mais alors (S) passe par un sommet du tétraèdre et il est circonscrit à ce tétraèdre (6).

17. *Le lieu des points de départ des droites du complexe* (T) *rencontrant deux droites données l et l' réelles est une biquadratique gauche proprement dite ou dégénérée.*

C'est un corollaire du N° 9.

18. Le théorème précédent suppose que les surfaces H_l et $H_{l'}$ (9) n'ont pas une partie commune. Dans cette hypothèse chacune des quadriques H_l et $H_{l'}$ est formée de deux plans et chacune des droites l, l' appartient à une face du tétraèdre principal. Si l et l' sont dans une même face α, ce plan est commun aux surfaces $H_l \equiv (\alpha, \lambda)$ et $H_{l'} \equiv (\alpha, \lambda')$ (11). Le lieu des points de départ des rayons du complexe (T) coupant l et l' se compose donc du plan α et de la droite $\lambda\lambda'$.

Si l et l' sont dans des faces différentes α, β, les surfaces $H_l \equiv (\alpha, \lambda)$ et $H_{l'} \equiv (\beta, \lambda')$ auront une partie commune si λ est identique à λ'. Dans ce cas les pôles L et L' des plans λ et λ' (11) doivent coïncider. Le point L qui est le pôle de l par rapport à la conique focale du plan α, est ainsi celui de l' par rapport à la conique focale du plan β; il appartient donc à la droite $\alpha\beta$.

Par suite : *Soient* L *un point réel de l'intersection des faces* α, β *du tétraèdre principal,* λ *son plan polaire; les rayons du complexe* (T) *dont les points de départ sont dans le plan* λ, *rencontrent deux droites fixes situées respectivement dans les plans* α *et* β. *Ce sont les polaires du point* L *relativement aux coniques focales des plans* α *et* β.

19. *Dans tout système réglé* (S) *n'appartenant pas au complexe* (T), *quatre génératrices font partie du complexe.*

Les points de départ de ces génératrices forment avec les sommets du tétraèdre principal, les huit points communs aux quadriques H_l, H_{l_1}, H_{l_2} relatives à trois directrices réelles l, l_1, l_2 du système réglé. Ces quadriques ne peuvent former un faisceau, sinon la cubique commune à H_l et (S) ferait partie de la base du faisceau, et contiendrait au moins deux sommets du tétraèdre principal. Le système (S) dans ce cas ferait partie du complexe (T) (●).

20. *Deux directrices l et l_1 d'un système réglé du complexe circonscrit au tétraèdre principal sont également des directrices d'un système réglé du complexe inscrit à ce tétraèdre.*

D'après l'hypothèse, les surfaces H_l et H_{l_1} ont une cubique gauche commune dont l et l_1 sont des sécantes; par suite elles ont une génératrice commune l' de même système que l ou l_1 sur H_l ou H_{l_1}. Cette génératrice commune est le lieu des points de départ des rayons d'un système réglé du complexe inscrit au tétraèdre principal; il passe par l et l_1. On peut démontrer la réciproque par le principe de dualité.

21. *Le lieu des points de départ des droites du complexe* (T) *appartenant à un complexe linéaire, est une surface du second degré circonscrite au tétraèdre principal.*

Soient ll', mm', nn' trois couples de droites conjuguées réelles d'un complexe linéaire. Les droites du complexe (T) rencontrant l'un des couples ll', mm', nn' ont leurs points de départ sur l'une des biquadratiques C_4, C'_4, C''_4 (17). Les courbes C_4 et C'_4 ont huit points communs : A, B, C, D et les points de départ des quatre rayons du complexe (T) coupant l, l', m; elles appartiennent donc à une quadrique (S) qu'elles déterminent. La courbe C''_4 rencontre chacune des biquadratiques C_4 et C'_4 en quatre points différents de A, B, C, D; elle est donc tout entière sur (S). Ainsi les points de départ des droites du complexe (T), faisant partie du complexe linéaire déterminé par les deux couples de droites conjuguées ll', mm', sont sur la quadrique (S). Réciproquement tout point réel ou imaginaire R_i de (S) est le point de départ d'un rayon r_i du complexe (T) appartenant au complexe linéaire considéré. Soient p une droite réelle coupant r_i, p' sa conjuguée dans le complexe linéaire. Les droites du complexe (T) coupant p et p' sont sur une biquadratique de (S), située sur les surfaces Hp et Hp' (9). Mais (S) et Hp passent par R_i ce point est donc sur Hp' et le rayon r_i coupe p'; il appartient donc au complexe linéaire.

Corollaire. Le lieu des points de départ des rayons du complexe (T) rencontrant deux droites réelles ou imaginaires conjuguées de seconde espèce est une biquadratique gauche. Car ces rayons appartiennent à deux complexes linéaires.

Si les droites étaient imaginaires conjuguées de première espèce, elles auraient un point commun réel P et seraient dans un plan réel π. Le lieu se compose alors de la cubique gauche lieu des points de départ des

rayons issus de P (7), et de la droite lieu des points de départ des rayons situés dans π (9).

22. *Toute quadrique* (S) *circonscrite au tétraèdre principal est le lieu des points de départ des rayons du complexe* (T) *appartenant à un complexe linéaire.*

On prend arbitrairement cinq points réels R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 sur (S), les rayons correspondants r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 déterminent un complexe linéaire. Le lieu des points de départ des rayons du complexe (T) appartenant à ce complexe linéaire est la quadrique (S).

Corollaire. Les rayons du complexe (T) dont les points de départ appartiennent à une biquadratique gauche circonscrite au tétraèdre principal, coupent deux droites réelles ou imaginaires conjuguées de seconde espèce.

23. Tout point de la quadrique (Σ) (N° 1) est le point de départ de la normale en ce point à cette surface. Les théorèmes précédents donnent une série de propriétés relatives aux normales de la surface (Σ).

24. *Théorème de Joachimsthal.* Les pieds L, M, N, L_1, M_1, N_1 des normales menées d'un point réel P à la quadrique (Σ) sont sur une cubique gauche dont les axes de Σ sont des sécantes. On sait que toutes les quadriques passant par six points, rencontrent une sécante de la cubique déterminée par ses six points, en des couples de points en involution. La quadrique Σ détermine sur l'axe DA, les sommets A′ et A″, le cône (P) du complexe (T), le centre D et le point à l'infini ; le couple de plans LMN, $L_1M_1N_1$ les deux points R_1 et R'_1 ; on a donc :

$$DA' \cdot DA'' = DR_1 \cdot DR'_1.$$

Ainsi, si a^2, b^2, c^2 sont les carrés des demi-axes de Σ on a

$$DR_1 \cdot DR'_1 = -a^2, \quad DR_2 \cdot DR'_2 = -b^2, \quad DR_3 \cdot DR'_3 = -c^2;$$

R_2, R'_2, R_3, R'_3 désignent semblablement les points d'intersection des axes DB et DC avec les plans LMN, $L_1M_1N_1$. Soient H le pôle du plan LMN relativement à Σ, H_1, H_2 et H_3 ses projections sur les axes ; on a

$$DR_1 \cdot DH_1 = a^2, \quad DR_2 \cdot DH_2 = b^2, \quad DR_3 \cdot DH_3 = c^2,$$

par suite,

$$DR'_1 = -DH_1, \quad DR'_2 = -DH_2, \quad DR'_3 = -DH_3.$$

Ainsi *le plan* $L_1M_1N_1$ *joint les projections sur les axes, du symétrique par rapport au centre, du pôle du plan* LMN.

EXERCICES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE,

par M. E. N. Barisien.

1. D'un point P (x, y) du plan d'une ellipse, on abaisse sur cette courbe les quatre normales; soient A, B, C, D leurs points d'incidence. Démontrer que la somme des carrés des abscisses et celle des carrés des ordonnées des pôles des six cordes AB, BC, AC, BD, AD, BC ont respectivement pour expression

$$\left(\frac{a^2x^2+b^2y^2-c^4}{c^2x}\right)^2+6a^2,\quad \left(\frac{a^2x^2+b^2y^2-c^4}{c^2y}\right)^2+6b^2.$$

Donc si l'une de ces sommes est constante, le lieu de P se compose de deux ellipses.

Si la somme des abscisses des pôles est constante, le point P décrit une ellipse.

2. On projette un foyer F d'une ellipse en P sur une tangente; le cercle de centre P et de rayon PF coupe la tangente en Q et Q'. Démontrer que le lieu des points Q, Q' se compose de deux cercles bitangents à l'ellipse.

Le lieu de P est le cercle principal et les triangles FPQ, FPQ' sont d'espèce constante; donc les lieux des points Q, Q' sont des cercles de Poncelet (podaires obliques de F).

3. Étant donnée une ellipse de centre O, d'un point quelconque M d'une diagonale du rectangle des axes on abaisse sur la courbe les quatre normales MA, MB, MC, MD. Démontrer la relation

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2+\overline{MD}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2.$$

4. D'un point M du plan d'une parabole de foyer F on abaisse les trois normales MA, MB, MC. Démontrer que

$$\frac{FA\cdot FB\cdot FC}{\overline{FM}^2}=\text{const.}$$

5. Soit P le point de Frégier qui correspond à un point M d'une ellipse donnée. Si δ, δ' sont les distances de P et du centre O de l'ellipse à la polaire de P, le rapport $\delta : \delta'$ est constant.

Le point P est à l'intersection de la normale en M avec le diamètre symétrique de OM par rapport à un axe; ses coordonnées sont

$$\alpha=\frac{c^2x}{a^2+b^2},\quad \beta=-\frac{c^2y}{a^2+b^2}.$$

6. On donne deux cercles C et C'. Trouver le lieu du centre d'un cercle Σ tel que l'axe radical de C et Σ touche C' et que l'axe radical de C' et Σ touche C.

7. Soit MM' une corde variable, parallèle au grand axe d'une ellipse. On décrit le cercle ayant son centre en M et pour rayon le grand axe de l'ellipse. La parallèle menée par M' au petit axe rencontre le cercle précédent en deux points P, Q, qui ont chacun pour lieu une ellipse.

Soient x, y les coordonnées de M' et X, Y celles de P ou Q; on a

$$X = x, \quad Y = y \pm 2\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où l'on déduit

$$Y = \pm\left(\frac{b}{a} \pm 2\right)\sqrt{a^2 - X^2}.$$

8. On considère les coniques passant par deux points fixes A, B et ayant un foyer donné F. 1° Le lieu du centre se compose de deux coniques; 2° la directrice correspondant au foyer F passe par l'un ou l'autre de deux points fixes; 3° le lieu des pôles de la droite AB se compose de deux droites.

Cette proposition est connue. 1° De $AF \pm AF' = \pm(BF \pm BF')$ on déduit que $MF \pm M'F'$ est constant. Le lieu de F' se compose donc de deux coniques; le lieu du centre O est homothétique à celui de F'. 2° et 3° Les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle AFB passent l'une par le pôle de AB et l'autre par le point de rencontre de AB avec la directrice.

9. Une sécante variable qui passe par un point fixe P, rencontre une hyperbole en M et les asymptotes en N et N'. Démontrer que le rapport PN.PN' : MN.MN' est constant.

10. Si un cercle qui a son centre sur une parabole touche la corde focale principale, il touche aussi le cercle décrit sur cette corde comme diamètre.

11. Soient F un foyer d'une ellipse, Δ la directrice correspondante, MM' une corde quelconque menée par F, M étant l'extrémité la plus éloignée de point de rencontre D de Δ avec MM'. On a

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FD} = \frac{e}{b^2} = \frac{1}{FM'} - \frac{1}{FD};$$

il en résulte les relations connues

$$\frac{2}{FD} = \frac{1}{FM'} - \frac{1}{FM}, \quad \frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{2a}{b^2}.$$

12. Les bissectrices des angles formés par deux tangentes quelconques d'une parabole rencontrent l'axe de la parabole en deux points équidistants du foyer (Théorème connu).

A déduire de ce que le diamètre mené par un point P et le rayon PF sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle des tangentes issues de P.

13. Trouver le lieu des centres de similitude d'un cercle fixe par rapport à un cercle quelconque d'un faisceau.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons de Trigonométrie rectiligne et sphérique à l'usage de l'enseignement moyen par H. MANDART, Professeur de mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Tongres. Namur, Wesmael-Charlier, 1903 (VII-184 p. in-8). Prix 2,50 fr.

Parmi les élèves qui étudient la trigonométrie, il en est beaucoup qui n'ont besoin que d'un cours très élémentaire; aux autres, il faut un enseignement plus approfondi en vue de la géométrie analytique. M. MANDART s'est dit que les premiers peuvent se passer de la théorie générale des fonctions circulaires, puisque les angles d'un triangle sont toujours positifs et plus petits que 180°; et que les seconds peuvent aussi, dans une première étude, se contenter des formules relatives aux angles moindres que deux droits, sauf à reprendre plus tard une théorie plus complète. C'est pourquoi il a réparti la matière d'une façon originale qui nous semble appelée à avoir du succès.

Le chapitre I donne la définition des lignes trigonométriques d'angles positifs plus petits que deux droits. Cette définition est telle que les sinus, cosinus, tangente, etc. apparaissent d'emblée comme des nombres et non comme des longueurs. Viennent ensuite, sous forme simple, les propriétés usuelles de ces fonctions et les formules des triangles.

Le chapitre II (qui peut être passé lors d'une première étude) contient une théorie générale, vraiment scientifique, des fonctions circulaires. La méthode des projections que l'auteur utilise donne aux théorèmes, à mesure qu'ils se présentent, tout le degré de généralité qu'ils comportent.

Le chapitre III traite des calculs trigonométriques et le chapitre IV de la résolution des triangles.

La trigonométrie sphérique est déduite analytiquement de la formule fondamentale relative aux triangles quelconques.

En somme, le travail de M. MANDART constitue une tentative très intéressante que nous recommandons à l'attention des professeurs.

M. STUYVAERT.

Théorie élémentaire des Séries par M. Godefroy, bibliothécaire de la Faculté des sciences de Marseille, avec une préface de L. Sauvage, Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille. Paris, Gauthier-Villars, 1908 (VIII-266 p. in-8 avec figures). Prix : 8 francs.

Sommaire. 1. Limite, continuité, dérivée. 2. Séries à termes constants (positives, alternées, absolument convergentes). 3. Séries à termes variables et en particulier séries entières. 4. Exponentielles et logarithmes. 5. Fonctions circulaires (définies par les séries) et fonctions hyperboliques. 6. Fonction gamma. — Chaque chapitre est suivi d'exercices et de renseignements bibliographiques. — L'auteur n'introduit nulle part les valeurs imaginaires complexes des variables.

Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques par Edouard A.-Fouet. Première partie (chapitres I à V). Paris, Gauthier-Villars, 1902 (330 p. in-8 avec 35 fig.). Prix : 7 fr. 50.

Sommaire. Introduction : fonction en général (nombre, ensemble, fonction), fonction analytique (continue, ayant une dérivée, uniforme). Livre premier. 1. Fonctions algébriques et surfaces de Riemann. 2. Fonctions définies par des séries. 3. Fonctions définies par des séries multiples. 4. Fonctions définies par des intégrales. 5. Le prolongement analytique d'après Weierstrass.

Ouvrage extrêmement bien informé sur tous les sujets qu'il aborde et il en aborde beaucoup. Çà et là, quelques petites inexactitudes qu'il sera possible de signaler dans les errata, quand l'ouvrage sera terminé. Sa place est marquée dans la bibliothèque de tous ceux qui s'occupent de la théorie des fonctions.

×SUR LES TRIANGLES AUTOMÉDIANS,

par M. J. Déprez, professeur à l'Athénée de Bruxelles.

Rappelons d'abord la définition de ces triangles. Soit ABC un triangle quelconque; on peut construire un triangle A'B'C' dont les côtés sont parallèles et proportionnels aux médianes de ABC; les médianes de A'B'C' seront également parallèles et proportionnelles aux côtés de ABC. Ces deux triangles ne sont pas semblables à moins d'être équilatéraux; mais A'B'C' peut être semblable à ACB; dans ce cas, le triangle ABC est un triangle *automédian*.

M. Neuberg a publié plusieurs propriétés relatives au triangle automédian (*Mathesis* (1), IX, p. 208 et (3), I, p. 280).

Voici d'autres propriétés de ce triangle remarquable.

1. Les quatre groupes de points

$$A\Omega_1GB,\quad A\Omega_2GC,\quad A\Omega_1KC,\quad A\Omega_2KB$$

sont concycliques, Ω_1 et Ω_2 désignant les points de Brocard.

3. Le point de rencontre de la symédiane issue de B et de la médiatrice de AB, le point où la symédiane issue de C coupe la médiatrice de AC, se trouvent sur la médiane partant de A.

3. A_1, B_1, C_1, étant les milieux des côtés du triangle ABC, le cercle qui passe par B et qui touche B_1C_1 en C_1, le cercle qui passe par C et qui touche B_1C_1 en B_1, se coupent au point de Lemoine et au pied H_1 de la hauteur issue de A; K est le centre de gravité du triangle $B_1C_1H_1$.

4. La circonférence qui touche AB en A et qui passe par le symétrique de B par rapport à C, la circonférence qui touche CA en A et qui passe par le symétrique de C par rapport à B, se coupent au pied de la symédiane issue de A.

5. Le cercle passant par B_1 et qui touche en C la parallèle à AB menée par C, le cercle passant par C_1 et qui touche en B la parallèle à CA menée par B, se coupent au centre de gravité et au pied de la symédiane issue de A. Le premier cercle passe par Ω_1, le second par Ω_2.

6. Le pied de la symédiane issue de A est le milieu de la distance de A au pôle de BC, par rapport au cercle circonscrit à ABC; autrement dit, le pied de la symédiane issue de A est le pôle de B_1C_1 par rapport au cercle AB_1C_1.

7. Le centre du cercle des neuf points, le pied de la symédiane issue de A se trouvent sur la médiatrice de GK.

8. Le pôle de BC, par rapport au cercle ABC, et les points B, C, O, K sont concycliques.

Si R_1, R_2, R_3 sont les rayons des cercles circonscrits aux triangles BKC, CKA, AKB, on a

$$\overline{R_1}^2 + \overline{R_2}^2 = \overline{2R}^2, \quad R_2R_3 = RR_1.$$

9. Le point de Lemoine du triangle ABC est aussi le point de Lemoine du triangle AGH.

Le point de Lemoine est le centre de gravité du triangle ayant pour sommets les points A, A_1 et le pied de la hauteur issue de A.

10. Soient P_1, P_2, P_3 les projections de K sur les côtés BC, CA, AB; le triangle podaire $P_1P_2P_3$ du point K est semblable au triangle ACB.

11. Le cercle circonscrit au triangle podaire, par rapport à ABC, du point de rencontre de la symédiane AK et de la médiane CG, passe par B_1.

Le cercle circonscrit au triangle podaire, par rapport à ABC, du point de rencontre de la symédiane AK et de la médiane BG passe par C_1.

12. Le sommet A_2 du second triangle de Brocard coïncide avec le point de Lemoine.

Le côté B_2C_2 du même triangle est parallèle à la symédiane issue de A.

Les triangles KB_2C_2, OB_2C_2 sont isoscèles.

Les sommets B_3, C_3 du troisième triangle de Brocard sont situés sur la symédiane issue de A.

Le sommet A_3 du même triangle est confondu avec le réciproque de l'orthocentre.

13. R_1, R_2, R_3 étant le point de Steiner du triangle et ses isobariques, le triangle $R_1R_2R_3$ est le symétrique de ABC par rapport au centre de gravité.

14. V_2, W_2 étant le premier et le second centres isogones; S_1, T_1 les sommets des triangles équilatéraux construits extérieurement et intérieurement sur BC; les points V_2, W_2 divisent respectivement AS_1, AT_1 dans le rapport 1 : 2. On a

$$2AV_2 = BV_2 + CV_2, \quad 2AW_2 = BW_2 - CW_2 \text{ (on suppose } b < c).$$

Les points AV_2GW_2 sont les sommets d'un rectangle.

Le point de Lemoine est la projection de G sur V_2W_2.

15. Soient V, W les centres isodynamiques, X_1, Y_1 les centres des triangles équilatéraux BCS_1, BCT_1.

Les droites WX_1, VY_1 sont parallèles à BC; la droite VW est perpendiculaire à la symédiane partant de A; les droites VV_2, WW_2 sont perpendiculaires à la médiane issue de A; on a

$$\frac{2}{\overline{AV}^2} = \frac{1}{\overline{BV}^2} + \frac{1}{\overline{CV}^2}, \quad \frac{2}{\overline{AW}^2} = \frac{1}{\overline{BW}^2} + \frac{1}{\overline{CW}^2}.$$

Les points V_2, X_1, Y_1, W_2 sont les sommets d'un losange ayant G pour centre.

16. Le pied de la hauteur issue de A, les milieux des hauteurs issues de B et C, le milieu de BC, l'orthocentre, le centre de gravité et le point de Lemoine sont sept points concycliques.

17. Le foyer F de la parabole de Kiepert appartient au cercle d'Apollonius relatif à BC; les points G, K, F sont sur une circonférence qui touche le diamètre de Brocard.

18. Les droites qui unissent les projections du sommet A du triangle et du point F, sur BC et sur la médiatrice de BC, se croisent au point de Lemoine.

19. Les points G, F sont symétriques par rapport à BC ; le réciproque H_e de l'orthocentre et le point de Steiner R_1, sont symétriques par rapport à la même droite.

Les points G, F, R_1, H_e sont sur une circonférence de centre A_1 et qui touche la droite d'Euler.

20. La parabole de Kiepert touche les côtés BC, CA, AB en A_1, au symétrique de A par rapport à C et au symétrique de A par rapport à B.

21. Soient K_1, K_2, K_3, les pieds des symédianes ; L_2, L_3 les points où l'ellipse de Lemoine touche CA, AB ; l'ellipse de Lemoine et l'ellipse de Brocard touchent BC en K_1, les milieux des droites BC, GK, $\Omega_1\Omega_2$, AK_1 sont collinéaires ; le foyer de la parabole de Artzt qui touche CA, AB en C, B est le point de Lemoine de ABC ; les droites K_2L_3, K_3L_2 sont tangentes à cette parabole.

22. Les circonférences AB_1B, AC_1C passent par K_1 ; les projections de K_1 sur les côtés CA, AB et sur les médianes issues de B, C sont situées sur une droite parallèle à la droite d'Euler de ABC.

23. Soient ω l'angle de Brocard du triangle, G_1, G_2, G_3 les projections du centre de gravité de ABC sur la médiatrice de BC et sur les hauteurs issues de B et C ; on a $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{3}\operatorname{tg} A$; les droites AG_3, BG_1 se coupent au point Ω_1 ; les droites AG_2, CG_1 se croisent au point Ω_2.

24. Soient K_1', K_2', K_3' les points où la droite de Lemoine coupe BC, CA, AB ; t_1, t_2, t_3 les longueurs AK_1', BK_2', CK_3', on a

$$t_2 = t_3 = 2t_1 ; \quad K_3'K_1' = K_1'K_2'.$$

Le diamètre de Brocard OK passe par K_1'.

25. La droite de Lemoine est parallèle à AK.

La droite de Longchamps et l'axe orthique sont parallèles à AG.

La droite d'Euler et l'axe orthique se coupent sur BC.

La droite qui unit les pieds des hauteurs issues de B, C contient le milieu de la médiane AA_1.

26. Le point N de Tarry est l'orthocentre du triangle BCG. La droite de Simson du point de Tarry, le cercle d'Euler, le cercle principal de l'ellipse de Lemoine, les cercles circonscrits aux triangles podaires équilatéraux, par rapport à ABC, passent par le milieu de AG.

Le milieu de AG est le centre de l'hyperbole de Kiepert.

27. Soit Z le centre du cercle de Brocard, la droite GZ passe par le

foyer de la parabole de Kiepert; la symédiane AK est la bissectrice de l'angle ZAH; dans le triangle OGK, la symédiane issue de G passe par le sommet A du triangle ABC.

28. Portons sur les hauteurs AH, BH, CH les longueurs $A_2A = AA_3 = AG$, $B_2B = BB_3 = BR_1$, $C_2C = CC_3 = CR_1$; les triangles $A_2B_2C_2$, $A_3C_3B_3$ ont leurs côtés perpendiculaires, ces triangles sont équilatéraux et ont pour centre commun le centre de gravité de ABC; les côtés B_2C_2, C_3B_3 se coupent au point de Steiner de ABC. On a

$$A_2B_2C_2 - A_3B_3C_3 = 4ABC.$$

29. Désignons les rayons des cercles $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ par ρ_2, ρ_3.

Les axes de l'ellipse de Steiner sont les bissectrices de l'angle AGK; ils ont respectivement pour longueurs $\rho_2 + \rho_3$, $\rho_2 - \rho_3$; les foyers de cette ellipse sont situés sur la bissectrice intérieure de l'angle AGK, et l'on a $GF_1 = GF_2 = \sqrt{\rho_2\rho_3}$. La droite A_2A_3 est vue des foyers F_1, F_2 sous des angles respectivement égaux à 135° et 45°. (*A continuer.*)

NOTE MATHÉMATIQUE.

16. ***Métaparallélisme et orthologie.*** J'ai proposé d'appeler ***triangles métaparallèles*** deux triangles ABC, A'B'C' tels, que les parallèles menées par A, B, C, à B'C', C'A', A'B' concourent en un même point P (***métapôle de*** ABC). Les parallèles menées par A', B', C' à BC, CA, AB concourent en un second point P' (***métapôle de*** A'B'C').

Si l'on fait tourner la figure A'B'C'P' de 90° dans son plan, les deux triangles deviennent ***orthologiques*** : les perpendiculaires abaissées des sommets de l'un des triangles sur les côtés correspondants de l'autre concourent en un même point.

Deux triangles métaparallèles ABC, A'B'C' ne sont directement semblables que lorsqu'ils ont leurs côtés homologues perpendiculaires. Deux triangles orthologiques ne sont directement semblables que lorsqu'ils sont homothétiques.

Deux triangles ABC, A'B'C' qui sont inversement semblables sont toujours à la fois métaparallèles et orthologiques; les centres de métaparallélisme et d'orthologie sont des points diamétralement opposés respectivement sur les circonférences ABC, A'B'C'.

M. Juan y Duran-Loriga a étudié à ce point de vue les triangles inversement semblables (AFAS, Montauban, 1902) et a proposé le terme de *triangles isogonologiques*. Ce néologisme me paraît être superflu, la dénomination de triangles *inversement* (symétriquement) *semblables* ou *allotropes* étant suffisante.

Si l'on prend ABC pour triangle de référence et qu'on appelle $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les coordonnées barycentriques absolues des points A′, B′, C′, les points à l'infini sur les droites B′C′, C′A′, A′B′ ont pour coordonnées

$$(\alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 - \beta_3, \gamma_2 - \gamma_3), \quad (\alpha_3 - \alpha_1, \beta_3 - \beta_1, \gamma_3 - \gamma_1), \text{ etc.};$$

par conséquent, les parallèles à B′C′, C′A′, A′B′ menées respectivement par A, B, C ont pour équations

$$\frac{y}{\beta_2 - \beta_3} = \frac{z}{\gamma_2 - \gamma_3}, \quad \frac{z}{\gamma_3 - \gamma_1} = \frac{x}{\alpha_3 - \alpha_1}, \quad \frac{x}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{y}{\beta_1 - \beta_2}. \quad (1)$$

La condition que ces droites concourent en un même point P est

$$(\beta_2 - \beta_3)(\gamma_3 - \gamma_2)(\alpha_1 - \alpha_2) = (\gamma_2 - \gamma_3)(\alpha_3 - \alpha_1)(\beta_1 - \beta_2). \quad (2)$$

Ce point P doit appartenir à la circonférence

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = 0, \quad (3)$$

si les triangles ABC, A′B′C′ sont allotropes. Des deux premières équations (1) tirons y et x en fonction de z et substituons les valeurs dans (3); on obtient la seconde condition

$$a^2(\beta_2 - \beta_3)(\gamma_3 - \gamma_1) + b^2(\gamma_2 - \gamma_3)(\alpha_3 - \alpha_1) + c^2(\alpha_3 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_3) = 0. \quad (4)$$

En faisant autrement l'élimination de x, y, z entre (1) et (3), on obtient deux autres équations; mais elles sont une conséquence du système (2), (4).

Si le triangle A′B′C′ est à la fois isobarique et allotrope à ABC, représentons les coordonnées des points A′, B′, C′ par (α, β, γ), (β, γ, α), (γ, α, β). L'égalité (2) devient une identité et l'égalité (4), qui se ramène à

$$a^2(\beta - \gamma) + b^2(\alpha - \beta) + c^2(\gamma - \alpha) = 0,$$

exprime que les points A′, B′, C′ sont situés sur les droites joignant le centre de gravité G de ABC aux sommets A_1, B_1, C_1 du premier triangle de Brocard, ou que les triangles A′B′C′, $A_1B_1C_1$ sont homothétiques par rapport à G. Cette proposition nous a été communiquée, il y a quelque temps déjà, par M. Van Aubel. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

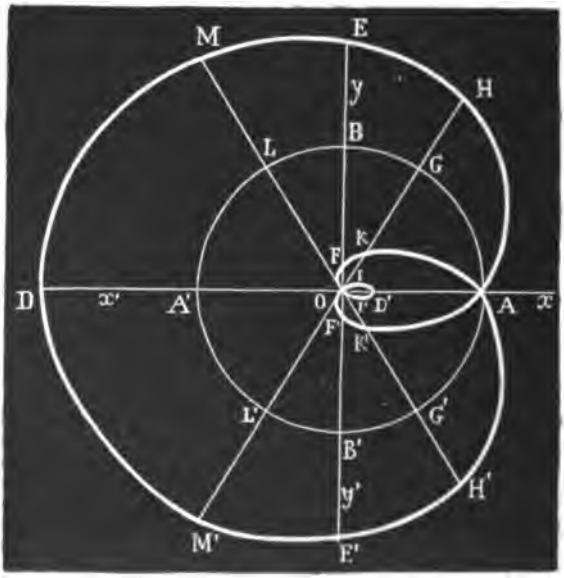
Question 1140.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 237).

Étant donnée la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r = a(1 + k \sin \tfrac{1}{2}\theta),$$

déterminer K ***de façon que l'arc de cette courbe puisse s'exprimer par les fonctions élémentaires. Calculer dans ce cas l'aire et le périmètre de la courbe.*** (E. N. Barisien.)



Solution (*) ***par*** M. A. H. Couvert (Besançon). L'arc élémentaire est

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2} = \frac{a\,d\theta}{2}\sqrt{k^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 4\left(1 + k\sin\frac{\theta}{2}\right)^2};$$

d'où

$$s = \int \frac{a\,d\theta}{2}\sqrt{3k^2\sin^2\frac{\theta}{2} + 8k\sin\frac{\theta}{2} + k^2 + 4}\,.$$

(*) Nous avons quelque peu retouché la solution qui présentait une légère inexactitude dans la construction de la courbe. (J. N.)

Cette intégrale s'exprimera au moyen des fonctions élémentaires si le trinôme en $\sin\frac{\theta}{2}$ est un carré parfait. Il faut pour cela que

$$16k^2 - 3k^2(k^2 + 4) = 0.$$

La solution $k = 0$ donne une circonférence de cercle; il reste, en écartant cette valeur,

$$4 - 3k^2 = 0, \qquad k = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Comme $\sin\frac{1}{2}\theta$ prend des valeurs égales et de signes contraires pour θ et $2\pi + \theta$, il suffit de considérer la valeur positive de k. La courbe aura pour équation

$$r = a\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{1}{2}\theta\right).$$

C'est une conchoïde de la courbe classique $\rho = m\sin\frac{1}{2}\theta$, m ayant la valeur $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Si nous supposons $a > 0$, et que nous prenions pour unité de longueur $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, a sera égal à $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60°$, et l'équation de la courbe prendra la forme

$$r = \sin\tfrac{1}{2}\theta + \sin 60°.$$

L'axe polaire Ox est un axe de symétrie puisque les valeurs θ et $2\pi - \theta$ donnent pour r la même valeur. Le cercle $r = \sin 60°$ joue le rôle de courbe diamétrale pour les cordes passant par le pôle O. Si l'on fait varier θ de 0 à π, on obtient un arc AHEMD qui commence au point A du cercle diamétral ALA'L'A et se termine au point D distant du point A' de ce cercle de la longueur A'D = 1; les valeurs de θ comprises entre 0 et 2π donnent l'arc AH'E'M'D symétrique du précédent par rapport à Ox. Si θ varie entre 0 et $-\pi$, on obtient l'arc AK'F'OD'; l'origine O correspond au rayon OL' qui fait avec Ox l'angle $-120°$ et ce rayon touche la courbe; la distance A'D' = 1. L'arc symétrique D'OFKA se rapporte à θ compris entre $-\pi$ et -2π. Les valeurs de θ extérieures à l'intervalle $(-2\pi, 2\pi)$ ne donnent pas de nouveaux points de la courbe.

L'aire AHMDM'A est exprimée par

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{1}{2}\theta+\sin 60^\circ\right)^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1-\cos\theta}{2}+2\sin\frac{1}{2}\theta\sin 60^\circ+\frac{3}{4}\right]d\theta$$

$$=\tfrac{5}{4}\pi(2+\sqrt{3}).$$

Si l'on prend l'intégrale entre -2π, 2π on obtient l'aire AMDM'A, augmentée des aires AKFOF'K'A, OID'I'O. Ces dernières aires ont pour valeur

$$\int_0^{-\frac{2\pi}{5}} r^2 d\theta, \qquad \int_{-\frac{2\pi}{5}}^{-\pi} r^2 d\theta.$$

Le périmètre de la courbe a pour expression

$$\int_{-2\pi}^{2\pi}\left(1+\sin 60^\circ\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta=4\pi.$$

Note. En posant $\theta=2\arcsin x$, la différentielle sous le signe d'intégration devient, à une constante près,

$$dx\sqrt{\frac{3k^2x^2+8kx+k^2+4}{1-x^2}},$$

qui est intégrable par les fonctions élémentaires aussi dans le cas où $3k^2x^2+8kx+k^2+4$ est divisible par $1-x$ ou par $1+x$, ce qui arrive si $k=-1$, $k=+1$. (P. M.)

Question 1852.

(Voir *Mathesis* (3) II, p. 32).

Quelles sont les surfaces dont les normales sont également distantes d'une droite fixe. (E. Cesàro.)

Solution par M. J. Rose. Les surfaces de révolution ayant pour axe la droite fixe sont évidemment des solutions.

Les tangentes à une hélice circulaire (*c*) tracée sur un cylindre de révolution sont également distantes de l'axe. Les développantes (D) de (C) sont des développantes de cercle planes dont les plans sont

normaux à l'axe (*). Par suite les normales à (D), projections des tangentes de (C) sur ces plans, sont également distantes de l'axe.

De là résulte le mode de génération de ces surfaces : Elles sont engendrées par une développante de cercle de rayon constant dont le plan se déplace de manière à rester perpendiculaire à la droite fixe pendant que le centre du cercle décrit la droite fixe. Ce sont les seules surfaces satisfaisant à la question, car toute ligne de niveau doit être telle que les projections des normales sur son plan soient également distantes d'un point fixe. Il n'y a évidemment que la développante de cercle qui jouisse de cette propriété.

×Question 1391.

(Voir *Mathesis* (3) II, p. 240).

On prolonge les côtés BA *et* CA, CB *et* AB, AC *et* BC *d'un triangle d'une même longueur* AD = AD' = BE = BE' = CF = CF' = λ, *on l'on porte cette longueur* λ *sur les côtés* AB *et* AC, . . *Les droites* DD', EE', FF' *suffisamment prolongées forment un triangle* LMN; *de même les droites* E'F, F'D, D'E *forment un triangle* UVW.

On demande de calculer

1° *les surfaces des triangles* LMN, UVW;

2° *les coordonnées par rapport au triangle* ABC *du centre d'homothétie du triangle* LMN *par rapport au triangle qui a pour sommets, soit les centres des cercles exinscrits au triangle* ABC, *soit les points de contact des côtés du triangle* ABC *avec le cercle inscrit;*

3° *les coordonnées des centres d'homologie des triangles* LMN, UVW *par rapport à* ABC.

Chercher le lieu de ces centres lorsque λ *varie.* (J. Neuberg.)

Solutions par MM. Bastin, Déprez *et* Emmerich. Comme le défaut d'espace nous empêche de reproduire *in extenso* ces trois solutions, nous devons nous borner à extraire de chacune d'elles ce qui nous a paru le plus simple et le plus intéressant, en adoptant des notations uniformes.

Surface du triangle LMN. Le triangle LMN est homothétique au

(*) *Geometria intrinseca*, Chap. IX, 7.

triangle $I_1I_2I_3$ formé par les bissectrices extérieures de ABC et qui correspond à $\lambda = 0$. Les coordonnées normales du centre d'homothétie K′ dans l'un ou l'autre triangle, sont proportionnelles aux distances des côtés homologues; ces distances ayant pour expressions $\lambda \cos\frac{A}{2}$, $\lambda \cos\frac{B}{2}$, $\lambda \cos\frac{C}{2}$ sont proportionnelles à $\sin I_1$, $\sin I_2$, $\sin I_3$. Donc le centre d'homothétie est le point de Lemoine des deux triangles. (Déprez.)

D'après un théorème connu, le point de Lemoine d'un triangle ABC est le centre de gravité des masses a^3, b^3, c^3 attachées soit aux sommets de ce triangle, soit aux pieds des hauteurs; il résulte de là que les coordonnées barycentriques de K′, dans les deux triangles $I_1I_2I_3$, ABC, sont $\sin^2 I_1$, $\sin^2 I_2$, $\sin^2 I_3$, ou $\cos^2\frac{A}{2}$, $\cos^2\frac{B}{2}$, $\cos^2\frac{C}{2}$, ou $a(p-a)$, $b(p-b)$, $c(p-c)$. (J. N.)

Le rapport de similitude des triangles LMN, $I_1I_2I_3$ est égal au rapport des distances de leur point de Lemoine K′ à deux côtés homologues MN, I_2I_3. Si V′ désigne l'angle de Brocard de $I_1I_2I_3$, on trouve pour ce rapport

$$\frac{I_2I_3 \operatorname{tg} V' + 2\lambda \cos\frac{A}{2}}{I_2I_3 \operatorname{tg} V'} = 1 + \frac{\lambda \cot V'}{2R} = 1 + \frac{\lambda(4R+r)}{2Rp};$$

car le rayon du cercle $I_1I_2I_3$ étant égal à 2R, on a

$$I_2I_3 = 4R\cos\frac{A}{2},\quad \cot V' = \Sigma \cot I_1 = \Sigma \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \Sigma\frac{r_1}{p} = \frac{4R+r}{p},$$

où r_1, r_2, r_3 représentent les rayons des cercles exinscrits à ABC. On sait aussi que *aire* $I_1I_2I_3 = 2pR$; par conséquent,

$$LMN = \frac{[\lambda(4R+r)+2Rp]^2}{2pR}. \qquad \text{(Déprez).}$$

On trouve en calculant MD′, ND dans les triangles MD′F, NDE′ :

$$MN = MD' + ND - DD'$$

$$= \frac{D'F\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B} + \frac{DE'\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} - 2AD\sin\tfrac{1}{2}A$$

$$= \frac{(b+2\lambda)\cos^2\frac{1}{2}C + (c+2\lambda)\cos^2\frac{1}{2}B - 2\lambda\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

Appelons Q le numérateur de la dernière fraction et remplaçons b, c

par 2R sin B, 2R sin C ; alors

$$Q = 4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C + 2\lambda(\cos^2\tfrac{1}{2}B + \cos^2\tfrac{1}{2}C - \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)$$
$$= 4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C + 2\lambda(1 + \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C).$$

Or, l'aire d'un triangle ABC a pour expression $\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}$; on peut donc écrire

$$LMN = \tfrac{1}{2}\overline{MN}^2\frac{\sin I_2\sin I_3}{\sin I_1} = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

Si l'on observe que

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{p}{4R}, \qquad 1 + \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{pP}{4abc},$$

où $P = 2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2$, on trouve encore

$$\frac{LMN}{ABC} = \frac{(2abc + P\lambda)^2}{8abc\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}. \qquad (1)$$

Cette expression fait connaître la valeur de λ pour laquelle les droites DD', EE', FF' passent par un même point ; on en déduit aussi que deux triangles $L_1M_1N_1$, $L_2M_2N_2$ ont même surface si

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{4abc}{P}. \qquad \text{(Emmerich.)}$$

La valeur $\lambda = -\frac{2abc}{P}$ qui annule l'aire LMN correspond au cas où les côtés de ce triangle passent par le centre d'homothétie K' de tous les triangles LMN, de sorte qu'on peut énoncer le théorème suivant : *Si par le point de Lemoine* K' *du triangle* $I_1I_2I_3$ *on mène des parallèles aux côtés* I_2I_3, I_3I_1, I_1I_2, *les six segments interceptés sur les côtés des angles du triangle* ABC *entre le sommet et la parallèle correspondante ont la même valeur* 2abc : P.

M. Bastin est arrivé à la même expression (1) de l'aire LMN en cherchant les coordonnées trilinéaires des points L, M, N et a interprété le cas de LMN = 0.

Surface du triangle UVW. Les coordonnées barycentriques des points E', F étant $(-\lambda, c+\lambda, 0)$, $(-\lambda, 0, b+\lambda)$, la droite E'F et par analogie les droites F'D, D'E ont pour équations

$$(b+\lambda)(c+\lambda)x + \lambda(b+\lambda)y + \lambda(c+\lambda)z = 0,$$
$$\lambda(a+\lambda)x + (a+\lambda)(c+\lambda)y + \lambda(c+\lambda)z = 0,$$
$$\lambda(a+\lambda)x + \lambda(b+\lambda)y + (a+\lambda)(b+\lambda)z = 0.$$

Or, la surface du triangle dont les équations des côtés sont

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z = 0, \quad A_3x + B_3y + C_3z = 0$$

a pour expression

$$S\frac{\Delta^2}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3},$$

où S est l'aire du triangle fondamental et

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

Dans la question proposée,

$$\Delta = 4r\,[(4R + r)\lambda^4 + pR(10\lambda^3 + 8p\lambda^2 + 2\lambda\Sigma ab + abc],$$
$$\Delta_1 = a\,[2\lambda^2(p - a) + 2\lambda bc + abc], \text{ etc.} \qquad \text{(Déprez, Bastin.)}$$

Posons

$$a + \lambda = a_1, \quad b + \lambda = b_1, \quad c + \lambda = c_1,$$
$$E'F = a_2, \qquad F'D = b_2, \qquad D'E = c_2.$$

Des triangles CD'E, BDF', on déduit

$$c_2 \sin D'EC = b_1 \sin C, \quad c_2 \cos D'EC = a_1 - b_1 \cos C,$$
$$b_2 \sin DF'B = c_1 \sin B, \quad b_2 \cos DF'B = a_1 - c_1 \cos B;$$

en multipliant membre à membre la première et la quatrième de ces relations, la deuxième et la quatrième et en faisant la somme des résultats, on trouve

$$\begin{aligned} b_2c_2 \sin U &= b_1 \sin C\,(a_1 - c_1 \cos B) + c_1 \sin B\,(a_1 - b_1 \cos C) \\ &= -b_1c_1 \sin A + c_1a_1 \sin B + a_1b_1 \sin C \\ &= \frac{1}{2R}\left[2(p - a)\lambda^2 + 2bc\lambda + abc\right] = \frac{\lambda_a}{2R}, \end{aligned}$$

où λ_a désigne la quantité entre crochets.

Comme

$$MD = MD' - DD' = \frac{(b + 2\lambda)\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B} - 2\lambda \sin\tfrac{1}{2}A$$
$$= \frac{b\cos\frac{1}{2}C + 2\lambda\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B} = \frac{b\sin C + 4\lambda\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{2\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$
$$= \frac{b\sin C + \lambda(-\sin A + \sin B + \sin C)}{2\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C} = \frac{bc + 2\lambda(p - a)}{4R\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C},$$

on a

$$\sin DF'M = \frac{DM \sin DF'}{\sin M} = \frac{bc + 2\lambda(p-a)}{4Rb_2 \sin \frac{1}{2}C}.$$

Le triangle FF'W donne alors

$$FW = \frac{FF' \sin DF'M}{\sin W} = a_2 \frac{2(p-a)\lambda^2 + bc\lambda}{\lambda_c};$$

de même, on tire du triangle EE'V,

$$E'V = a_2 \frac{2(p-a)\lambda^2 + bc\lambda}{\lambda_b}.$$

En faisant la somme FW + E'V + E'F on aura

$$\frac{VW}{a_2} = \frac{[2(p-a)\lambda^2 + bc\lambda](\lambda_b + \lambda_c) + \lambda_b\lambda_c}{\lambda_b\lambda_c} = \frac{T}{\lambda_b\lambda_c},$$

où T désigne le numérateur de la seconde fraction. La substitution des valeurs de λ_b, λ_c donne

$$T = P\lambda^4 + 10abc\lambda^3 + 8abcp\lambda^2 + 2abc\lambda\Sigma ab + a^2b^2c^2.$$

Enfin

$$UVW = \frac{1}{2}\overline{VW}^2 \frac{\sin V \sin W}{\sin U} = \frac{T^2}{4R\lambda_a\lambda_b\lambda_c}. \quad \text{(Emmerich.)}$$

M. Emmerich observe que T est le déterminant Δ de ci-dessus et que les équations $\lambda_a = 0$, $\lambda_b = 0$, $\lambda_c = 0$ (ou $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$) ont pour racines les valeurs de λ pour lesquelles deux des droites E'F, F'D, D'E sont parallèles; les racines de $\lambda_i = 0$ ne sont réelles que si i est le plus grand ou le plus petit côté de ABC.

Centre d'homothétie K' *des triangles* LMN, $I_1I_2I_3$. Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés de ABC; K' est à la rencontre des droites I_1A_1, I_1B_1 qui ont pour équation en coordonnées normales

$$(b-c)x + by - cz = 0, \quad ax + (a-c)y - cz = 0,$$

d'où les coordonnées normales de K' : $p-a$, $p-b$, $p-c$, ou $\cot\frac{1}{2}A$, $\cot\frac{1}{2}B$, $\cot\frac{1}{2}C$, ou $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}$. (Déprez).

Des coordonnées barycentriques de $D(c_1, -\lambda, 0)$, $E(0, a_1, -\lambda)$, $F(-\lambda, 0, b_1)$, $D'(b_1, 0, -\lambda)$, $E'(-\lambda, c_1, 0)$, $F'(0, -\lambda, a_1)$, on déduit les équations de MN, NL, LM ;

$$\lambda x + c_1y + b_1z = 0, \quad c_1x + \lambda y + a_1z = 0, \quad b_1x + a_1y + \lambda z = 0.$$

On en tire les coordonnées des points L, M, N :

$$\lambda^2 - a_1^2, \quad a_1 b_1 - \lambda c_1, \quad c_1 a_1 - \lambda b_1 ; \text{ etc.}$$

La droite LI_1 a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} x & -a & -2a\lambda - a^2 \\ y & b & ab + (a+b-c)\lambda \\ x & c & ac + (a+c-b)\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou, après suppression du facteur $(b+c-a)\lambda$,

$$(b-c)x + ay - as = 0.$$

Le point L se meut donc sur une droite fixe joignant I_1 au milieu A_2 de BC, M sur la droite I_2B_1, N sur la droite I_3C_1 ; le centre permanent d'homothétie des triangles LMN, $I_1I_2I_3$ a pour coordonnées barycentriques $a(p-a)$, $b(p-b)$, $c(p-c)$. (Bastin, Emmerich.)

Centre d'homothétie Z *des triangles* LMN, $I_aI_bI_c$, où I_a, I_b, I_c désignent les points de contact de BC, CA, AB avec le cercle inscrit I.

L'équation de la droite LI_a est

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -2a\lambda - a^2 \\ y & p-c & 2(p-c)\lambda + ab \\ z & p-b & 2(p-b)\lambda + ac \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui revient à

$$(b-c)(p-a)x - (a+2\lambda)(p-b)y + (a+2\lambda)(p-c)z = 0.$$

Les droites LI_a, MI_b, NI_c concourent en un point Z dont les coordonnées barycentriques sont

$$x = \rho\frac{a+2\lambda}{p-a}, \quad y = \rho\frac{b+2\lambda}{p-b}, \quad z = \rho\frac{c+2\lambda}{p-c}, \qquad (2)$$

ρ étant un facteur de proportionnalité qu'on peut déterminer au moyen de l'identité $x+y+z=1$.

En éliminant λ et ρ entre les formules (2), on trouve pour le lieu du point Z

$$\Sigma(b-c)(p-a)x = 0, \quad \text{ou} \quad \Sigma(\cos B - \cos C)x = 0.$$

Ce lieu est donc la droite joignant le centre de gravité de ABC au point de Gergonne. (Emmerich.)

Le point de Gergonne correspond à $\lambda = \infty$; les points L, M, N sont

alors à l'infini sur les symédianes I_1K', I_2K', I_3K' du triangle $I_1I_2I_3$. On en conclut que ces symédianes sont parallèles aux droites AI_a, BI_b, CI_c.

(Bastin).

Le centre de gravité est le point Z qui correspond à $\lambda = -\frac{p}{2}$; les côtés du triangle LMN divisent alors en deux parties égales les tangentes menées d'un sommet du triangle ABC au cercle ex-inscrit correspondant.

Les droites I_1I_a, I_2I_b, I_3I_c qui correspondent à $\lambda = 0$, se coupent au point qui a pour coordonnées barycentriques $\frac{a}{p-a}, \frac{b}{p-b}, \frac{c}{p-c}$.

Le point K' appartient au lieu du point Z.

Centre d'homologie Y *des triangles* ABC, LMN, UVW. Les côtés du triangle UVW, transversales réciproques des côtés de LMN, ont pour équations

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{c_1}+\frac{z}{b_1}=0, \quad \frac{x}{c_1}+\frac{y}{\lambda}+\frac{z}{a_1}=0, \quad \frac{x}{b_1}+\frac{y}{a_1}+\frac{z}{\lambda}=0.$$

On en déduit facilement les coordonnées des points U, V, W; par exemple, celles de U sont

$$b_1c_1(\lambda^2-a_1^2), \quad \lambda a_1(a_1b_1-\lambda c_1), \quad \lambda a_1(c_1a_1-\lambda b_1).$$

On voit immédiatement que les points (A, L, U), (B, M, V), (C, N, W) sont collinéaires. Le centre commun d'homologie Y des triangles ABC, LMN, UVW a pour coordonnées

$$x=\frac{\sigma}{bc+2(p-a)\lambda}, \quad y=\frac{\sigma}{ca+2(p-b)\lambda}, \quad z=\frac{\sigma}{ab+2(p-c)\lambda}.$$

Si l'on élimine λ et le facteur de proportionnalité σ, on trouve pour le lieu de Y :

$$\Sigma \frac{a(b-c)(p-a)}{x}=0;$$

ce lieu est une hyperbole passant par A, B, C, I et par le point de Nagel.

On a, pour les axes d'homologie des triangles,

ABC et LMN	$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}+\frac{z}{c_1}=0;$	(3)
ABC et UVW	$a_1x+b_1y+c_1z=0;$	(4)
LMN et UVW	$(b_1c_1+\lambda a_1)x+\ldots=0.$	(5)

La droite (3) enveloppe la parabole inscrite au triangle ABC et touchant l'axe antiorthique :

$$\sqrt{(b-c)x}+\sqrt{(c-a)y}+\sqrt{(a-b)z}=0.$$

La droite (5) est toujours parallèle à l'axe antiorthique, et la droite (4) à la droite réciproque de cet axe. (EMMERICH).

En vertu du théorème de Carnot, les points D, D', E, E', F, F' sont sur une même conique (γ) ayant pour équation barycentrique

$$\Sigma x^2+\Sigma yz\left(\frac{\lambda}{a_1}+\frac{a_1}{\lambda}\right)=0, \text{ ou } \Sigma^2 x+\Sigma\frac{a^2yz}{a_1\lambda}=0.$$

Cette courbe est concentrique et homothétique à la conique

$$\Sigma\frac{a^2}{(a+\lambda)x}=0.$$

Dans l'hexagone inscrit DD' EE' FF' les couples de côtés opposés se coupent en trois points collinéaires; la droite qui unit ces points est l'axe d'homologie des triangles LMW, UVW. Si l'on considère l'hexagone inscrit DD'FF'EE', la pascale est l'axe d'homologie des triangles ABC, LMN, de sorte que les droites AL, BM, CN sont concourantes. Enfin, si l'on considère l'hexagone DE'ED'FF', on voit que les point A, L, U sont collinéaires; il en est de même des triples BMV, CWV.

Les trois triangles ABC, LMN, UVW ont donc un même centre d'homologie γ, qui a pour coordonnées barycentriques

$$\frac{a}{p+2\lambda\cos^2\frac{1}{2}A}, \quad \frac{b}{p+2\lambda\cos^2\frac{1}{2}B}, \quad \frac{c}{p+2\lambda\cos^2\frac{1}{2}B},$$

et dont le lieu est la conique

$$\Sigma\frac{\sin A(\cos B-\cos C)}{x}=0.$$

Ce lieu est l'hyperbole de Feuerbach, transformée par inversion triangulaire de la droite OI.

On parvient à la même conclusion en observant que les côtés de triangle LYM tournent autour des points A, B et du point à l'infini sur I_1I_2 tandis que deux sommets L, M parcourent les droites I_1K', I_2K'. (DÉPREZ.)

Si $\lambda=-p$, le point Y coïncide avec H (*Mathesis* (2), VIII, p. 254).

REMARQUES. I. Tout point invariablement lié au triangle LMN décrit

une droite passant par K'. Ainsi le centre du cercle circonscrit décrit la droite K'H; l'orthocentre, la droite K'I; le centre du cercle des neuf points, la droite K'O. (DÉPREZ.)

II. L'axe d'homologie des triangles ABC, LMN enveloppe une parabole inscrite au triangle ABC et ayant pour foyer le point $\left(\frac{a^2}{b-c}, \frac{b^2}{c-a}, \frac{c^2}{a-b}\right)$; le point de Gergonne relatif à cette parabole et au triangle ABC est l'inverse du point Y. (DÉPREZ.)

III. Les côtés non parallèles des triangles $I_1 I_2 I_3$, LMN se coupent en six points concycliques (cercle de Tucker de $I_1 I_2 I_3$). (DÉPREZ.)

IV. K' est le centre de la conique qui touche les côtés du triangle $I_1I_2I_3$ aux points A, B, C. Une projection cylindrique conduit à une généralisation des résultats précédents dans laquelle $I_1I_2I_3$ est le triangle formé par les tangentes en A, B, C à une conique quelconque circonscrite au triangle fondamental, K' le centre de cette conique, etc. (DÉPREZ.)

V. Le point Y ne transporte à l'infini si ses coordonnées vérifient l'équation $x + y + z = 0$; cette condition donne

$$P\lambda^2 + 6abc\lambda + 2abcp = 0,$$

ou $$\lambda = \frac{-3abc \pm \sqrt{abc\,(9abc - 2pP)}}{P} = -\frac{4S}{P}(3R \pm D),$$

D désignant la distance OI. (BASTIN.)

×Question 1402.

(Voir *Mathesis*, (3) III, p. 32).

Résoudre en nombres entiers l'équation

$$\begin{vmatrix} 4(x+y) & 2(3xy-1) & 2(y-x) \\ 1-xy+5(x+y) & 10xy+x+y & 5(y-x) \\ 7(x+y) & 14xy+x-y & 1+xy+7(y-x) \end{vmatrix} = 0.$$

Solution par M. PRANGE. Le premier membre se réduit à

$$\begin{aligned} &6x^3y^3 - 4x^3y^2 + 24x^2y^3 + 2x^2y^2 + 6xy^3 + 6x^3y + 24y^3 - 4xy^2 \\ &\quad + 24x^2y - 4x^3 + 2y^2 + 6xy + 2x^2 - 4x + 24y + 2 \\ &\quad = 2(x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)(3xy - 2x + 12y + 1). \end{aligned}$$

Le facteur $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$ égalé à zéro n'admet pour solutions en nombres entiers que $x = \pm 1$, $y = 0$ et $x = 0$, $y = \pm 1$.

Pour obtenir les nombres entiers qui vérifient l'équation

$$3xy - 2x + 12y + 1 = 0,$$

nous écrivons

$$(3y - 2)(x + 4) = -9.$$

De tous les diviseurs de -9 il n'y a que la valeur $3y - 2 = 1$ ou $y = 1$ qui satisfasse, d'où encore la solution $y = 1$, $x = -13$.

La solution complète est donc $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1), (-13, 1)$.

Généralisation. Par des calculs assez pénibles on trouve que

$$\begin{vmatrix} (A+1)(x+y) & 2(Axy-1) & (A-1)(y-x) \\ 1-xy+B(x+y) & 2Bxy+x+y & B(y-x) \\ C(x+y) & 2Cxy+x-y & 1+xy+C(y-x) \end{vmatrix}$$
$$= 4(x^2+1)(y^2+1)[Axy + B(x+y) + C(y-x) + 1].$$

On obtient le déterminant précédent en posant $A = 3$, $B = 5$, $C = 7$.

(H. MANDART.)

×QUESTIONS D'EXAMEN

1110. Pour toutes les hyperboles tangentes à une droite donnée en un point donné, et ayant une asymptote fixe, la seconde asymptote passe par un point fixe. (E. N. BARISIEN).

Soient M le point donné, et T le point de rencontre de la droite donnée et de l'asymptote fixe. La seconde asymptote passe par le symétrique de T par rapport à M.

1111. Trouver le caractère de divisibilité de

$$f(x) \equiv ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$$

par $x^3 - 1$.

Exprimer que $f(x)$ s'annule pour $x = 1$ et $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ en observant que pour la dernière valeur $x^4 = x$, $x^5 = x^2$, $x^6 = x^3 = 1$ ou identifier $f(x)$ avec $(x^3 - 1)(mx^3 + nx^2 + px + q)$. On trouve

$$g + d + a = 0, \quad f + c - 0, \quad e + b = 0.$$

1112. On considère trois points en ligne droite A, B, C et un quatrième point D. Démontrer que la circonférence qui passe par les centres des circonférences circonscrites aux triangles DAB, DBC, DCA passe aussi par le point D. (E. N. BARISIEN).

1113. Pour qu'un nombre n soit le produit de quatre nombres entiers consécutifs, il faut 1° que $n+1$ soit un carré parfait; 2° que $5+4\sqrt{n+1}$ soit un carré impair. (BARISIEN.)

L'équation

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=n,$$

si l'on combine les facteurs extrêmes ainsi que les facteurs moyens, prend la forme

$$(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)=n$$

ou

$$x^2+3x+1=\sqrt{n+1}$$

ou encore

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{5+4\sqrt{n+1}}}{2}, \text{ etc.}$$

1114. Montrer que l'équation du sixième degré

$$[(x+b)^2-y^2]^2(x^2-a^2)+4x^2y^2(x+b)^2=0,$$

se décompose en deux équations du troisième degré.

Cas où $a=b$. (E. N. BARISIEN).

On trouve les deux équations

$$y^2(x-a)+(x+a)(x+b)^2=0,$$
$$y^2(x+a)+(x-a)(x+b)^2=0.$$

1115. Résoudre le système

$$xy=a,$$
$$(mx^2+nx+p)(my^2+ny+p)=b.$$

1116. Résoudre le système

$$x+y=a,$$
$$(mx^2+nx+p)^2+(my^2+ny+p)^2=b.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1121. On donne une pyramide de sommet S et de base ABC... Les parallèles à une même direction Δ menées par A, B, C, ... rencontrent un plan donné π en $A_1, B_1, C_1, \ldots$ Sur la parallèle à Δ menée par S on porte une longueur quelconque SS_1. Soient $S_1', A_1', B_1', C_1', \ldots$ les symétriques de $S, A_1, B_1, C_1 \ldots$ respectivement par rapport à $S_1, A, B, C, \ldots$ Démontrer que la somme algébrique des volumes des pyramides $S_1A_1B_1C_1 \ldots$, $S_1'A_1'B_1'C_1' \ldots$ est constante. (J. DÉPREZ.)

1432. Sur les faces d'un tétraèdre quelconque ABCD on construit les tétraèdres équifaciaux BCDA′, CDAB′, DABC′, ABCD′. Démontrer que les perpendiculaires abaissées des points A′, B′, C′, D′ respectivement sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC sont les génératrices d'un même hyperboloïde. (J. NEUBERG.)

1433. Sur les côtés d'un triangle donné ABC, on construit trois triangles directement semblables BCD, CAE, ABF. Comment doivent être les angles de ces triangles pour que 1° la somme $\overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{FD}^2$ soit minimum; 2° que la somme $\overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2$ soit minimum. (J. NEUBERG.)

***1434.** Etant donnés deux cercles extérieurs l'un à l'autre, on mène du centre O du premier deux tangentes au second, et du centre O′ du second deux tangentes au premier. Les huit points de rencontre de ces droites avec la circonférence qu'elles ne touchent pas, sont situés quatre à quatre sur deux parallèles à la ligne des centres. (E. N. BARISIEN).

1435. Chercher le lieu des ombilics d'une série d'ellipsoïdes homofocaux, ainsi que l'enveloppe des plans tangents en ces points. (G. ANDRIEN.)

***1436.** Mener par un point donné P une droite qui rencontre une circonférence donnée O en un point A tel que la distance PA soit à la distance du centre O à la droite PA dans un rapport donné k. (POPOVICI.)

1437. Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(y + zx)\frac{dz}{dx} + (x + yz)\frac{dz}{dy} + 1 - z^2 = 0$$

et montrer que les courbes caractéristiques sont des droites s'appuyant sur deux droites fixes. (A. DEMOULIN.)

1438. Soient $P(x, y)$, $Q(x, y)$ deux fonctions telles que

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}$$

Démontrer que les trajectoires isogonales des courbes satisfaisant à l'équation différentielle

$$dQ = f(P)\,dP$$

s'obtiennent par une quadrature. (A. DEMOULIN.)

GÉOMÉTRIE DES ÊTRES PLANS;

par M. De Tilly.

1. M. Tarry, dans un article remarquable publié, sous ce même titre, dans *Mathesis*, en avril 1901, déclare qu'il lui a été impossible de prouver qu'un triangle isoscèle a deux angles égaux, sans sortir du plan et sans le secours du postulatum d'Euclide. Sa démonstration ne se rapporte donc qu'à la géométrie euclidienne. Mais on voit, par les nos 7 et 8 de son exposé sommaire, qu'il exclut à priori l'hypothèse riemannienne — rejet du postulat 6 d'Euclide, d'où admission forcée du postulat 5(*), — dans laquelle deux droites se coupent en deux points.

Dans l'hypothèse riemannienne, la notion de symétrie peut s'établir sur la surface du plan comme sur celle de la sphère, chaque triangle ayant pour symétrique le triangle déterminé par les opposés de ses trois sommets. Alors, deux triangles ayant les éléments égaux requis par la théorie ordinaire, on pourra toujours faire coïncider le premier, soit avec le second, soit avec le symétrique du second. Le doute n'est donc possible que dans la géométrie intermédiaire, qui est celle de Lobatchefsky.

Nous disions, dans une notice récente(**) : « L'exposition assez compliquée de M. Tarry peut-elle être simplifiée? Peut-elle, surtout, être rendue indépendante de l'axiome des parallèles, sans cesser d'être strictement élémentaire? C'est une question qui reste en litige et que je ne me propose pas de traiter aujourd'hui ».

Dans la Notice actuelle, nous donnons la réponse complète à cette question, sans recourir à des considérations étrangères à la géométrie pure et sans sortir du plan. La démonstration peut être rendue indépendante de l'axiome des parallèles, c'est-à-dire qu'on peut donner une démonstration strictement élémentaire et restant valable dans toutes les hypothèses possibles; mais si l'on se borne à l'hypothèse euclidienne, cette démonstration n'est pas beaucoup plus simple que celle de M. Tarry.

(*) Mansion, *Premiers principes de la Métagéométrie* (*Mathesis*, 1896, supplément, p. 26). Voir plus bas, n° 4, l'énoncé du postulat 5 d'Euclide, ou *postulat des trois droites*. Le postulat 6, ou *postulat des deux droites*, est le suivant : Deux droites ne contiennent pas un espace.

(**) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1902, 1e partie, pp. 109-110.

Elle s'appuie un peu moins sur la théorie des aires (que M. Mansion voudrait éliminer), mais ne l'exclut pas complètement.

Un fait curieux, et qui à première vue pourrait sembler paradoxal, c'est que la nécessité d'invoquer les aires résulte précisément de l'admission du postulatum d'Euclide. A ce point de vue, les deux autres géométries (en tant qu'exclusivement planes) sont plus simples que l'euclidienne. La théorie des aires y est absolument exclue de l'exposition des premiers principes. On le comprendra en remarquant que le théorème 5 ci-après n'existe pas en géométrie euclidienne et c'est de là que résulte la nécessité de la considération des aires dans cette géométrie.

M. Tarry ayant résolu la question dans l'hypothèse euclidienne, et l'hypothèse riemannienne étant envisagée ci-dessus, nous nous placerons, dans ce qui suit, au point de vue lobatchefskien, le plus compliqué des trois.

La démonstration pourra très aisément être rendue applicable aux deux autres hypothèses, en ayant soin, dans l'une, de tenir compte de ce que deux droites se coupent en deux points; et dans l'autre de ce que la considération des aires doit se substituer à l'emploi du n° 5.

2. *Dans l'hypothèse de Lobatchefsky* (rejet du postulat 5 d'Euclide, d'où admission forcée du postulat 6)(*) *la somme des trois angles d'un triangle ne peut pas surpasser deux angles droits.*

Nous adopterons la seconde démonstration de Legendre, perfectionnée par Lobatchefsky et reproduite par M. Mansion (**).

Nous excluons la première démonstration, parce qu'on y admet qu'une ligne droite est plus courte que la ligne anguleuse joignant les mêmes extrémités, principe non contenu dans la définition d'Euclide, et qu'on ne démontre ordinairement qu'en invoquant la notion de symétrie.

Il est bien entendu qu'on fera la construction sur le plus petit angle du triangle et non sur l'angle opposé au plus petit côté, ce qui, jusqu'à présent, pourrait ne pas être la même chose.

Remarque. La somme des angles d'un quadrilatère ne peut surpasser quatre angles droits.

3. *Si dans un seul triangle la somme des angles est égale à deux angles droits, il en sera de même pour tout autre triangle.*

(*) Mansion, *Principes de Métagéométrie*, p. 26.
(**) Ibid., pp. 17 et 18.

Nous nous en tiendrons ici à la démonstration de Legendre(*), auteur du théorème, parce que sa construction nous servira aussi au n° 4. Cette démonstration peut d'ailleurs être simplifiée et décomposée en trois énoncés presque évidents.

a. Si dans un certain triangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits, on peut construire un autre triangle, ayant les angles égaux à ceux du premier et disposés dans le même ordre, et ayant les côtés n fois plus grands que leurs homologues, n étant un entier quelconque. C'est ce premier énoncé qui nous servira aussi au n° 4. La construction du second triangle, par accolement de triangles directement égaux au premier, y est d'ailleurs indiquée.

b. Si deux triangles ont un angle égal et si dans l'un des deux la somme des angles est égale à deux angles droits, il en sera de même dans l'autre. En effet on peut, d'après *a*, supposer que le triangle où la somme des angles vaut deux angles droits ait tous ses côtés plus grands que ceux de l'autre triangle.

Alors on fera coïncider les angles égaux et on invoquera la propriété du quadrilatère (n° 2, Remarque).

c. Si dans un certain triangle la somme des angles est égale à deux angles droits, il en est de même dans tout autre triangle. Il suffit, d'après *b*, de considérer un triangle auxiliaire ayant un angle de l'un des triangles donnés et un angle de l'autre.

Corollaire. Dans le système de géométrie que nous étudions, deux hypothèses seulement sont possibles : la somme des trois angles est égale à deux droits dans tous les triangles, ou elle est moindre dans tous.

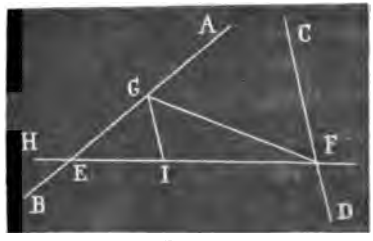


Fig. 1.

a. *Si la somme des angles de tout triangle est égale à deux angles droits, le cinquième postulat, ou postulat des trois droites, est vrai;* c'est-à-dire que *deux droites* AB, CD, *qui font avec une troisième* EF *deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme est plus petite que deux angles droits, prolongées suffisamment, se rencontrent de ce côté* (Fig. 1).

Nous ne pouvons adopter ici, avec M. Mansion, la démonstration de

(*) Réflexions sur la théorie des parallèles (*Mém. de l'Ac. des Sc. de Paris*, T. XII, 1833).

Legendre, parce qu'on y admet que dans un triangle isoscèle les angles à la base sont égaux.

Prenons sur AB (fig. 1) un point quelconque G et joignons-le au point F. L'angle GFE est plus petit que CFE. Au contraire l'angle GEH est plus grand que CFE ; donc, à cause de la continuité, on pourra mener par le point G une droite GI faisant l'angle GIE = CFE.

Reprenons le triangle GEI (fig. 2) et reproduisons-le en JIK. On aura GJ = EI = IK, les trois triangles représentés étant directement égaux. On pourra reproduire une quatrième fois le triangle en GLJ, et il est facile de voir que l'ensemble des quatre petits triangles en forme un grand, ayant les angles égaux à ceux du petit et les côtés doubles de ceux du petit.

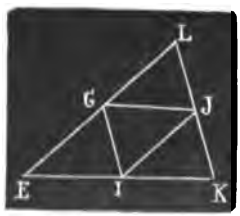


Fig. 2.

Continuant ainsi, on arrivera finalement à un triangle dont la base (adjacente aux angles égaux à E et à F) sera plus grande que EF. Portant alors EF sur cette base, et menant par E et F les droites EA, FC, on verra clairement qu'elles se rencontrent.

Il s'ensuit que dans la géométrie lobatchefskienne, où l'on rejette l'axiome 5, la somme des trois angles d'un triangle doit toujours être plus petite que deux angles droits. De même, la somme des angles de tout quadrilatère doit être plus petite que quatre angles droits.

5. *Si un triangle est contenu dans un autre, la somme des angles du premier est plus grande que la somme des angles du second.*

Bien que le théorème soit général, nous n'aurons besoin que du cas où les triangles ont un angle commun, et alors la démonstration résulte de la remarque que nous venons de faire sur le quadrilatère.

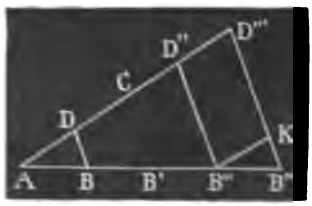


Fig. 3.

6. *Etant données deux droites* AB, AC (fig. 3), *si par des points* B, B', B'', B''', ... *de l'une, on mène des droites faisant toutes le même angle avec* AB, *ces droites ne pourront pas continuer indéfiniment à rencontrer* AC, c'est-à-dire que *la distance* AB *pour laquelle cette rencontre aura lieu a une limite supérieure.*

Soit BD une droite rencontrant AC. Portons BB' = B'B'' = B''B'''

= ... = AB. Supposons que les droites B″D″, B‴D‴, menées sous des angles B″ = B‴ = B, rencontrent encore AC.

Portons B‴K = BD. Tirons B′K et comparons la somme S‴ des angles du triangle AB‴D‴ à la somme S″ des angles du triangle AB″D″.

Ajoutant à S″ la somme δ des angles du triangle B″KB‴ (ou BAD), puis tout au plus quatre droits, pour le quadrilatère B″KD‴D″, puis retranchant six angles droits qui ne font pas partie de AB‴D‴, on voit que S‴ est tout au plus égal à

$$S'' + \delta - 2, \quad \text{ou} \quad S'' - (2 - \delta).$$

Ainsi à chaque oblique nouvelle que l'on mènerait, la somme des angles du grand triangle diminuerait (au moins) de la quantité positive $2 - \delta$. Cette somme elle-même finirait donc par devenir négative, si la construction pouvait se continuer indéfiniment.

De là résulte qu'il doit y avoir, parmi toutes les obliques menées de AB vers AC sous l'angle B, soit une dernière oblique rencontrant AC, soit une première oblique ne rencontrant pas.

La première hypothèse est impossible.

Soit, en effet, MN (fig. 4) une dernière oblique rencontrant AC; au delà de N prenons un point P et joignons le à un point Q pris au delà de M. Si l'angle Q est égal à M, il est prouvé que MN n'est pas la dernière oblique rencontrant AC.

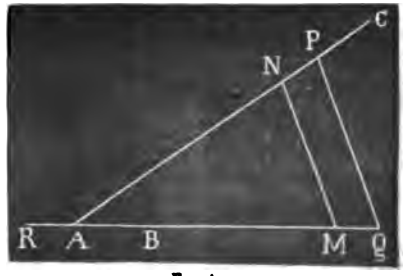


Fig. 4.

Si Q est plus grand que M, on formera un angle AQP′ = M; QP′ ne pouvant pas rencontrer MN. devra couper AC entre N et P et la conclusion sera la même.

Supposons donc Q < M. Comme l'angle PAR est plus grand que M, il devra exister entre Q et A un point M′ tel que PM′ forme l'angle M avec AB, et il est de plus évident que ce point ne pourra tomber qu'entre Q et M. Donc, encore une fois, MN n'est pas la dernière oblique rencontrant AC.

Il existe donc forcément une première oblique ne rencontrant pas, ou une oblique-limite.

7. Dans la même figure 3 (reproduite fig. 5), *les distances* AD, AD′, AD″, AD‴,... *n'ont pas de limite supérieure*, c'est-à-dire que *le point* D *s'éloigne indéfiniment à mesure que le point* B *se rapproche de l'oblique-limite.*

Supposons en effet que le point D ne puisse dépasser un certain point-limite L et soit menée en M l'oblique-limite dont l'existence a été prouvée (6). Joignons le point L au point M. La droite LM ne pourra pas tomber à droite de l'oblique-limite, car alors cette dernière, comprise dans le triangle AML, devrait rencontrer AC. La droite LM passe donc à gauche de l'oblique.

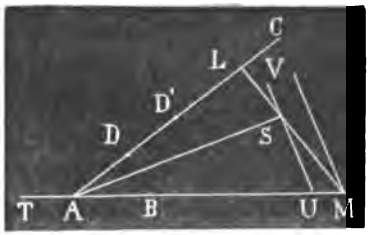


Fig. 5.

Prenons un point S sur ML et joignons-le au point A. SM faisant avec AB un angle plus petit que l'angle M de l'oblique-limite, tandis que l'angle SAT est plus grand que M, on pourra mener par S une droite SU, faisant exactement l'angle M. Le prolongement SV de US passera à droite de SL. Ce prolongement devra aller rencontrer AC, parce que USV se trouve en deça de l'oblique-limite, mais il ne pourra la rencontrer qu'à droite du point-limite L, donc cette prétendue limite n'existe pas.

8. Dans la même figure, *à mesure que le point* D *s'éloigne, l'angle en* D doit diminuer indéfiniment.

En effet, s'il avait une limite inférieure autre que zéro, par exemple α, les droites menées par D, D′, D″, D‴, ... sous l'angle α, iraient toutes rencontrer AB, ce qui a été démontré impossible (6).

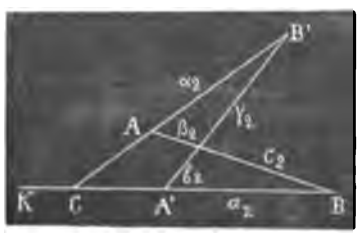


Fig. 6.

9. *Tout triangle* ABC (fig. 6) *possède un symétrique ayant les six éléments égaux à ceux du triangle donné, mais disposés en ordre inverse.*

I. En un point A′ du côté CB, faisons un angle A′ égal à l'angle A du triangle ABC. Si le point A′ est choisi suffisamment près du point C, le côté A′B′ ira rencontrer CA (*) et la somme des angles du triangle CA′B′

(*) Bien que ce fait soit assez évident, on peut le démontrer par un raisonnement analogue à celui qui a déjà été employé trois fois dans ce qui précède.

Menons B′A′ au hasard. Si $A' = A$, le problème est résolu. Si $A' > A$, on peut mener par A′ une droite formant l'angle A et coupant CA. Si $A' < A$, on observera que $B'CK > A$, d'où résulte qu'on pourra mener par B′ entre B′A′ et B′C, une droite faisant exactement l'angle A.

ainsi formé, devant pouvoir se rapprocher autant qu'on le veut de deux droits sera plus grande que la somme des angles du triangle ABC. Si le point A' s'éloigne de C, la somme des angles du triangle CA'B' diminue, c'est-à-dire que l'angle B', d'abord plus grand que B, diminue lui-même. On sait d'ailleurs (8) qu'il doit diminuer indéfiniment avant que les droites A'B', CA ne cessent de se couper. Au moment où l'on aura B' = B, les triangles ABC, A'B'C seront équiangles entre eux.

Etant ainsi emboîtés l'un dans l'autre suivant l'angle C, leurs côtés opposés AB, A'B', devront se couper (5). C'est ce que représente la figure.

II. Appelons a_1, b_1, c_1, les trois côtés du triangle ABC; α_1, β_1, γ_1 les trois côtés du triangle A'B'C. Si l'angle A n'est pas égal à B, on forme nécessairement un second couple de triangles, dont nous appellerons les côtés a_2, b_2, c_2 et α_2, β_2, γ_2, dans l'ordre indiqué par la figure.

Celle-ci donne

$$a_1 = b_1 + \alpha_2 \quad (1)$$
$$a_1 = \beta_1 + a_2 \quad (2)$$
$$c_1 = \beta_2 + c_2 \quad (3)$$
$$\gamma_1 = \gamma_2 + b_2. \quad (4)$$

Ajoutant (2) et (4), puis retranchant (1) et (3), on trouve :

$$(a_1 - \alpha_1) + (b_1 - \beta_1) - (c_1 - \gamma_1) = (a_2 - \alpha_2) + (b_2 - \beta_2) - (c_2 - \gamma_2). \quad (5)$$

Ainsi la quantité représentée par le premier membre est restée constante en passant du premier couple de triangles au second.

Dans le second couple de triangles, les angles sont encore égaux deux à deux et disposés en ordre inverse.

Examinons les conditions supplémentaires à réaliser pour que l'on puisse opérer sur le second couple comme sur le premier et obtenir des relations analogues, les deux triangles du second emboîtement étant disposés comme ceux du premier, quant aux lignes et quant aux lettres représentant les côtés.

Il faut d'abord que c_2 et γ_2 jouent dans le second couple le même rôle que c_1 et γ_1 dans le premier, c'est-à-dire que les angles à faire coïncider dans le second emboîtement seront A et A'.

Il faudra ensuite que a_2 et α_2 représentent les plus grands côtés de l'angle emboîté, comme cela arrivait pour le premier couple; ou tout

au moins on devra avoir $a_2 > \beta_2$ et $\alpha_2 > b_2$, comme on avait dans le premier couple $a_1 > \beta_1$ et $\alpha_1 > b_1$.

Si $a_2 > \beta_2$, on a nécessairement $\alpha_2 > b_2$, sans quoi deux triangles ayant même somme d'angles pourraient se placer entièrement l'un dans l'autre; mais c'est tout ce que l'on peut affirmer; et, par conséquent, il pourra être nécessaire, avant de passer au second emboîtement, de remplacer dans la figure,

$$a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad \alpha_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2,$$

respectivement par

$$\beta_2 \quad \alpha_2 \quad \gamma_2 \quad b_2 \quad a_2 \quad c_2.$$

Cette modification change le signe du second membre de l'égalité (5), de manière qu'en passant du premier emboîtement au second, la quantité représentée par le premier membre reste encore la même en valeur absolue. Les égalités (1) (2) (3) (4) deviennent

$$\alpha_1 = b_1 + b_2 \qquad (1')$$
$$a_1 = \beta_1 + \beta_2 \qquad (2')$$
$$c_1 = a_2 + \gamma_2 \qquad (3')$$
$$\gamma_1 = c_2 + \alpha_2. \qquad (4')$$

Moyennant ces conditions, on peut raisonner sur le second couple comme sur le premier, et ainsi de suite.

III. La construction s'arrêtera-t-elle, ou continuera-t-elle indéfiniment? Si elle s'arrêtait, c'est-à-dire si deux triangles du même couple coïncidaient entièrement, au lieu de laisser, comme dans la figure, deux triangles résidus, on aurait dans ces triangles

$$b_n = \alpha_n, \quad \beta_n = a_n, \quad c_n = \gamma_n,$$

d'où

$$(a_n - \alpha_n) + (b_n - \beta_n) - (c_n - \gamma_n) = 0.$$

Or, d'après ce qui précède, cette quantité est restée constante, au moins en valeur absolue, depuis le début des opérations. Donc elle était nulle tout d'abord.

Il reste donc à supposer que les constructions continuent indéfiniment. Or, alors il est visible que les triangles résidus doivent devenir de plus en plus petits (et nous le démontrerons d'ailleurs par une étude approfondie), de manière que la quantité représentée par les deux membres de (5) doit également finir par devenir aussi petite qu'on le veut en valeur absolue. Comme cette valeur absolue est restée constante, elle

était nulle dès le début. Nous pouvons donc, dans tous les cas, poser l'égalité

$$(a_1 - \alpha_1) + (b_1 - \beta_1) - (c_1 - \gamma_1) = 0. \qquad (6)$$

Si le terme $c_1 - \gamma_1$ est précédé du signe —, c'est parce que nous avons commencé la construction en faisant coïncider les angles en C.

En commençant par les angles en A ou par les angles en B, on aurait trouvé

$$(b_1 - \beta_1) + (c_1 - \gamma_1) - (a_1 - \alpha_1) = 0,$$
$$(c_1 - \gamma_1) + (a_1 - \alpha_1) - (b_1 - \beta_1) = 0.$$

De ces égalités et de (6), on tire enfin

$$a_1 - \alpha_1 = 0, \quad b_1 - \beta_1 = 0, \quad c_1 - \gamma_1 = 0,$$

ce qui prouve que les triangles ont les six éléments égaux chacun à chacun, quoique disposés dans un ordre différent. La question de la symétrie est donc résolue, et une fois que l'on connaît le triangle symétrique, il ne peut rester aucune difficulté dans les cas d'égalité des triangles.

IV. Mais il reste à prouver d'une manière mathématique l'égalité (6), dans le cas où la construction continue indéfiniment.

En passant d'un couple de triangles à un autre, on obtient, soit les égalités (1), (2), (3), (4), soit les égalités (1'), (2'), (3'), (4'). Or, ces deux groupes ont une propriété commune, c'est que, dans l'un comme dans l'autre, la quantité $c_n + \gamma_n$ va en diminuant quand on passe d'un emboîtement au suivant.

Le nombre total des emboîtements étant infini, il y aura aussi un nombre infini d'emboîtements, soit d'après le premier groupe de formules, soit d'après le second (et peut-être d'après les deux, ce qui ne nous servira pas).

Supposons, pour fixer les idées et le raisonnement étant le même dans les deux cas, qu'il y ait un nombre infini d'emboîtements du premier genre. A chacun d'eux, $c_n + \gamma_n$, qui diminue toujours quel que soit le genre de l'emboîtement, diminue ici de la quantité $b_n + \beta_n$, donc les deux quantités positives b_n et β_n doivent descendre au-dessous de toute valeur assignable, car si elles avaient une limite inférieure autre que zéro, $c_n + \gamma_n$, diminuant chaque fois au moins de cette limite inférieure, deviendrait négative, ce qui est absurde.

Puisque β_n et b_n sont devenues moindres que i, on aura,

$$|\gamma_n - \alpha_n| < \beta_n < i, \quad |c_n - a_n| < b_n < i \text{ (*)} \qquad (7)$$

en désignant suivant l'usage par $|A|$, la valeur absolue de A ; donc

$$|\gamma_n - \alpha_n - c_n + a_n| < 2i,$$
$$|(a_n - \alpha_n) - (c_n - \gamma_n)| < 2i.$$

Or,

$$|b_n - \beta_n| < i.$$

Par conséquent,

$$|(a_n - \alpha_n) - (c_n - \gamma_n)| + |b_n - \beta_n| < 3i$$

et à plus forte raison,

$$|(a_n - \alpha_n) + (b_n - \beta_n) - (c_n - \gamma_n)| < 3i,$$

c'est-à-dire qu'elle doit devenir moindre que toute grandeur donnée.

SUR LES TRIANGLES AUTOMÉDIANS,

par M. J. Déprez, professeur à l'Athénée de Bruxelles.

(*Suite*, voir pp. 196-200).

30. Soient B′, C′ les centres des cercles osculateurs à l'ellipse de Steiner en B, C ; ρ, ρ', ρ'' les rayons des cercles osculateurs à l'ellipse en A, B, C. L'orthocentre de ABC est le centre du cercle osculateur à l'ellipse de Steiner en A.

La perpendiculaire à BC, menée par le symétrique de K_1, par rapport à A_1, coupe les hauteurs BH, CH en B′, C′.

Le centre de gravité du triangle HB′C′ est confondu avec le centre du cercle circonscrit à ABC. Le point de Steiner du triangle HB′C′ est le centre du cercle de Longchamps du triangle ABC. Le cercle d'Euler du même triangle passe par le centre du cercle d'Euler du triangle ABC. On a

$$\rho\rho'\rho'' = R^3, \quad 2(\rho)^{\frac{2}{3}} = (\rho')^{\frac{2}{3}} + (\rho'')^{\frac{2}{3}}.$$

(*) Il semble qu'ici nous employions le principe, évité jusqu'à présent, qu'un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres. Mais en réalité il n'en est rien. Le principe réellement employé est celui-ci : Si deux points A et B se rapprochent indéfiniment et si un troisième point C est tel que AC et CB restent moindres que des quantités données, la différence CA — CB devra tendre vers zéro, lors même qu'elle resterait plus grande que AB. Alors les i des inégalités (7) devraient être remplacés par i' et i'', mais les conclusions resteraient les mêmes.

21. Le pied de la symédiane AK_1 est un sommet de l'ellipse de Lemoine; les axes de cette ellipse ont pour longueurs AK, GF.

22. La perpendiculaire abaissée sur AB, du point de rencontre de $B\Omega_2$ et CA, divise AB additivement dans le rapport 1 : 3; la perpendiculaire abaissée sur AC, du point de rencontre de $C\Omega_1$ et AB, divise AC additivement dans le rapport 1 : 3. La perpendiculaire élevée sur $B\Omega_2$ en Ω_2, divise AB additivement dans le rapport 1 : 2; la perpendiculaire élevée sur $C\Omega_1$ en Ω_1, divise le côté AC additivement dans le rapport 1 : 2.

23. Le triangle podaire de K, par rapport à $B_1C_1H_1$, est isoscèle. Le triangle podaire de G, par rapport à $B_1C_1K_1$, est semblable à ACB. Le triangle podaire, par rapport à ABC, d'un point quelconque du diamètre de Brocard est automédian.

24. Pour tout point P de la droite d'Euler, on a

$$2\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2;$$

α, β, γ étant les médianes du triangle ABC, on a

$$2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2;$$

r, r_1, r_2, r_3 étant les rayons des cercles tritangents,

$$(r_1 - r)(r_2 + r_3) = 2(r_2 r_3 - r r_1).$$

Soit δ_1 la parallèle à BC comprise entre CA et AB, menée par le point de Nagel du triangle; δ_2 et δ_3 ayant des significations analogues, on a

$$2\delta_1 = \delta_2 + \delta_3.$$

25. Considérons tous les triangles automédians ($2a^2 = b^2 + c^2$) ayant même base BC.

Le point de Lemoine de ces triangles décrit une ellipse (ε) ayant pour foyers les sommets fixes B, C du triangle variable ABC.

Les demi-axes de (ε) sont $\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Le diamètre de Brocard enveloppe (ε).

La symédiane AK est constamment normale à (ε).

Le sommet A décrit le premier cercle de Chasles de (ε).

Le centre de gravité, le foyer de la parabole de Kiepert, le point de

Steiner, le réciproque de l'orthocentre décrivent le second cercle de Chasles de (ε).

La droite d'Euler enveloppe le même cercle.

Les axes de l'ellipse de Steiner tournent chacun autour de l'un des points de rencontre du dernier cercle avec BC.

Les droites GVW_2, GV_2W tournent chacune autour de l'un des points de rencontre du même cercle avec la médiatrice de BC.

Les centres isodynamiques V, W se meuvent sur les tangentes au même cercle, menées parallèlement à BC.

La droite qui unit les centres isogones est constamment perpendiculaire à BC.

La droite VV_2 enveloppe le cercle circonscrit au triangle équilatéral construit extérieurement sur BC.

La droite WW_2 enveloppe le cercle circonscrit au triangle équilatéral construit intérieurement sur BC.

La droite qui unit le point de Lemoine à l'orthocentre enveloppe l'antipodaire de (ε), par rapport à son centre.

Le centre de l'hyperbole de Kiepert décrit le cercle principal de (ε).

Les points de Brocard parcourent chacun une podaire d'hyperbole.

La directrice de la parabole de Artzt qui touche AB, CA en B, C enveloppe le cercle principal de (ε).

L'axe de cette parabole enveloppe une hypocycloïde régulière à quatre rebroussements.

La droite qui unit le point de Lemoine au pied de la hauteur issue de A enveloppe une hypocycloïde régulière à quatre rebroussements.

L'axe de la parabole de Kiepert enveloppe une hypocycloïde régulière à quatre rebroussements.

86. On a donc le théorème suivant :

Soient A un point quelconque du premier cercle de Chasles d'une ellipse (ε) ayant pour axes $2a_1$, a_1 ; B, C les foyers de la conique.

Le triangle ABC est automédian ; le diamètre de Brocard touche (ε) au point de Lemoine K du triangle ; la aymédiane AK est normale à (ε) ; le triangle podaire d'un point quelconque du diamètre de Brocard, par rapport à ABC, est automédian ; la droite d'Euler touche le second cercle de Chasles au centre de gravité ; le point de Steiner, le foyer de la parabole de Kiepert, le réciproque de l'orthocentre sont situés sur le

même cercle ; la directrice de la parabole de Artzt (π_a) touche le cercle principal de (ε) au centre de l'hyperbole de Kiepert ; les centres isodynamiques sont sur les tangentes à (ε) aux sommets du petit axe ; les points K, V_2, W_2 et le centre de l'hyperbole de Kiepert sont sur une perpendiculaire à BC.

37. Supposons que les sommets A, B des triangles automédians, dans lesquels $2a^2 = b^2 + c^2$, soient fixes :

Le centre de gravité et le foyer de la parabole de Kiepert décrivent une circonférence ayant son centre en B et dont le rayon est $\frac{c}{\sqrt{3}}$.

La droite GF enveloppe une ellipse ayant B pour centre, l'un des foyers D de la conique divise additivement AB dans le rapport $\frac{2}{1}$.

La droite d'Euler enveloppe une hyperbole ayant B pour centre, l'un des foyers est A.

Le point de Steiner et le sommet C décrivent des circonférences ayant pour centre commun le symétrique de A par rapport à B ; les rayons de ces circonférences sont $\frac{2c}{\sqrt{3}}$ et $c\sqrt{3}$.

La droite R_1H_a enveloppe une ellipse concentrique à ces circonférences, l'un des foyers de la conique est le symétrique de D par rapport à B.

Le réciproque H_a de l'orthocentre décrit la podaire, par rapport à D, de l'ellipse précédente.

Les axes de l'ellipse de Steiner tournent chacun autour d'un point fixe situé sur AB.

Le point de Lemoine et le centre de l'hyperbole de Kiepert décrivent une circonférence ayant pour centre le milieu C_1 de AB et pour rayon $\frac{c}{2\sqrt{3}}$.

La droite qui unit les centres isogones V_2, W_2 enveloppe une ellipse ayant C_1 pour centre ; l'un des foyers de la conique est le point D.

Le diamètre de Brocard enveloppe une hyperbole dont le centre est C_1 ; A est un foyer de l'hyperbole.

La droite qui unit le centre isodynamique V au centre isogone W_2, passe par le point diamétralement opposé à A, sur le cercle circonscrit au triangle équilatéral construit intérieurement sur AB.

La droite qui unit le centre isodynamique W au centre isogone V_2,

passe par le point diamétralement opposé à A, sur le cercle circonscrit au triangle équilatéral construit extérieurement sur AB.

Le point de Brocard Ω_1, décrit une podaire de conique ; le point de Brocard Ω_2, décrit une circonférence ayant D pour centre et DB pour rayon. (*A continuer.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 742.

(Voir *Mathesis*, (2) I, p. 240 et (2) II, p. 160).

Une tangente à une ellipse rencontre le cercle principal aux points M, M' ; *démontrer que les diamètres conjugués avec ceux qui passent par* M *et* M' *rencontrent la tangente sur les directrices.* (W.-J. Greenstreet).

Appelons C le point où la tangente touche l'ellipse de centre O, et F, F' les foyers de cette courbe. Prolongeons F'M', qui est perpendiculaire à la tangente, jusqu'à sa rencontre G avec FC.

Le point M' étant le milieu de F'G, la droite OM' est parallèle à FC. Mais FC est la polaire du point D où la tangente rencontre la directrice correspondante à F ; par suite, la droite OD est conjuguée de la direction FC, et alors aussi de OM'.

Cette solution nous a été communiquée par un correspondant anonyme, qui avait rencontré la question 742 indiquée sous le n° 114 du recueil de problèmes de géométrie analytique de Laisant comme non résolue. La question 747 de *Mathesis* (II), (2), p. 256, est signalée, à tort, dans le même recueil, comme non résolue.

Question 882.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 240).

Soient A *un sommet d'une ligne cycloïdale, et* M *un point appartenant à la même boucle. Démontrer que le rayon du cercle directeur, qui passe par le centre de courbure correspondant à* M, *détermine sur la tangente en ce point un segment égal à l'arc* AM. (E. Cesàro).

Solution par M. Hacken (Ostende). 1. Soit l'épicycloïde engendrée par le point M du cercle O' de rayon b roulant sur un cercle fixe O de

rayon a. Pour obtenir, par la construction de Savary, le centre de courbure C correspondant à M, il faut joindre M au point de contact actuel B des deux cercles, puis joindre O au point N diamétralement opposé à M; l'intersection des droites MB et ON est le centre de courbure cherché. Le rayon OC détermine sur la tangente en M le segment MT. Les droites MT et OO′ se rencontrent au point K situé sur la circonférence O′. O étant l'origine des coordonnées rectangulaires, le rayon du cercle O passant par le point de rebroussement D de l'épicycloïde étant pris pour axe des x et l'angle DOB étant désigné par t, on aura

$$\frac{\text{KT}}{\text{BN ou MK}} = \frac{a+2b}{a}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{MT}}{\text{MK}} = \frac{2(a+b)}{a};$$

mais $\text{MK} = 2b\cos\frac{at}{2b}$, donc

$$\text{MT} = \frac{4(a+b)b}{a}\cos\frac{at}{2b}.$$

D'autre part, les équations de la courbe étant

$$x = (a+b)\cos t - b\cos\frac{a+b}{b}t, \quad y = (a+b)\sin t - b\sin\frac{a+b}{b}t,$$

on trouve facilement pour la différentielle de l'arc

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = 2(a+b)\sin\frac{at}{2b}\cdot dt.$$

Donc

$$\text{arc MA} = \int_t^{\frac{\pi b}{a}} 2(a+b)\sin\frac{at}{2b}\,dt = \frac{4(a+b)b}{a}\cos\frac{at}{2b}.$$

D'où l'on conclut arc MA = MT.

Dans le cas de l'hypocycloïde, on trouverait, tout-à-fait de la même manière, $\frac{4(a-b)b}{a}\cos\frac{at}{2b}$ pour la valeur commune de l'arc MA et du segment MT de la tangente.

Dans le cas de la cycloïde, le rayon du cercle directeur devient une droite perpendiculaire à la base; il est facile de voir que ce rayon passant par le centre de courbure détermine sur la tangente un segment double du segment compris dans le cercle mobile; or, on sait que ce dernier segment vaut la moitié de l'arc MA.

2. On sait que la développée de l'épicycloïde DMA est une nouvelle épicycloïde que l'on obtient comme il suit : on élève sur MC au point C une perpendiculaire qui coupe OO′ au point I ; sur IB comme diamètre on décrit une circonférence O″ ; on fait rouler cette circonférence sur la circonférence de centre O et de rayon OI ; le point C décrit la développée qui a pour sommet D. Nous allons démontrer le théorème pour la développée en nous plaçant au point C. Le centre de courbure correspondant au point C de l'épicycloïde DC se trouve sur la droite qui joint le point O au point diamétralement opposé à C dans le cercle O″, d'après la construction de Savary. Or, cette droite passe par M, car O est le centre de similitude des cercles O′ et O″ et les rayons CO″ et NO′ sont parallèles. Or, le segment CM de la tangente au point C de la développée est le rayon de courbure au point M de la développante et comme le rayon de courbure au point D de la développante est nul, l'arc DC de la développée est égal à CM.

×Question 886.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 263).

Etant donnés un triangle ABC *et un point* P *dans son plan, on inscrit à* ABC *deux triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$: *les points* A_1 *et* A_2 *sont situés sur* BC, B_1 *et* B_2 *sur* CA, C_1 *et* C_2 *sur* AB ; *les droites* A_1B_1, B_2C_2 *sont parallèles à* BP, B_1C_1 *et* C_2A_2 *à* CP, C_1A_1 *et* A_2B_2 *à* AP.

1° *Les triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *sont égaux.*

2° *Les droites* A_2C_2 *et* A_1B_1 *se coupent sur* AP ; B_2A_2 *et* B_1C_1 *sur* BP ; C_2B_2 *et* C_1A_1 *sur* CP.

3° *Soient* A_3, B_3, C_3 *les points d'intersection des couples de droites* B_1C_1 *et* B_2C_2, C_1A_1 *et* C_2A_2, A_1B_1 *et* A_2B_2 ; *les droites* AA_3, BB_3, CC_3 *concourent au complémentaire* P′ *du point* P.

4° *Soient* A_4, B_4, C_4 *les points de rencontre des couples de droites* BB_1 *et* CC_2, CC_1 *et* AA_2, AA_1 *et* BB_2 : *les droites* AA_4, BB_4, CC_4 *concourent en un point de la droite* PP′. (TUCKER.)

Solution par MM. DÉPREZ *et* EMMERICH(*). 1. Désignons par P_a, P_b, P_c les points où les droites AP, BP, CP rencontrent BC, CA, AB ; par M_a,

(*) Ne pouvant, faute d'espace, reproduire en entier les deux solutions, nous extrayons de chacune d'elles ce qui nous a paru le plus simple ou le plus intéressant. (RÉDACTION.)

M_a, M_b les milieux de BC, CA, AB; par M'_a, M'_b, M'_c les milieux des droites AP_a, BP_b, CP_c.

Considérons un parallèlogramme quelconque XYZU inscrit à ABC, dont un côté ZU repose sur BC et dont deux autres côtés XU, YZ sont parallèles à AP. Le centre V de ce parallèlogramme est au milieu de la droite qui joint les milieux des côtés XU, YZ; ces derniers points appartenant aux droites BM'_a, CM'_a, le lieu de V est la médiane (indéfinie) M'_bM_a du triangle M'_aBC. De même, les centres de parallélogrammes dont un côté repose sur CA ou sur AB et dont deux autres côtés sont parallèles à BP ou à CP ont respectivement pour lieux géométriques les droites $M_bM'_b$, $M_cM'_c$. Les droites $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ se coupent en un même point Q qui est le complémentaire du réciproque de P; car $BM_a : M_aC = M_cM'_a : M'_aM_b$, ... Dans chacune des trois séries de parallélogrammes dont il vient d'être question, il existe un parallélogramme de centre Q, dont les diagonales sont les droites B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 menées par Q dans les angles A, B, C et ayant leur milieu en Q. Il est facile de voir que les extrémités de ces droites sont les sommets de deux triangles égaux $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ayant leurs côtés parallèles aux droites AP, BP, CP. (Déprez.)

2. Soit A_3 le point de rencontre de C_2A_2 et B_1A_1. Au point P du triangle ABC correspond dans le triangle homothétique AC_1B_2 un point A_4 situé sur AP et sur les parallèles par C_1 à BP et par B_2 à CP. Les triangles égaux $A_4C_1B_2$, $A_3A_1A_2$ ayant leurs côtés parallèles, la droite A_4A_3 est parallèle à C_1A_1; donc A_3 est situé sur AP. (Emmerich.)

3. Menons par M_a, M_b, M_c des parallèles respectivement à AP, BP, CP; elles se coupent au complémentaire P′ de P. Les triangles AC_1B_2, AM_aM_b étant homothétiques par rapport à A, les points correspondants A_3, P′ sont en ligne droite avec A. (Emmerich.)

4. Désignons par x, y, z les coordonnées barycentriques courantes, par α, β, γ celles de P; celles du point Q seront

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},\quad \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha},\quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\quad \text{ou}\quad \alpha(\beta+\gamma),\quad \beta(\gamma+\alpha),\quad \gamma(\alpha+\beta),$$

et les coordonnées absolues sont les dernières expressions divisées par leur somme $2\Sigma\alpha\beta$. La valeur absolue de la coordonnée y de A_1 est double de celle de Q ou égale à $\frac{\beta(\gamma+\alpha)}{\Sigma\alpha\beta}$, et celle de $z = 1 - \frac{\beta(\gamma+\alpha)}{\Sigma\alpha\beta}$,

de sorte que les coordonnées relatives de Q sont $0, \beta(\gamma+\alpha), \gamma\alpha$. On a donc pour les coordonnées de $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$:

$$0, \beta(\gamma+\alpha), \gamma\alpha; \quad \alpha\beta, 0, \gamma(\alpha+\beta); \quad \alpha(\beta+\gamma), \beta\gamma, 0;$$
$$0, \alpha\beta, \gamma(\alpha+\beta); \quad \alpha(\beta+\gamma), 0, \beta\gamma; \quad \gamma\alpha, \beta(\gamma+\alpha), 0.$$

On en conclut les équations des droites BB_1, CC_2 :

$$\frac{z}{\gamma(\alpha+\beta)} = \frac{x}{\alpha\beta}, \quad \frac{x}{\gamma\alpha} = \frac{y}{\beta(\gamma+\alpha)};$$

d'où, en éliminant x, l'équation de AA_4,

$$\frac{y}{\beta^2(\gamma+\alpha)} = \frac{z}{\gamma^2(\alpha+\beta)}.$$

On voit facilement que les trois droites AA_4, BB_4, CC_4 concourent en un point P'' qui a pour coordonnées $\alpha^2(\beta+\gamma)$, $\beta^2(\gamma+\alpha)$, $\gamma^2(\alpha+\beta)$. Les trois points P, P', P'' sont en ligne droite, car

$$\begin{vmatrix} \alpha^2(\beta+\gamma) & \beta^2(\gamma+\alpha) & \gamma^2(\alpha+\beta) \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)\,\Sigma\alpha^2(\beta^2-\gamma^2) = 0.$$

(DÉPREZ.)

REMARQUES (dues à M. DÉPREZ). 1. Les cas particuliers où P coïncide avec l'orthocentre H ou avec le centre du cercle inscrit ont déjà été traités dans *Mathesis*, (1), I, p. 186 et 192. Une projection parallèle permet de passer de l'un de ces cas au cas général.

2. Les six points $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ sont situés sur une même conique, de centre Q, et ayant pour équation

$$\Sigma\frac{x^2}{\alpha^2(\beta+\gamma)} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Sigma yz\,\frac{2\alpha^2+\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} = 0.$$

3. Voici quelques relations curieuses concernant les parallélogrammes et les triangles qui se présentent dans la question 986 :

$$A_1A_2 = a\frac{\beta\gamma}{\Sigma\alpha\beta}, \quad B_1B_2 = b\frac{\gamma\alpha}{\Sigma\alpha\beta}, \quad C_1C_2 = c\frac{\alpha\beta}{\Sigma\alpha\beta};$$

$$\text{périmètre de l'hexagone } A_1A_2B_1B_2C_1C_2 = 2\frac{\Sigma\alpha\beta\gamma}{\Sigma\alpha\beta};$$

$$\text{aire de cet hexagone} = 2S\frac{\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha}{\Sigma^2\alpha\beta} = 2A_1B_1C_1 = 2A_2B_2C_2;$$

$$\text{aire } A_1A_2B_2C_1 = 2S\frac{\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma)}{\Sigma^2\alpha\beta}, \text{ etc.}$$

4. Les diagonales A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 des parallélogrammes sont respectivement parallèles aux droites P_aP_b, P_bP_c, P_cP_a.

Les parallèles à AB, BC, CA menées respectivement par A_1, B_1, C_1 ou par B_2, C_2, A_2 concourent au point $\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$ ou au point $\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\alpha}\right)$.

Question 1033.

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 215.)

Soient ABC *un triangle circonscrit à une parabole, tel que les normales aux points de contact* A', B', C' *des côtés* BC, CA, AB *concourent en un même point* N. *Les droites* AA', BB', CC' *concourent en un même point* P. Les perpendiculaires abaissées de (*) A, B, C *respectivement sur les droites* B'C', C'A', A'B' *concourent en un même point* Q. *Démontrer que les cinq points* A, B, C, P, Q *sont situés sur une même hyperbole équilatère* Σ.

Soient A'', B'', C'' les symétriques de N *par rapport aux milieux des côtés du triangle* A'B'C' ; *l'orthocentre du triangle* A''B''C'' *est situé sur* Σ. *On construit les parallélogrammes* C'AB'A''', A'BC'B''', B'CA'C'''; *les droites* A'A''', B'B''', C'C''' *forment un triangle* A'''B'''C''' *inscrit à* Σ *et qui a même orthocentre que* ABC. (Tucker.)

Solution par M. Emmerich. Les coordonnées d'un point M de la parabole $y^2 = 4px$ étant m^2p, $2mp$, les équations de la tangente et de la normale en M sont respectivement :

$$x - my + m^2p = 0; \qquad mx + y - m^2p - 2mp = 0.$$

Exprimons que la dernière équation est vérifiée par les coordonnées (α, β) du point N ; nous aurons

$$m^2p + m(2p - \alpha) - \beta = 0.$$

Les trois racines a, b, c sont les paramètres des pieds A', B', C' des normales issues de N. On a

$$a + b + c = 0, \quad (bc + ca + ab)p = 2p - \alpha, \quad abcp = \beta.$$

En posant $2p - \alpha = sp$, il vient $s = bc - a^2$.

(*) Passage rectifié.

Cela posé, les équations des côtés du triangle ABC étant

$$x - ay + a^2p = 0, \quad x - by + b^2p = 0, \quad x - cy + c^2p = 0,$$

les coordonnées des points A, B, C sont, respectivement,

$$bcp, \quad -ap; \qquad cap, \quad -bp; \qquad abp, \quad -cp.$$

Les droites joignant les sommets A, B, C aux points $A'(a^2p, 2ap)$, $B'(b^2p, 2bp)$, $C'(c^2p, 2cp)$ ont pour équations

$$3ax + sy + asp - 3\beta = 0, \text{ etc., ou bien } a(3x + sp) + (sy - 3\beta) = 0, \text{ etc.};$$

on voit qu'elles passent au point $P\left(-\frac{sp}{3}, \frac{3\beta}{s}\right)$.

Des équations des droites B'C', C'A', A'B', savoir :

$$2x + ay + 2bcp = 0, \text{ etc.},$$

on tire pour les perpendiculaires menées de A, B, C aux côtés correspondants du triangle A'B'C' :

$$ax - 2y - 2ap - \beta = 0, \text{ etc., ou bien } a(x - 2p) - (2y + \beta) = 0, \text{ etc.}$$

On voit que ces dernières droites concourent au point $Q(2p, -\frac{1}{2}\beta)$.

Les points A, B, C, P, Q sont situés sur l'hyperbole équilatère

$$xy = -p\beta,$$

laquelle passe par l'orthocentre $H(-p, \beta)$ du triangle ABC, pied de la perpendiculaire abaissée de N sur la directrice de la parabole.

Les coordonnées de A'' se déduisent aisément des coordonnées correspondantes des points B', C', N. On trouve

$$-p(2 + bc), \quad -ap(2 + bc), \text{ etc.}$$

Ces valeurs satisfont à l'équation de la perpendiculaire de A sur B'C'. Or, on conclut des parallélogrammes NA'C''B', NA'B''C' que B''C'' est parallèle à B'C'; il s'ensuit que l'orthocentre du triangle A''B''C'' est le point Q. Les triangles A'B'C' et A''B''C'' sont égaux et homothétiques; le centre d'homothétie, milieu de A'A'', B'B'', C'C'' a les coordonnées $\frac{1}{2}\alpha - 2p, -\frac{1}{2}\beta$.

Les coordonnées de $A'''[-p(s + 2bc), -ap]$, montrent que AA''', BB''', CC''' sont parallèles à l'axe de la parabole. Ensuite les équations de

$$A'A''' : ax - bcy + asp + \eta = 0, \quad B'B''' \ldots, \quad C'C''' \ldots$$

conduisent aux points

$$A^{IV} : a^2p, \ -\frac{\beta}{a^2}; \quad B^{IV} : b^2p, \ -\frac{\beta}{b^2}; \quad C^{IV} : c^2p, \ -\frac{\beta}{c^2},$$

situés sur l'hyperbole Σ.

Les équations des droites

$$A^{IV}H : \beta x + a^2py + p\beta(a^2 - 1) = 0,$$
$$B^{IV}C^{IV} : \beta x - b^2c^2py - p\beta(b^2 + c^2) = 0$$

démontrent que l'orthocentre de $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ est identique à celui de ABC.

×Question 1433.

(Voir *Mathesis* (3) III, p. 152.)

Dans tout triangle sphérique ABC, *on a*

$$\Sigma \frac{\cos a - \cos b}{1 - \cos c} \sin 2C = 0. \qquad \text{(Pesci.)}$$

Solution par MM. A. Droz-Farny, Emmerich, Dalle (Malonne), Haussner, Van Rijn, Desprets. On a d'abord

$$\frac{\cos a - \cos b}{1 - \cos c} = \frac{\sin \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2}}{\sin^2 \frac{c}{2}}.$$

Or, en vertu du théorème de Delambre,

$$\frac{\sin \frac{b+a}{2}}{\sin \frac{c}{2}} = \frac{\cos \frac{B-A}{2}}{\sin \frac{C}{2}}, \qquad \frac{\sin \frac{b-a}{2}}{\sin \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{B-A}{2}}{\cos \frac{C}{2}};$$

par conséquent,

$$\Sigma \frac{\cos a - \cos b}{1 - \cos c} \sin 2C = \Sigma \frac{\sin (B - A)}{\sin C} \sin 2C = 2\Sigma \sin (B - A) \cos C = 0,$$

car $\Sigma \sin(A - B) \cos C$ est le développement du déterminant nul

$$\begin{vmatrix} \sin A & \cos A & \cos A \\ \sin B & \cos B & \cos B \\ \sin C & \cos C & \cos C \end{vmatrix}$$

Solution par MM. Emmerich, Plakhovo et H. Lez. Remplaçons sin 2A, sin 2B, sin 2C par 2 sin A cos A, 2 sin B cos B, 2 sin C cos C ; ensuite sin A, sin B, sin C par les quantités proportionnelles sin a, sin b, sin c; enfin cos A, cos B, cos C par $\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$, ... ; l'égalité à démontrer prendra la forme

$$\Sigma(\cos a - \cos b)(1 + \cos c)(\cos c - \cos a \cos b) = 0;$$

ou

$$\Sigma(\cos a - \cos b)\cos c + \Sigma \cos^2 c(\cos a - \cos b) - \Sigma \cos a \cos b(\cos a - \cos b) - \cos a \cos b \cos c \,\Sigma(\cos a - \cos b) = 0,$$

et se vérifie immédiatement.

Remarques (dues de M. Emmerich). 1° En géométrie plane,

$$\Sigma \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = 0.$$

2° Le triangle polaire donne

$$\Sigma \frac{\cos A - \cos B}{1 + \cos C} \sin 2c = 0.$$

Question 1437.

(Voir *Mathesis* (3) III, p. 216).

Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(y + zx)\frac{dz}{dx} + (x + yz)\frac{ds}{dy} + 1 - s^2 = 0$$

et montrer que les courbes caractéristiques sont des droites s'appuyant sur deux droites fixes. (A. Demoulin).

Solution par M. E. Cesàro. Après avoir mis de côté l'intégrale évidente $s^2 = 1$, on réduit sans peine les équations différentielles simultanées

$$\frac{dx}{y + xz} = \frac{dy}{x + yz} = \frac{ds}{s^2 - 1}$$

à la forme

$$\frac{d(x+y)}{x+y} = \frac{ds}{s-1}, \quad \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{ds}{s+1},$$

qui se prête à l'intégration immédiate :

$$x+y=a(z-1), \quad x-y=b(z+1).$$

Ces équations représentent les droites qui s'appuient sur les droites fixes $x+y=z-1=0$ et $x-y=z+1=0$. Toute surface satisfaisant à l'équation proposée peut être représentée par une équation de la forme

$$\varphi\left(\frac{x+y}{z-1}, \quad \frac{x-y}{z+1}\right)=0,$$

φ étant le symbole d'une fonction arbitraire. On peut remarquer qu'il y a, parmi ces surfaces, toutes les surfaces du second ordre passant par les droites fixes, et en particulier les paraboloïdes hyperboliques $y+xz=0$, $x+yz=0$, et les hyperboloïdes de révolution $x^2-y^2 \pm z^2=\pm 1$.

Même solution par MM. J. Rose et Claeys.

QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE,

Concours général de 1903 (Belgique).

Dans une ellipse donnée rapportée à ses axes de symétrie, on mène par le foyer F deux rayons vecteurs FM, FN tels que

$$\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}=\frac{1}{k},$$

k désignant une constante.

1° Rechercher l'équation du lieu géométrique du point de rencontre P des tangentes à l'ellipse donnée aux points variables M et N;

2° On demande une discussion algébrique de l'équation trouvée, pour les diverses valeurs positives de k, afin de reconnaître la nature du lieu;

3° Pour $k=\frac{b^2}{2a}$, la courbe dégénère en deux droites dont l'une est la directrice correspondant au foyer F de l'ellipse donnée. Démontrer directement que la polaire de tout point P de cette droite rencontre l'ellipse en deux points M, N tels que

$$\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}=\frac{2a}{b^2}.$$

Se servir à cet effet des propriétés de l'ellipse et de l'équation de cette conique en coordonnées polaires, le pôle étant au foyer F et l'axe polaire se confondant avec le grand axe de l'ellipse.

4° Pour $k = \frac{1}{2}a$, le lieu est une parabole; trouver l'équation de cette courbe rapportée à son axe de symétrie et à la tangente au sommet.

5° Quelle valeur faut-il attribuer à k pour que le lieu soit une hyperbole équilatère? Rapporter cette hyperbole à son centre et à ses axes, puis à ses asymptotes.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1439. Chercher le lieu du foyer de la parabole qui a trois points confondus en un point M variable d'une parabole P, et qui passe par le second point de rencontre de P avec son cercle osculateur en M.

(E. N. Barisien.)

1440. Déterminer les lignes asymptotiques de la surface définie par l'équation

$$z = f(x) + \varphi(y).$$

Les axes étant supposés rectangulaires, déterminer les fonctions $f(x)$ et $\varphi(y)$ par la condition que les lignes asymptotiques se projettent sur le plan des xy suivant un système orthogonal. (A. Demoulin.)

1441. On donne deux cercles fixes qui se coupent en O, A. Par O on mène une sécante quelconque qui rencontre les deux cercles en B, D. 1° Les tangentes en B, D se coupent en F. Lieu du point F. 2° On rabat OF en OM, OM′ sur BD. Lieu des points M, M′. 3° On projette F en N sur BD. Lieu du point N. (H. Brocard.)

×**1442**. Soit ABCD un quadrilatère inscrit à un cercle. La perpendiculaire en A sur AB rencontre CD au point A′, et la perpendiculaire en C sur CD coupe AB au point C′. Démontrer 1° que la droite A′C′ est parallèle à la diagonale BD; 2° que le point de concours des droites AA′ et CC′, celui des droites AB et BC sont en ligne droite avec le centre O du cercle ABCD. (A. C.).

---

*FONCTIONS HYPERBOLIQUES ET TRIGONOMÉTRIE LOBATCHEFSKIENNE.

I.

Fonctions hyperboliques.

1. *Sur l'utilité des fonctions hyperboliques.* « Il arrive assez souvent, dans les calculs de résistance des matériaux, que les résultats se compliquent d'imaginaires à la suite de circonstances spéciales. Pour les obtenir sous forme réelle, on recommence un calcul plus ou moins long, tandis qu'il existe des transformations simples qui y conduisent rapidement. Dans bien des cas, ces transformations s'effectuent commodément au moyen des fonctions hyperboliques » (Yvon Villarceau, *Annales des Ponts et Chaussées*, 6e série, t. I, p. 207, février 1881). Les fonctions hyperboliques s'introduisent aussi d'une manière naturelle dans maints calculs pratiques d'électricité et en géométrie non euclidienne. Il importe donc de les connaître.

2. *Définitions.* On a, par définition, e étant la base des logarithmes naturels,

$$\operatorname{Sh} t = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \quad \operatorname{Ch} t = \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad \operatorname{Th} t = \operatorname{Sh} t : \operatorname{Ch} t,$$
$$\text{Coséch } t = 1 : \operatorname{Sh} t, \quad \text{Séch } t = 1 : \operatorname{Ch} t, \quad \operatorname{Coth} t = 1 : \operatorname{Th} t,$$

et ces fonctions sont appelées *sinus, cosinus, tangente, cosécante, sécante, cotangente hyperboliques*. Ch t et Séch t sont toujours positifs.

3. *Propriétés immédiates.* I. On a, les radicaux étant pris positivement,

$$\operatorname{Ch}^2 t - \operatorname{Sh}^2 t = 1, \quad \operatorname{Ch} t = 1 : \sqrt{1 - \operatorname{Th}^2 t}, \quad \operatorname{Sh} t = \operatorname{Th} t : \sqrt{1 - \operatorname{Th}^2 t};$$
$$\operatorname{Ch}(-t) = \operatorname{Ch} t, \quad \operatorname{Sh}(-t) = -\operatorname{Sh} t, \quad \operatorname{Th}(-t) = -\operatorname{Th} t.$$

II. Quand t croît de 0 à ∞, Sh t croît de 0 à ∞, Ch t croît de 1 à ∞, Th t de 0 à 1, comme cela résulte des formules

$$\operatorname{Sh} t = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2e^t}, \quad \operatorname{Ch} t = \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2 t}, \quad \operatorname{Th} t = 1 : \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Sh}^2 t} + 1}.$$

(*) Dans cette note, nous résumons les propriétés essentielles des fonctions hyperboliques et nous reproduisons les additions et les modifications que nous avons introduites dans la traduction espagnole de notre opuscule sur la théorie de ces fonctions. Cette traduction a été publiée en 1896 à Valence (chez P. Aguilar) par D. Luis G. Gascó, professeur à l'Université de cette ville, sous le titre : *Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas*, d'abord dans son Journal de mathématiques, puis en une brochure de 44 pages in-8.

III. On trouve sans peine

$$\operatorname{Sh}(t \pm u) = \operatorname{Sh} t \operatorname{Ch} u \pm \operatorname{Sh} u \operatorname{Ch} t, \quad \operatorname{Sh} 2t = 2 \operatorname{Sh} t \operatorname{Ch} t,$$
$$\operatorname{Ch}(t \pm u) = \operatorname{Ch} t \operatorname{Ch} u \pm \operatorname{Sh} u \operatorname{Sh} t, \quad \operatorname{Ch} 2t = \operatorname{Ch}^2 t + \operatorname{Sh}^2 t,$$
$$\operatorname{Th}(t \pm u) = \frac{\operatorname{Th} t \pm \operatorname{Th} u}{1 \pm \operatorname{Th} t \operatorname{Th} u}, \quad \operatorname{Th} 2t = \frac{2 \operatorname{Th} t}{1 + \operatorname{Th}^2 t}.$$

Par suite, à cause de la relation $\operatorname{Ch}^2 t - \operatorname{Sh}^2 t = 1$,

$$\operatorname{Ch} 2t + 1 = 2 \operatorname{Ch}^2 t, \quad \operatorname{Ch} t = \sqrt{\frac{\operatorname{Ch} 2t + 1}{2}}, \quad \operatorname{Ch} \frac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\operatorname{Ch} t + 1}{2}}$$

$$\operatorname{Ch} 2t - 1 = 2 \operatorname{Sh}^2 t, \quad \operatorname{Sh} t = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{Ch} 2t - 1}{2}}, \quad \operatorname{Sh} \frac{1}{2} t = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{Ch} t - 1}{2}}$$

On prend le signe + ou — suivant que t est positif ou négatif.

IV. On peut déduire aisément des formules précédentes celles qui permettent de remplacer les expressions $\operatorname{Sh} a \pm \operatorname{Sh} b$, $\operatorname{Ch} a \pm \operatorname{Ch} b$ par des produits.

4. *Théorème de Laisant.* Si l'on pose $\operatorname{Sh} t = \operatorname{tang} \theta$, et par suite, $\operatorname{Ch} t = (1 : \cos \theta)$, $\operatorname{Th} t = \sin \theta$, on a

$$\operatorname{Th} \tfrac{1}{2} t = \frac{2 \operatorname{Sh} \frac{1}{2} t \operatorname{Ch} \frac{1}{2} t}{2 \operatorname{Ch}^2 \frac{1}{2} t} = \frac{\operatorname{Sh} t}{1 + \operatorname{Ch} t} = \frac{\operatorname{tang} \theta}{1 + \dfrac{1}{\cos \theta}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \theta.$$

5. *Application.* Soit à chercher, pour n indéfiniment croissant, la limite de

$$y = \frac{(\sqrt{1 + a^2} + a)^n - (\sqrt{1 + a^2} - a)^n}{(\sqrt{1 + a^2} + a)^n + (\sqrt{1 + a^2} - a)^n}.$$

Posons $a = \operatorname{Sh} t$ et, par suite,

$$\sqrt{1 + a^2} + a = \operatorname{Ch} t + \operatorname{Sh} t = e^t, \quad \sqrt{1 + a^2} - a = \operatorname{Ch} t - \operatorname{Sh} t = e^{-t}.$$

Il viendra

$$y = \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{e^{nt} + e^{-nt}} = \operatorname{Th} nt,$$

qui pour $n = \infty$, a pour limite l'unité (3, II).

II.

Trigonométrie lobatchefskienne.

1. *Triangles quelconques.* Dans la géométrie non euclidienne de Lobatchefsky, on a, entre les côtés a, b, c d'un triangle et l'angle A opposé au côté a, la relation fondamentale

$$\operatorname{Ch} a = \operatorname{Ch} b \operatorname{Ch} c - \operatorname{Sh} b \operatorname{Sh} c \cos A. \tag{1}$$

Nous proposons à nos lecteurs comme exercice de déduire de cette relation et des relations analogues obtenues en permutant les lettres a, b, c, A, B, C, les formules de ce § II et d'abord les suivantes :

$$\frac{\operatorname{Sh} a}{\sin A} = \frac{\operatorname{Sh} b}{\sin B} = \frac{\operatorname{Sh} c}{\sin C}, \tag{2}$$

$$\operatorname{Coth} a \operatorname{Sh} b = \operatorname{Ch} b \cos C + \sin C \cot A, \tag{3}$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{Ch} a. \tag{4}$$

2. *Triangles rectangles.* Si l'angle A est droit, on a

$$\operatorname{Ch} a = \operatorname{Ch} b \operatorname{Ch} c; \tag{1'}$$

$$\operatorname{Sh} b = \operatorname{Sh} a \sin B, \qquad \operatorname{Sh} c = \operatorname{Sh} a \sin C \tag{2'}$$

$$\operatorname{Th} b = \operatorname{Th} a \cos C, \qquad \operatorname{Th} c = \operatorname{Th} a \cos B, \tag{3'}$$

$$\operatorname{Th} b = \operatorname{Sh} c \operatorname{tang} B, \qquad \operatorname{Th} c = \operatorname{Sh} b \operatorname{tang} C, \tag{3''}$$

$$\operatorname{Ch} a = \cot B \cot C; \tag{4'}$$

$$\cos B = \operatorname{Ch} b \sin C, \qquad \cos C = \operatorname{Ch} c \sin B. \tag{4''}$$

D'après (3'), si $\cos C = \operatorname{Th} b$, $\operatorname{Th} a = 1$; alors le côté a et, par suite, le côté c sont infinis et asymptotes l'un de l'autre. De $\cos C = \operatorname{Th} b$, on tire d'ailleurs $\sin C = 1 : \operatorname{Ch} b$, $\cot C = \operatorname{Sh} b$. Quand ces relations existent entre une longueur b et un angle C, Lobatchefsky écrit $C = \Pi(b)$, c'est-à-dire C est l'angle d'asymptotisme correspondant à la longueur b, pour la perpendiculaire a et l'oblique c à b. Au lieu d'*asymptotisme*, Lobatchefsky emploie le terme malheureux de *parallélisme*.

3. *Quadrilatère birectangle.* Dans un quadrilatère ayant pour côtés a, b, c, d et birectangle en (a, b) et (b, c), on a

$$\operatorname{Ch} d = \operatorname{Ch} a \operatorname{Ch} b \operatorname{Ch} c - \operatorname{Sh} a \operatorname{Sh} c. \tag{5}$$

Un quelconque des angles non droits, par exemple (a, d), est déter-

miné par la formule

$$\operatorname{Sh} c = \operatorname{Sh} a \operatorname{Ch} d - \operatorname{Ch} a \operatorname{Sh} d \cos(a, d), \tag{6}$$

qui peut se mettre sous la forme suivante (BATTAGLINI) :

$$\operatorname{Ch}\left(c + \tfrac{1}{2}\pi i\right) = \operatorname{Ch}\left(a + \tfrac{1}{2}\pi i\right) \operatorname{Ch} d - \operatorname{Sh}\left(a + \tfrac{1}{2}\pi i\right) \operatorname{Sh} d \cos(a, d), \tag{1''}$$

comme si (a, d) était l'angle d'un triangle dont les côtés seraient $a + \frac{1}{2}\pi i$, d et $c + \frac{1}{2}\pi i$, i désignant $\sqrt{-1}$. On dit que ce triangle a son troisième sommet en un point *idéal* $(a + \frac{1}{2}\pi i,\ c + \frac{1}{2}\pi i)$.

4. *Quadrilatère trirectangle.* Dans un quadrilatère trirectangle en (d, a), (a, b), (b, c) et dont r est la diagonale qui passe par l'angle (c, d) non droit, on a

$$\operatorname{Ch} a \operatorname{Ch} d = \operatorname{Ch} r = \operatorname{Ch} b \operatorname{Ch} c ; \tag{7}$$

$$\operatorname{Sh} c = \operatorname{Sh} a \operatorname{Ch} d, \quad \operatorname{Sh} d = \operatorname{Sh} b \operatorname{Ch} c, \tag{6'}$$

$$\frac{\operatorname{Sh} c}{\operatorname{Ch} r} = \operatorname{Th} a, \qquad \frac{\operatorname{Sh} d}{\operatorname{Ch} r} = \operatorname{Th} b, \tag{6''}$$

$$\operatorname{Th} c = \operatorname{Th} a \operatorname{Ch} b, \quad \operatorname{Th} d = \operatorname{Th} b \operatorname{Ch} a ; \tag{6'''}$$

$$\operatorname{Sh}^2 c + \operatorname{Sh}^2 d = \operatorname{Sh}^2 r, \quad \operatorname{Th}^2 a + \operatorname{Th}^2 b = \operatorname{Th}^2 r. \tag{8}$$

L'angle non droit (c, d) satisfait aux relations

$$\cos(c, d) = \operatorname{Th} c \operatorname{Th} d = \operatorname{Sh} a \operatorname{Sh} b, \tag{9}$$

$$\sin(c, d) = \frac{\operatorname{Ch} r}{\operatorname{Ch} c \operatorname{Ch} d}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tang}(c, d) = \frac{\operatorname{Ch} r}{\operatorname{Sh} c \operatorname{Sh} d}. \tag{11}$$

D'après (9), si $\operatorname{Sh} a \operatorname{Sh} b = 1$, cet angle est nul et les côtés c, d sont infinis et asymptotes l'un de l'autre.

5. *Coordonnées.* En géométrie analytique, prenons dans le quadrilatère précédent, le point (a, b) comme origine des axes, comme axes les directions des côtés a et b, comme coordonnées *ordinaires* du point (c, d), U étant une coordonnée *surabondante*,

$$X = \operatorname{Th} b, \quad Y = \operatorname{Th} a, \quad U = \operatorname{Th} r ;$$

comme coordonnées *homogènes*,

$$x = \operatorname{Sh} d, \quad y = \operatorname{Sh} c, \quad u = \operatorname{Ch} r.$$

On aura d'après (6″) et (8)

$$X = \frac{x}{u}, \quad Y = \frac{y}{u}. \quad x^2 + y^2 + 1 = u^2, \quad X^2 + Y^2 = U^2. \quad (12)$$

Le cosinus hyperbolique v de la distance de deux points ayant pour coordonnées homogènes (x, y, u), (x', y', u') est donné par la formule

$$v = uu' - xx' - yy'. \quad (13)$$

Les formules de transformation des coordonnées x, y, u, en géométrie lobatchefskienne plane sont les mêmes que les formules de transformation des coordonnées orthogonales, d'origine fixe, en géométrie euclidienne à trois dimensions.

On étend aisément à l'espace, la théorie des coordonnées contenue dans les formules (12) et (13) et dans la remarque qui les suit. (P. M.).

SUR LES TRIANGLES AUTOMÉDIANS,

par M. J. Déprez, professeur à l'Athénée de Bruxelles.

(*Suite et fin*, voir pp. 196-200; 226-230).

38. Le sommet A d'un triangle automédian est fixe, sa base BC se déplace sur une droite donnée (Δ) :

Le centre de gravité, le point de Lemoine, le réciproque de l'orthocentre se meuvent sur une parallèle (Δ_1) à la droite (Δ); (Δ_1) divise en P_1, dans le rapport $\frac{2}{1}$, la perpendiculaire abaissée de A sur (Δ).

Le point de Steiner R_1 et le foyer F de la parabole de Kiepert décrivent la droite (Δ′) symétrique de (Δ_1) par rapport à (Δ).

Le centre de l'hyperbole de Kiepert se déplace sur une parallèle (Δ_2) à la droite (Δ); la droite (Δ_2) passe par le milieu P_2 de AP_1.

La circonférence GFR_1H_1 enveloppe une hyperbole ayant A pour foyer; les droites (Δ_1), (Δ′) sont les tangentes aux sommets de la courbe.

Le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle de Longchamps se meuvent sur une parabole; P_1 est le sommet de la courbe, (Δ_1) la tangente au sommet, le paramètre de la parabole vaut le triple de la distance de A à (Δ).

Le cercle circonscrit à ABC enveloppe une podaire de parabole.

Le centre du cercle des neuf points de ABC parcourt une parabole ayant P_1 pour sommet; (Δ_1) est la tangente au sommet.

Le cercle des neuf points enveloppe une podaire de parabole.

Les centres isogones décrivent une hyperbole équilatère (Γ) ayant pour sommets A, P_1.

Les droites VW_2, WV_2 enveloppent l'antipodaire de l'hyperbole (Γ), par rapport à A.

La droite d'Euler, le diamètre de Brocard, la droite qui unit le réciproque de l'orthocentre au centre du cercle de Longchamps, enveloppent une parabole ayant A pour foyer, P_1 pour sommet.

Le pied de la directrice de la parabole de Kiepert se meut sur une cissoïde.

La directrice de la parabole de Artzt qui touche AB, CA en B, C, les axes de l'ellipse de Steiner, enveloppe une parabole ayant A pour foyer, P_2 pour sommet.

Le pied de la directrice de la parabole de Artzt parcourt une cissoïde.

La droite qui unit le point de Lemoine à l'orthocentre enveloppe une parabole ayant pour sommet P_1, le foyer de la conique est le milieu de P_1P_2.

39. On considère les triangles automédians dont le sommet A est fixe, les sommets B, C se meuvent sur une circonférence dont le centre est O_1, le rayon r_1 :

Le point de Steiner et le foyer de la parabole de Kiepert décrivent une circonférence ayant O_1, pour centre, le rayon ρ_1 de cette circonférence vaut $\sqrt{\frac{4r_1^2 - \overline{AO_1}^2}{3}}$, on doit donc avoir $AO_1 < 2r_1$.

Le milieu de BC et le pied de la symédiane issue de A décrivent une circonférence dont le centre O_2 divise AO_1 dans le rapport $\frac{3}{1}$, le rayon de cette circonférence vaut $\frac{3}{4}\rho_1$.

Le centre de gravité et le point de Lemoine se meuvent sur une circonférence dont le centre O_3 est le milieu de AO_1, le rayon vaut $\frac{1}{2}\rho_1$.

Le centre de l'hyperbole de Kiepert parcourt une circonférence dont le centre O_4 divise AO_1 dans le rapport $\frac{1}{3}$, le rayon vaut $\frac{1}{4}\rho_1$. BC enveloppe une conique dont O_1 est un foyer, le centre de la conique est O_2.

La droite d'Euler, le diamètre de Brocard enveloppent une conique ayant A pour foyer, O_3 pour centre.

La directrice de la parabole de Artzt qui touche AB, CA en B, C enveloppe une conique ayant A pour foyer, O_4 pour centre.

La droite GK enveloppe une conique ayant O_4 pour centre, le foyer de la conique divise AO_4 dans le rapport $\frac{2}{1}$.

La droite R_1F enveloppe une conique qui a O_1 pour centre, l'un des foyers est confondu avec un foyer de l'enveloppe de GK.

Le réciproque de l'orthocentre décrit une podaire de conique.

La droite V_2W_2 tourne autour du point qui divise AO_4 dans le rapport $\frac{1}{2}$.

40. Résoudre un triangle automédian dans lequel on donne l'angle de Brocard ω et 1° le côté BC ou le côté CA; 2° la médiane α ou la médiane β; 3° la hauteur issue de A, ou la hauteur issue de B; 4° la symédiane AK_1, ou la tangente AA′ ou cercle ABC; 5° l'une des bissectrices de l'angle A; 6° le rayon R du cercle ABC, ou OG, ou OK ou GK; 7° l'un des rayons des cercles tritangents, ou le périmètre, ou l'aire.

Une hauteur quelconque et une médiane quelconque.

Deux hauteurs. Deux médianes.

La hauteur issue de A et la symédiane AK_1.

La hauteur issue de A et l'une des bissectrices de l'angle A.

Une bissectrice de l'angle A et la médiane AA_1.

Une bissectrice de l'angle A et la symédiane AK_1.

Une médiane quelconque et la symédiane AK_1.

La symédiane issue de B et la médiane issue de A ou de B.

Les symédianes issues des sommets B et C.

La symédiane issue de A et la tangente AA′ au cercle circonscrit à ABC.

Les rayons r et r_1 des cercles tritangents; les rayons r_2 et r_3 des cercles tritangents.

Les axes $2a_1$, $2b_1$ de l'ellipse de Steiner du triangle ABC.

Le rayon du cercle osculateur à l'ellipse de Steiner, au sommet A du triangle et le rayon du cercle ABC; les rayons des cercles osculateurs à l'ellipse de Steiner aux sommets B, C du triangle ABC.

41. Soient M_1, M_2, M_3 les centres des cercles de M′Cay; ρ', ρ'', ρ''' les rayons des mêmes cercles. Le triangle $M_1M_2M_3$ est semblable au triangle automédian ACB; M_1 est le centre du cercle ABC; M_2 est à l'intersection de la médiatrice de CA et de la hauteur issue de C; M_3 se trouve au point de rencontre de la médiatrice de AB et de la hauteur partant de B; les cercles (M_1), (M_2), (M_3) touchent respectivement les

médianes AA_1, CC_1, BB_1; la droite M_2M_3 passe par K_1, le centre du cercle des neuf points du triangle ABC est le milieu de la même droite ; le point de Lemoine du triangle $M_1M_2M_3$ est le centre du cercle de Brocard du triangle ABC ; le foyer de la parabole de Kiepert du triangle $M_1M_2M_3$ est le point de Lemoine du triangle ABC; le point de Steiner de $M_1M_2M_3$ est le milieu de GH ; le réciproque de l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$ est situé sur la droite GF; le centre de l'hyperbole de Kiepert du même triangle est le milieu de OG ; AA_1 est la droite d'Euler du triangle $M_1M_2M_3$; les points G, K, le réciproque de l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$, le point de Steiner du même triangle sont situés sur un cercle concentrique au cercle des neuf points de ABC ; on a

$$2[\rho']^2 = [\rho'']^2 + [\rho''']^2.$$

42. Soient N_1, N_2, N_3 les centres des cercles de Neuberg du triangle automédian ABC ; ρ_1, ρ_2, ρ_3 les rayons des mêmes cercles.

Le triangle $N_1N_2N_3$ est un triangle automédian.

Le centre du cercle ABC est le centre de gravité du triangle N_1BC ; le cercle (N_1) touche la médiane AA_1, on a $\rho_1 = OH$; les droites AN_1, BN_2, CN_3 se coupent en N, orthocentre du triangle BCG ; la droite N_2N_3 est la médiatrice de KR_1, le point de rencontre de N_2N_3, KR_1 divise A_1K_1 dans le rapport $\frac{1}{2}$; le centre de l'hyperbole de Kiepert du triangle $N_1N_2N_3$ est le milieu de ON ; le point de Tarry de ce triangle est l'orthocentre du triangle N_2N_3G ; la droite qui unit le centre de l'hyperbole de Kiepert du triangle ABC au point K et la droite N_1G se coupent au point de Steiner R′ du triangle $N_1N_2N_3$; les points G et F′, foyer de la parabole de Kiepert du triangle $N_1N_2N_3$, sont symétriques par rapport à N_2N_3, il en est de même pour le point R′ et le réciproque H_e' de l'orthocentre du triangle $N_1N_2N_3$; le point de Lemoine du même triangle est le milieu de N_1F' ; les six points K, G, F', R_1, R', H_e' sont situés sur un cercle ayant pour centre le milieu de N_2N_3 ; le centre du cercle des neuf points du triangle ABC, le point K_1 et le milieu de N_2N_3 sont collinéaires ; la droite d'Euler du triangle $N_1N_2N_3$ touche le cercle KGR_1 en G ; on a la relation

$$2\rho_1^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2.$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

17. *Sur un groupe de trois paraboles.* Soit à chercher l'enveloppe d'une droite x qui rencontre les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC en trois points A′, B′, C′ tels que l'un d'eux soit le milieu de la distance des deux autres.

Supposons d'abord que A′ soit le milieu de la distance B′C′. Si l'on donne le point A′, on peut obtenir les points B′, C′ en menant A′D parallèle à AB et rencontrant AC en D, AE parallèle à AC et rencontrant AB en E; alors EC′ = AE, DB′ = AD. Il résulte de là que les points A′, B′, C′ décrivent sur les côtés du triangle ABC des ponctuelles semblables. Par conséquent l'enveloppe de x est une parabole π_a inscrite à ce triangle.

Lorsqu'on place A′ au milieu A_1 de BC ou en C ou en B, x devient respectivement BC, CA, CB; dans le deuxième cas, B′ coïncide avec le symétrique B_1 de A par rapport à C, et dans le troisième cas, C′ coïncide avec le symétrique C_1 de A par rapport à B. Donc π_a touche BC, CA, AB en A_1, B_1, C_1.

AA_1 étant un diamètre, la droite qui va de A au foyer F_a de π_a est la symédiane AK de ABC, et F_a est le point de rencontre de AK avec la circonférence ABC. La directrice d_a de π_a est la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre H de ABC sur le diamètre AA_1.

L'équation cartésienne de π_a est $y^2 = 2p'_a x$, les axes étant le diamètre AA_1 et la tangente BC; la courbe passant par B_1, on voit aisément que $2p'_a = \frac{a^2}{m_a}$. Si $2p_a$ est le paramètre principal et θ l'inclinaison de la tangente BC sur les diamètres, un théorème connu donne

$$2p_a = 2p'_a \sin^2\theta = \frac{a^2 \sin^2\theta}{m_a} = \frac{a^2}{m_a}\left(\frac{2S}{am_a}\right)^2 = \frac{4S^2}{m_a^3}.$$

L'équation barycentrique de π_a est : $\sqrt{2y} + \sqrt{2z} + \sqrt{-x} = 0$.

On peut rattacher la génération de π_a à des propositions plus générales:

1° Si l'on mène CL parallèle à B′C′, on obtient un faisceau harmonique C(C′B′A′L); les rayons variables CC′, CL se correspondent dans deux faisceaux projectifs. On sait qu'étant donnés une ponctuelle projective avec un faisceau de rayons, si par chaque point de la ponctuelle

on mène une parallèle au rayon homologue, cette parallèle enveloppe une parabole.

2° Appelons i la droite de l'infini ; u rencontre les côtés du quadrilatère *bcai* en quatre points harmoniques, etc.

On obtient deux autres paraboles π_b, π_c en supposant que B′ soit le milieu de A′C′ ou C′ le milieu de A′B′.

Les paraboles que nous venons de considérer, sont les transformées par homothétie des paraboles d'Artzt (premier groupe), le centre d'homothétie étant respectivement en A, B, C et le rapport de similitude égal à 2.

Nous ne doutons pas qu'elles n'aient déjà été traitées. (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Notions de Mathématiques par JULES TANNERY. **Notions historiques** par PAUL TANNERY. Classe de Philosophie; certificat de sciences physiques, chimiques et naturelles, etc. Paris, Delagrave, 1903. 352 pages in-12.

Ce livre contient le développement, pour ce qui concerne les mathématiques, des programmes de la classe de Philosophie (Programmes français, du 31 mai 1902). Il n'est pas écrit à la façon des manuels ordinaires, il affecte plutôt la forme d'une série des conférences à la fois attrayantes, instructives et *excitatrices*. Il peut contribuer puissamment à *l'éducation mathématique*, tant de ceux qui se destinent aux sciences physiques, chimiques et naturelles, que de ceux qui ont en vue une instruction mathématique plus complète.

Nous ne saurions mieux indiquer la portée de cet ouvrage qu'en reproduisant le passage suivant de la préface :

« On ne sait un peu ce que sont les mathématiques, on ne soupçonne leur extraordinaire extension; la nature des problèmes qu'elles posent et qu'elles résolvent, que lorsqu'on sait ce que c'est qu'une fonction, comment on étudie une fonction donnée, comment on suit ses variations, comment on représente son allure par une courbe, comment l'algèbre et la géométrie s'aident mutuellement, comment le nombre et l'espace s'éclairent l'un l'autre, comment on détermine une tangente, une aire, un volume, comment on est amené à créer de nouvelles fonctions, de nouvelles courbes, à en étudier les propriétés. Ce sont ces notions et ces méthodes dont on a besoin pour lire les livres techniques où les mathématiques interviennent. Elles sont indispensables à celui qui veut comprendre quelque chose à ce mouvement scientifique qui s'accélère, à ces applications des sciences qui se multiplient, et qui, de jour en jour, tendent à modifier plus profondément notre façon de penser et de vivre »

« Elles sont simples et faciles, quand on les réduit à ce qu'elles ont d'essentiel... Elles doivent, à ce que je crois, pénétrer de plus en plus dans l'enseignement élémentaire pour l'abréger et le fortifier, etc.

Voici le sommaire des matières traitées dans l'ouvrage. *Introduction* (nombres entiers et fractions, vecteurs, grandeurs proportionnelles; calcul algébrique, équations du premier degré; géométrie plane et trigonométrie et géométrie dans l'espace, méthodes de transformation). *Chapitres* 1, 2, 3 Algèbre géométrique, équation du second degré. 4, 5, 6. Géométrie analytique. 7. Tangentes, vitesses, dérivées. 8. Calcul intégral, aires et volumes. 9. Limites, infiniment petits, intégrale définie, séries.

Les notions historiques de M. Paul Tannery présentent également un intérêt tout particulier en ce qu'elles nous font assister à l'évolution successive des idées en mathématiques, au perfectionnement successif des méthodes d'investigation et de l'outillage scientifique. En vingt-cinq pages, l'auteur traite magistralement les questions suivantes : 1. Origines de l'algèbre. 2. Du sens des mots analyse et synthèse chez les Grecs et de leur algèbre géométrique. 3. Quantités positives et négatives. 4. Sur les courbes étudiées par les anciens. 5. Sur l'origine de l'emploi des coordonnées pour la représentation graphique de la variation des phénomènes. 6. Sur les origines du calcul infinitésimal.

L'ouvrage de MM. J. et P. Tannery a sa place marquée dans les bibliothèques des professeurs et des élèves. (J. N.)

Vorlesungen über Algebra von Dr Bauer, o. Professor an der Universität München. Herausgegeben vom mathematischen Verein München. Leipzig, Teubner, 1903 (Vol. cartonné de VI-376 pp. gr. in-8°, avec portrait de l'auteur). Prix : 12 marcs.

Le 18 novembre 1900, l'éminent professeur Bauer, encore en fonctions, a fêté son 80e anniversaire, en pleine vigueur de corps et d'esprit. A cette occasion, il a été l'objet d'une imposante manifestation de sympathie de la part de la Société mathématique de Munich et celle-ci pour honorer le vénérable héros de la fête a offert de publier les leçons qu'il a faites sur l'algèbre à l'Université de Munich de 1870 à 1897. Telle est l'origine du livre que nous annonçons à nos lecteurs.

Voici la table des matières; elle nous dispense d'entrer dans les détails de l'ouvrage qui est écrit avec clarté et méthode.

Section I (pp. 1-105). Propriétés générales des équations algébriques. 1. Introduction. 2 Grandeurs complexes. 3. Propriétés de la fonction entière rationnelle. 4. Propriétés générales d'une équation algébrique. 5. Décomposition des fractions rationnelles. 6. Fonctions symétriques. 7. Elimination. 8. Deux équations à deux variables. 9. Elimination de deux ou plusieurs variables. 10. Discriminant. 11. Transformation des équations.

Section II (pp. 105-199). Résolution algébrique des équations. 12. Equations du 3e et du 4e degré. 13. Equations réciproques. Equations binômes. 14. Racines de l'unité. 15. Impossibilité de la résolution algébrique des équations du 5e degré ou d'un degré supérieur. 16. Equations réductibles ou irréductibles. Théorèmes de Galois. 17. Sur la théorie des nombres. 18. Equations abéliennes. 19. Résolution algébrique des équations binômes.

Section III (pp. 200-256). Résolution numérique des équations. 20. Limites des racines. Racines commensurables. Séparation des racines. Théorèmes de Descartes et de Rolle. 21. Théorèmes de Fourier et de Sturm. 22. Méthodes d'approximation. 23. Racines imaginaires. 24. Méthode de Graeffe.

Section IV (pp. 257-350). Théorie et applications des déterminants. 25. Formation et propriétés des déterminants. 26. Systèmes d'équations linéaires. 27. Propriétés des déterminants (suite). 28. Elimination d'une variable entre deux équations de degrés quelconques. 29. Elimination de plusieurs variables. 30. Théorie du discriminant. 31. Application aux formes quadratiques ou bilinéaires.

Notes. 1. Fractions continues (pp 351 367). 2. Formule de la somme des n^{es} puissances des racines d'une équation biquadratique (pp. 367-373).

L'exécution typographique de l'ouvrage fait honneur à la maison Teubner.

Rechenbuch für die untern Klassen der höheren Lehranstalten. Vorstufe zu den Aufgabensammlungen von Bardey und Müller-Kutnewsky, herausgegeben von Müller und Pietzker. Ausgabe A : für Gymnasien. Leipzig und Berlin, Teubner, 1903 (In-8° de 244 pp. cartonné). Prix : 2 marcs 40.

Excellent recueil d'exercices sur tous les chapitres de l'arithmétique élémentaire, depuis la numération jusqu'aux problèmes sur l'intérêt, l'escompte, etc. Plus de la moitié de ces exercices sont destinés à être traités de vive voix en classe et roulent sur le calcul mental; les autres sont destinés à être résolus par écrit. Les problèmes concrets sont très propres à familiariser les élèves avec une foule de notions empruntées à la vie pratique, à la statistique, à l'histoire, à la physique, etc.

Les professeurs des écoles moyennes ou classes inférieures des athénées ou collèges trouveraient dans le manuel de Müller et Pietzker de précieuses indications et de riches matériaux pour rendre leur enseignement fécond et intéressant. (J. N.)

Cours de mécanique à l'usage des Candidats à l'Ecole polytechnique par Ch. Michel, Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai, Paris, de Rudeval, 1903 (Un volume in-18 de 130 pages). Prix : 3 fr.

Voici comment le prospectus de l'éditeur fait connaître le caractère particulier de ce Cours : « L'auteur s'est proposé de développer, sous le plus petit volume et, en même temps, avec toute la clarté désirable, le nouveau programme de mécanique introduit au concours d'admission à l'Ecole polytechnique. Il a eu soin d'éviter les longueurs et d'écarter les détails oiseux qui souvent encombrent les livres de mécanique. Il lui a paru inutile de donner, pour la résolution d'une question, plusieurs méthodes qui ne sont, presque toujours, que les diverses formes d'une seule et même méthode; il a donné le plus souvent la préférence à la forme analytique comme répondant en général le mieux, à la double nécessité de la simplicité et de la rigueur. »

Dès les premières pages l'auteur suppose connues la géométrie analytique à deux et à trois dimensions, l'analyse infinitésimale et la géométrie vectorielle sans cependant faire de celle-ci un usage étendu. La brièveté de la rédaction nous a paru, par ci et par là, nuire à la clarté. Quoi qu'il en soit, le livre de M. Michel peut être consulté avec fruit par les élèves de nos écoles spéciales

---

Leitfaden der Projektionslehre. Ein Uebungsbuch der construierenden Stereometrie von C. H. Müller und O. Preslen. Ausgabe A : vorzugsweise für Realgymnasien und Oberrealschulen. Leipzig und Berlin, Teubner, 1903 (cartonné; 320 pp. in-8° et 233 figures). Prix : 4 marcs.

Voici un livre que nous recommandons vivement à nos professeurs de géométrie descriptive ou de dessin. Les auteurs se sont inspirés de cette idée que les élèves en passant de l'enseignement moyen à l'enseignement supérieur ne soient pas seulement aptes à comprendre les représentations des corps dans les principaux modes de projection, mais qu'ils puissent exécuter eux-mêmes les dessins y relatifs. Conformément aux programmes prussiens de 1901, ils ont aussi cherché à ouvrir à l'enseignement mathématique un plus riche domaine d'exercices en développant une foule d'applications empruntées à la géométrie solide (représentation raisonnée des figures qui se présentent dans les démonstrations, polyèdres réguliers, etc.), à la minéralogie (rhomboèdre, scalénoèdre, etc.) à la cosmographie (carte terrestre, carte céleste, etc.), à la physique (photomètre, réfraction et polarisation, etc.), etc.

Le manuel est divisé en deux sections : I. Projection oblique. II. Projection normale. Cet ordre des matières est contraire à nos habitudes et paraît, au premier abord, présenter des inconvénients dans un enseignement scientifique; mais les auteurs ont très bien su présenter la projection oblique en premier lieu. Dans la seconde section, ils ont développé avant tout la représentation de figures limitées sans cependant négliger ce qui est relatif aux droites et aux plans illimités; cette partie comprend également une théorie des ombres et une théorie de la projection centrale rattachée à la projection-orthogonale. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 978.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 216.)

Sur deux rayons rectangulaires OA, OB *d'une sphère on donne deux points* C, D *situés à la même distance* $OC = OD = d < \frac{R}{\sqrt{2}}$ *du centre. Les plans menés par ces points perpendiculairement aux rayons* OA, OB *partagent la surface de la sphère en quatre parties. Calculer les aires de ces parties par la géométrie élémentaire.*

Soient A', B' les points diamétralement opposés à A, B; EF, GH les cordes du cercle ABA' perpendiculaires à OA en C, à OB en D (E, G appartiennent au quadrant AB); I le point de rencontre de ces cordes; KL la corde de la sphère perpendiculaire en I au plan AOB.

On a à calculer les aires sphériques projetées en EIG, EIH, GIF, HIF. Il suffira de calculer la première; car en la retranchant de la calotte

projetée en EAF on obtient les aires projetées en EIH, GIF, et en retranchant l'une de celles-ci de la calotte B'HG on obtient la quatrième aire.

Le grand cercle mené par K et L est perpendiculaire au milieu M de l'arc EG. Nous allons calculer l'aire limitée par les arcs de grands cercles KM, ME et par l'arc KE du petit cercle situé dans le plan KIE; elle est le quart de l'aire KELGK. Menons encore le grand cercle AKA'; l'aire KEM est la différence entre les aires AKE, AKM.

Le rayon de la sphère étant pris pour unité de longueur et l'arc AE étant désigné par α, on a $OC = CI = \cos\alpha$, $CE = \sin\alpha$.

L'aire AKE est une partie de la zone AEKF comprise entre deux arcs de grand cercle passant par le pôle A et terminé au cercle de base. Elle est à cette zone comme l'angle sphérique EAK est à quatre droits. Représentons par β l'arc de grand cercle qui mesure l'angle EAK et aussi l'angle KCI; nous aurons

$$IC = CK\cos\beta, \quad \text{d'où} \quad \cos\beta = \cot\alpha,$$

$$\text{aire AKE} = 2\pi \cdot AC\frac{\beta}{2\pi} = (1 - \cos\alpha)\beta.$$

L'aire AKM est celle d'un triangle rectangle formé par trois arcs de grands cercles. Soit γ l'arc de grand cercle qui mesure l'angle sphérique AKM; alors

$$\text{aire AKM} = \tfrac{1}{2}\pi\frac{\beta + \gamma + \frac{1}{2}\pi - \pi}{\frac{1}{2}\pi} = \beta + \gamma - \tfrac{1}{2}\pi.$$

Par conséquent,

$$\text{aire KEM} = \tfrac{1}{2}\pi - \gamma - \beta\cos\alpha.$$

La relation $\cos\beta = \cot\alpha$ donne

$$\beta = \text{arc cos}(\cot\alpha) = \tfrac{1}{2}\pi - \text{arc sin}(\cot\alpha).$$

Du triangle MAK, on déduit

$$\cos\alpha = \cot\beta\cot\gamma = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1 - \cot^2\alpha}}\cot\gamma = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}}\cot\gamma,$$

de sorte que

$$\cot\gamma = \sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}, \quad \cos 2\gamma = \frac{\cot^2\gamma - 1}{\cot^2\gamma + 1} = -\cot^2\alpha,$$

$$2\gamma = \tfrac{1}{2}\pi + \text{arc sin}(\cot^2\alpha).$$

On a donc définitivement

$$\text{aire KEM} = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{3}\pi\cos\alpha + \cos\alpha \arcsin(\cot\alpha) - \tfrac{1}{3}\arcsin(\cot^2\alpha).$$

2. La question 973 nous a été communiquée par M. G. Cesàro, avec une solution par le calcul intégral dont nous modifions un peu la fin.

Prenons pour axes coordonnés OA, OB et la perpendiculaire en O au plan AOB. Au point $N(x, y, z)$ de la sphère qui se projette en P sur le plan xy, le plan tangent fait avec le plan xy un angle $= \frac{\pi}{2} - \text{NOP}$, et l'on a $\sin \text{NOP} = z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Par conséquent, l'aire KEG a pour expression

$$\int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} dx \int_{\cos\alpha}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} dx \left[\arcsin\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]_{\cos\alpha}^{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha) - \int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} \arcsin\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Une intégration par parties donne

$$\int \arcsin\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \arcsin\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{-x^2\cos\alpha\, dx}{(1-x^2)\sqrt{\sin^2\alpha - x^2}}.$$

Remplaçons au numérateur de la dernière fraction $-x^2$ par $(1-x^2) - 1$; la dernière intégrale devient

$$\cos\alpha \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^2\alpha - x^2}} - \int \frac{\cos\alpha \cdot dx}{(1-x^2)\sqrt{\sin^2\alpha - x^2}}. \qquad (1)$$

Le premier terme de (1) a pour valeur $\cos\alpha \arcsin\frac{x}{\sin\alpha}$; le second terme, par la substitution $x = \sin\alpha \sin\varphi$ devient

$$\int \frac{\cos\alpha \cdot d\varphi}{1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi} = \int \frac{\cos\alpha\, d\varphi}{\cos^2\alpha\sin^2\varphi + \cos^2\varphi},$$

et la substitution $\cos\alpha \operatorname{tg}\varphi = z$, le ramène à

$$\operatorname{arc\,tg}(\cos\alpha \operatorname{tg}\varphi) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha - x^2}}\right) = \arcsin\frac{x\cot\alpha}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En introduisant les limites des intégrales on trouve le même résultat que dans la première méthode.

3. En coordonnées semipolaires (r, θ) on a pour l'aire KRM :

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\alpha} d\theta \int_{\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}}^{1} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\alpha} \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\theta}}{\cos\theta}\, d\theta. \qquad (2)$$

Si l'on pose

$$\sin\theta = \sin\alpha \sin\varphi, \quad \text{d'où} \quad d\theta = \frac{\sin\alpha\cos\varphi}{\cos\theta}\, d\varphi,$$

on obtient

$$\int \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\theta}}{\cos\theta}\, d\theta = \int \frac{\sin^2\alpha\cos^2\varphi}{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Remplaçons le numérateur de la dernière fraction par $\sin^2\alpha$ $(1 - \sin^2\varphi)$ ou par $(1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi) - \cos^2\alpha$; cette fraction pourra se ramener à

$$1 - \frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi} = 1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\alpha\sin^2\varphi}$$

$$= 1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}$$

et l'intégration pourra s'achever comme ci-dessus.

4. Les paragraphes précédents étaient déjà rédigés lorsque M. Cesàro nous a rappelé que dans son Mémoire sur l'application du Calcul des probabilités à la Pétrographie (*Mémoires in-4° des membres de l'Académie de Belgique*, t. LIII), il a traité des questions plus générales.

Supposons que dans la figure précédente l'angle AOB soit quelconque et que les distances OC, OD soient inégales; en menant les arcs de grand cercle AK, BK, nous aurons

$$\text{aire KAB} + \text{aire KEG} = \text{aire AKE} + \text{aire BKG}.$$

Les aires AKE, BKG sont des parties de zone comprises entre deux arcs de grands cercles menés du pôle vers le cercle de base (de telles parties pourraient être appelées *secteurs de zone*); l'aire KAB est celle d'un triangle formé par trois arcs de grand cercle. — Ces trois aires peuvent être calculées si l'on se donne l'angle AOB et les distances OC, OD (ou les arcs AE, BG); on pourra donc trouver l'aire KEG.

(J. N.)

Pour les aires sphériques limitées par des arcs de petits cercles, le lecteur peut consulter un article de M. Wasteels, *Mathesis*, (2) II, pp. 105-113.

L'intégrale (3) a été traitée par Catalan, *J. de Liouville*, t. VI, p. 438 et *Cours d'Analyse*, p. 593.

Un abonné nous avait envoyé une solution inexacte de la question 973; l'erreur consistait à considérer l'aire détachée d'une calotte par un plan perpendiculaire à la base comme proportionnelle à l'arc de la circonférence de base qui limite cette portion de la calotte.

Question 1411.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 80).

D'un point donné P *on mène à une parabole trois normales d'angle* φ. *Les tangentes correspondantes forment un triangle, auquel on circonscrit un cercle. Trouver le lieu du centre de ce cercle lorsque l'angle* φ *varie.*

(A. Gob.).

Solution par M. Emmerich. La tangente au point M $(m^2p, 2mp)$ de la parabole $y^2 = 4px$ a pour coefficient angulaire $1 : m$. Si nous posons $\operatorname{tg}\varphi = t$ le coefficient correspondant de la normale MP d'angle φ sera $\dfrac{1+mt}{m-t}$; d'où l'équation de MP

$$Y - 2mp = \frac{(1+mt)(X - m^2p)}{m-t},$$

ou bien

$$m^2tp - m^2p + m(Y - tX + 2tp) - (tY + X) = 0,$$

équation qui détermine les paramètres a, b, c des pieds A′, B′, C′ des normales d'angles φ issues du point P (X, Y). On a

$$(a+b+c)\,tp = p, \quad (bc + ca + ab)\,tp = Y - tX + 2tp.$$
$$abctp = tY + X. \qquad (1)$$

Les tangentes en A′, B′, C′ ayant pour équations

$$x - ay + a^2p = 0, \quad x - by + b^2p = 0, \quad x - cy + c^2p = 0,$$

les coordonnées des sommets du triangle ABC qu'elles forment, sont

$$A : bcp, (b+c)p; \quad B : cap, (c+a)p; \quad C : abp, (a+b)p,$$

et un calcul facile fait connaître les équations des médiatrices :

$$2ax + 2y = p(2a + b + c) + pa^2(b + c), \ldots,$$

puis les coordonnées du centre O du cercle circonscrit :

$$2x = p(bc + ca + ab + 1), \quad 2y = p(a + b + c - abc). \qquad (2)$$

En substituant les valeurs (1), il vient

$$3xt = 3tp + Y - tX, \quad 2yt = p - tY - X; \tag{3}$$

d'où, en éliminant t,

$$(2x - 3p + X)(X - p) + Y(2y + Y) = 0,$$

ou bien

$$[(x - p) + (X - p)]^2 + (y + Y)^2 = (x - p)^2 + y^2.$$

C'est donc la médiatrice de FP', F désignant le foyer et P' le symétrique de P par rapport à F.

Aux normales véritables ($\varphi = 90°$) correspond le point

O_1 : $\quad 2x = 3p - X, \quad 2y = -Y.$

Si $\varphi = 45°$, $t = 1$, les relations (3) donnent le point

O_2 : $\quad 2x = 3p - X + Y. \quad 2y = p - X - Y.$

×Question 1418.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 104.)

Une parallèle à la base BC *d'un triangle* ABC *rencontre* AB *en* B', AC *en* C'. *Déterminer cette droite* B'C' *par la condition que les deux aires* AB'C', B'C'C *engendrent des volumes égaux lorsqu'elles tournent* 1° *autour de* B'C'; 2° *autour de* BC; 3° *autour de la parallèle à* BC *menée par* A.

(J. Neuberg.)

Solution par M. C. J. François. Désignons par x la distance de A à B'C', par h la hauteur du triangle ABC et par a la base BC et soit $B'C' = p$.

1° $\quad \frac{1}{3}\pi x^2 p = \pi a (h - x)^2 - \frac{1}{3}\pi (a - p)(h - x);$

en observant que $p = \frac{ax}{h}$ on trouve

$$x = \tfrac{2}{3}h.$$

2° Soient S et S' les surfaces des triangles ABC et AB'C'. Le volume, engendré par un triangle, tournant autour d'une droite extérieure étant égal au produit de sa surface par la circonférence de cercle parcourue par son centre de gravité, on a

$$\tfrac{1}{3}S \cdot \tfrac{2}{3}\pi h = S' \cdot \tfrac{2}{3}\pi (3h - 2x);$$

observant que $S' = \frac{x^2}{h^2} S$ on trouve

$$x = \tfrac{1}{2}h, \quad \tfrac{1}{2}h(1 + \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}h(1 - \sqrt{3}).$$

Les deux dernières valeurs sont à rejeter, car x ne peut surpasser h ni être négatif.

3° De la même manière on a

$$\tfrac{1}{3}S \cdot 2\pi \cdot \tfrac{2}{3}h = S' \cdot 2\pi \cdot \tfrac{2}{5}x$$

et on trouve $x = h\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Solutions analogues, un peu moins simples, par MM. Audibert, Barisien, Bastin, Lez, Plakhovo, Van Rijn, Weber.

M. Emmerich généralise la question en faisant tourner un trapèze ABCD (bases $BC = a$, $AD = b$) autour d'une parallèle B'C' aux bases.

Si les deux trapèzes ADC'B', B'C'CB en tournant autour de B'C' doivent produire le même volume, l'axe B'C' doit passer par le centre de gravité du trapèze ABCD. Ce résultat, que M. Emmerich établit directement, est une conséquence du théorème de Guldin étendu aux aires traversées par l'axe de révolution : le produit d'une telle aire par la circonférence que décrit le centre de gravité est égal à la différence des deux volumes engendrés respectivement par les deux parties de l'aire qui sont séparées par l'axe.

Si les trapèzes BCC'B', B'C'DA tournent autour de BC et que l'on pose $B'C' = x$, on trouve l'équation

$$f(x) \equiv 4x^3 - 6ax^2 + a^3 + 3ab^2 - 2b^3 = 0, \qquad (1)$$

qui a toujours une solution comprise entre a et b, car $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. M. Emmerich donne une discussion complète de l'équation (1) que le défaut d'espace, nous le regrettons, nous empêche de reproduire.

×Question 1421.

(Voir *Mathesis* (3) III, p. 128.)

On considère la figure formée par un rectangle ABCD *et les trois triangles équilatéraux* BCE, CDF, DAG *construits extérieurement sur les côtés* BC, CD, DA. *Le périmètre de la ligne brisée (non fermée)* BECFDGA *étant donné, quel doit être le rapport* AB : BC *pour que ce périmètre en tournant autour de* AB *engendre une surface maximum?*

Solution par MM. Emmerich et Barisien. Soient $AB = y$, $BC = x$, et désignons par S(PQ) l'aire de la surface engendrée par PQ tournant autour de AB. On a

$$S(BE) + S(GA) = 2 \cdot \tfrac{1}{3}\pi x^2,$$
$$S(EC) + S(DG) = 2 \cdot \tfrac{2}{3}\pi x^2,$$
$$S(CF) + S(FD) = 2(2x + \tfrac{1}{2}y\sqrt{3})\pi y.$$

L'aire totale sera donc

$$\begin{aligned} T &= \pi(4x^2 + 4xy + y^2\sqrt{3}) \\ &= (2x + y)^2\pi + \pi y^2(\sqrt{3} - 1), \end{aligned}$$

expression qui se réduit à

$$T = \pi d^2 + \pi y^2(\sqrt{3} - 1) \qquad (1)$$

si l'on introduit la condition

$$4x + 2y = 2d.$$

On voit ainsi que P croît en même temps que y. Le minimum πd^2 de T a donc lieu si $y = 0$, $x = \frac{1}{2}d$, le maximum si $y = d$, $x = 0$. Le maximum se produit si le triangle équilatéral avec le côté d tourne autour de ce côté; la valeur du maximum est $\pi d^2\sqrt{3}$.

En posant $\pi d^2 = m$, $\pi d^2\sqrt{3} = M$, l'équation (1) peut s'écrire

$$T = m + \frac{y^2}{c^2}(M - m).$$

T étant donné arbitrairement (entre M et m) on a donc

$$y : x = 2\sqrt{T - m} : \sqrt{M - m} - \sqrt{T - m}.$$

Réciproquement, $y : x$ étant donné $= \lambda$, on a

$$T = \frac{4m + 4\lambda m + \lambda^2 M}{4 + 4\lambda + \lambda^2}.$$

Question 1438.

(Voir *Mathesis* (3), III, p. 216).

Soient $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *deux fonctions telles que*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Démontrer que les trajectoires isogonales des courbes satisfaisant à l'équation différentielle

$$dQ = f(P) \cdot dP$$

s'obtiennent par une quadrature. (A. Demoulin.)

Solution par M. E. Cesàro. Pour avoir l'équation différentielle des trajectoires, sous l'angle α, des lignes représentées par l'équation diffé-

rentielle $dQ = f(P)\,dP$, on sait qu'il faut remplacer dx et dy respectivement par

$$\cos\alpha \cdot dx + \sin\alpha \cdot dy, \quad -\sin\alpha \cdot dx + \cos\alpha \cdot dy.$$

En vertu des relations supposées entre les dérivées partielles de P et Q, cela revient à remplacer dP et dQ par

$$\cos\alpha \cdot dP + \sin\alpha \cdot dQ, \quad -\sin\alpha \cdot dP + \cos\alpha \cdot dQ,$$

respectivement. L'équation des trajectoires cherchées est donc

$$Q = \int \frac{\sin\alpha + f(P)\cos\alpha}{\cos\alpha - f(P)\sin\alpha}\,dP.$$

MM. Abramescu (Bucharest), A. Claeys (Gand), Rose (Nivelles) et Janne (Verviers) nous ont envoyé la même solution sous la forme un peu plus développée que voici :

Soit m la tangente de l'angle sous lequel les trajectoires coupent les courbes de la famille donnée. Si α et α' sont les angles que l'axe Ox fait avec les tangentes à une courbe de la famille

$$dQ = f(P) \cdot dP \tag{1}$$

et à une trajectoire, on doit avoir :

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = m \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{\operatorname{tg}\alpha - m}{1 + m\operatorname{tg}\alpha}. \tag{2}$$

L'équation (1) donne

$$\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy = f(P)\left[\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right];$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - f(P)\dfrac{\partial P}{\partial x}}{\dfrac{\partial Q}{\partial y} - f(P)\dfrac{\partial P}{\partial y}};$$

d'autre part, $\operatorname{tg}\alpha' = \dfrac{dy}{dx}$.

En portant ces valeurs de $\operatorname{tg}\alpha$ et $\operatorname{tg}\alpha'$ dans l'équation (2), on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial Q}{\partial x} + f(P)\dfrac{\partial P}{\partial x} - m\dfrac{\partial Q}{\partial y} + mf(P)\dfrac{\partial P}{\partial y}}{\dfrac{\partial Q}{\partial y} - f(P)\dfrac{\partial P}{\partial y} - m\dfrac{\partial Q}{\partial x} + mf(P)\dfrac{\partial P}{\partial x}}.$$

Mais on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x};$$

donc l'équation différentielle des trajectoires isogonales est

$$dQ - f(P)\,dP + m\,dP + m f(P)\,dQ = 0;$$

on les obtient par la quadrature suivante :

$$Q + C = \int \frac{f(P) - m}{1 + m f(P)} dP,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Deuxième solution. Soumettons la figure à la transformation définie par les équations

$$X = P(x, y), \quad Y = Q(x, y). \tag{T}$$

A la famille donnée correspondra la famille définie par l'équation

$$dY = f(X)\,dX.$$

Les trajectoires isogonales de ces courbes s'obtiennent par une quadrature. La transformation (T) conservant les angles, ces trajectoires sont les transformées des trajectoires demandées, lesquelles s'obtiennent dès lors par une quadrature. (A. Demoulin.)

×QUESTIONS D'EXAMEN

1117. Soit ABC un triangle acutangle. On mène les hauteurs BB', CC' de ce triangle ; ensuite les hauteurs B'B'', C'C'' du triangle AB'C' ; puis les hauteurs B''B''', C''C''' du triangle AB''C'', et ainsi de suite. Les orthocentres des triangles ABC, AB'C', AB''C'' ... étant désignés par H, H', H'', ..., on demande les limites des sommes $BC + B'C' + B''C'' + \cdots$, $BB' + B'B'' + B''B''' + \cdots$, $CC' + C'C'' + C''C''' + \cdots$, $BB' + C'C'' + B''B''' + C'''C^{IV} + \cdots$, $HH' + H'H'' + H''H''' + \cdots$

Réponse :

$$2R\cot\tfrac{1}{2}A, \quad c\cot\tfrac{1}{2}A, \quad b\cot\tfrac{1}{2}A.$$

$$2R\,\frac{c + b\cos A}{a}, \quad \frac{R\cos A}{\sin^2\tfrac{1}{2}A}\sqrt{1 + \cos^2 A - 2\cos A\cos(B - C)}.$$

1118. Calculer les trois côtés d'un triangle ABC connaissant 1° la surface engendrée par le côté AB tournant autour de BC ; 2° la surface

engendrée par BC tournant autour de CA; 3° la surface engendrée par le côté CA tournant autour de AB.

(*Baccalauréat, lettres-mathématiques*; PARIS, oct. 1902.)

Équations du problème :

$$ch_a = a_1^2, \quad ah_b = b_1^2, \quad bh_c = c_1^2$$

ou

$$\frac{2Sc}{a} = c_1^2, \quad \frac{2Sa}{b} = b_1^2, \quad \frac{2Sb}{c} = c_1^2; \tag{1}$$

d'où, par multiplication, $S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a_1^2 b_1^2 c_1^2}$.

De deux des égalités (1) on tire b et c en fonctions a et on substitue les valeurs dans

$$4S = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

1119. Résoudre l'équation

$$\frac{x^2\sqrt{2}+2}{8x^2} = \frac{x-\sqrt{2}}{x^3-\sqrt{2}}.$$

(LANCIA.)

En rendant l'équation entière, on trouve

$$x^2(x-2\sqrt{2})^2 = 2;$$

extrayant les racines carrées des deux membres et résolvant l'équation résultante, on obtient $x = \sqrt{2} \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$.

1120. Quelles relations doit-il exister entre les coefficients de l'équation

$$a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7 = 0$$

pour qu'elle admette deux couples de racines égales et de signes contraires? (GATTI.)

Le premier membre doit être de la forme

$$(a_0x^3 + bx^2 + cx + d)(x^4 - \lambda x^2 + \mu).$$

En identifiant et éliminant entre les sept égalités de condition les indéterminées b, c, d, λ, μ on trouve

$$(a_0a_7 - a_1a_6)(a_0a_5 - a_1a_4) = (a_0a_3 - a_1a_2)(a_2a_7 - a_3a_6) = 0.$$

1121. Marquer sur la droite AB un point C tel que la tangente commune aux deux circonférences décrites sur les segments AC, CB comme diamètre ait une longueur donnée l.

Si x, y sont les segments AC, CB, on a $x + y = AB$, $xy = l^2$.

1122. Résoudre et discuter le système

$$\frac{y-3x-4}{x+2y-3} = \frac{4y-4x}{3x+5y-2} = t,$$

dans lequel x et y désignent les inconnues et t un nombre donné, négatif ou positif. (*Ecole Navale*, 1903.)

1122. Partager un triangle ABC en deux parties équivalentes par la transversale la plus courte possible. (*J. de Vuibert.*)

Si la transversale cherchée coupe AB en X, AC en Y et que l'on fasse $AX = x$, $AY = y$, $XY = z$, on a

$$xy = \frac{1}{2}bc, \quad z^2 = (x-y)^2 + 4xy\sin^2\frac{1}{2}A.$$

Le minimum de z^2 correspond à $x = y = \sqrt{\frac{1}{2}bc}$ et est égal à $2bc\sin^2\frac{1}{2}A = 2S\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}A$; la transversale doit être placée dans le plus petit des angles A, B, C. Supposons $a < b < c$; il faut encore que XY tombe à l'intérieur du triangle ABC, ce qui exige $x <$ ou $= b$, condition qui revient à $c <$ ou $= 2b$ et est toujours remplie; car, de $c < a + b$, $a < b$, on déduit $c < 2b$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1443. Trouver l'enveloppe d'une circonférence dont le centre décrit un limaçon de Pascal et qui passe constamment par le pôle de cette courbe. Cas particulier de la cardioïde. (E. N. Barisien.)

1444. Soient (S) et (S_1) deux surfaces rapportées à trois axes rectangulaires. Une droite mobile, parallèle à l'axe de z, les rencontre aux points M et M_1. 1° Déterminer tous les couples de surfaces pour lesquels les normales en M et M_1 se rencontrent. 2° Parmi les couples précédents, déterminer ceux pour lesquels les normales en M et M_1 se rencontrent dans le plan des xy. 3° Parmi les couples définis au 2° déterminer ceux pour lesquels le segment MM_1 est vu de l'origine des coordonnées sous un angle droit. (A. Demoulin.)

1445. D'un point M donné sur une ellipse on abaisse des perpendiculaires sur deux diamètres conjugués quelconques. Démontrer que la droite joignant les pieds de ces perpendiculaires passe par un point fixe M', et trouver le lieu décrit par M' lorsque M parcourt l'ellipse donnée.

1446. Etant donné un cercle O, on considère une tangente fixe u et une tangente mobile v. Le diamètre passant par le point de contact de v rencontre u en un point par lequel on mène la tangente w (autre que u). Trouver le lieu du point de rencontre des droites v et w.

(de Rocquigny.)

SUR L'HYPERBOLE DE FEUERBACH,

par M. le Dr H. A. W. Speckman (Arnhem).

1. Soient I le centre, r le rayon et α, β, γ les points de contact avec les côtés du cercle inscrit au triangle ABC.

Prenons sur les droites $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ ou sur leurs prolongements au-delà de I trois distances égales IQ_a, IQ_b, IQ_c; nous les désignons par nr, n étant positif dans le premier cas, négatif dans le second. Les droites AQ_a, BQ_b, CQ_c concourent en un même point Q; lorsque n varie, Q décrit l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC et passant par I. Cette courbe ayant pour centre le point de contact du cercle inscrit et du cercle des neuf points, a reçu le nom d'*hyperbole de Feuerbach*; elle a été étudiée par M. Lemoine (*A. F.*, Paris, 1889, p. 203), par M. Boutin (*J. M. S.*, 1890, pp. 104 et 124), et MM. Mandart et Neuberg (*Mathesis*, (2), III, p. 81-89 et (2), IV, p. 241).

L'objet principal de la présente note est l'étude de certaines involutions sur l'hyperbole ABCI, dans le sens des recherches de M. M'Cay sur l'hyperbole de Kiepert (*Mathesis*, (1), VII, p. 208).

Pour plus de clarté nous reviendrons quelquefois sur des notions déjà connues.

2. Appelons x, y, z les coordonnées normales d'un point par rapport au triangle ABC. En projetant les coordonnées y, z de Q_a sur $I\beta$, $I\gamma$ on trouve qu'elles sont égales à $r(1 + n\cos C)$, $r(1 + n\cos B)$, de sorte que l'équation de la droite AQ_a est

$$y(1 + n\cos B) = z(1 + n\cos C).$$

En écrivant encore les équations des droites BQ_b, CQ_c on voit facilement que les lignes AQ_a, BQ_b, CQ_c concourent en un point Q dont les coordonnées sont, à un même facteur près,

$$(1 + n\cos A)^{-1}, \quad (1 + n\cos B)^{-1}, \quad (1 + n\cos C)^{-1}; \qquad (1)$$

le lieu de ce point a pour équation

$$\frac{\cos B - \cos C}{x} + \frac{\cos C - \cos A}{y} + \frac{\cos A - \cos B}{z} = 0. \qquad (2)$$

La même conique est la transformée par inversion triangulaire de la droite IO.

3. Considérons maintenant deux points Q, Q' de cette hyperbole,

correspondant aux points (Q_a, Q_b, Q_c), (Q'_a, Q'_b, Q'_c) des droites $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ et aux valeurs $\varkappa$, $\varkappa'$ du *paramètre* $\varkappa$.

L'équation de la droite QQ′ est

$$\Sigma (1 + \varkappa \cos A)(1 + \varkappa' \cos A)(\cos B - \cos C)\alpha = 0, \tag{3}$$

ou

$$\lambda \varkappa\varkappa' + \mu(\varkappa + \varkappa') + \nu = 0, \tag{4}$$

après avoir posé

$$\lambda = \Sigma \cos^2 A (\cos B - \cos C)\alpha,$$
$$\mu = \Sigma \cos A (\cos B - \cos C)\alpha,$$
$$\nu = \Sigma (\cos B - \cos C)\alpha.$$

Si cette droite passe par un point fixe Q″ (α, β, γ), λ, μ, ν deviennent des constantes et la forme de la relation (4) indique (fait connu) que les couples de points $Q_aQ'_a$, $Q_bQ'_b$, $Q_cQ'_c$ appartiennent à trois involutions sur les supports $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$. Réciproquement, lorsque ces couples appartiennent à des involutions, la droite QQ′ passe par un point fixe.

Supposons d'abord la relation (4) de la forme $\varkappa\varkappa' = -k$, c'est-à-dire $\mu = 0$, $\nu = k\lambda$; le point Q″ est donc situé sur les deux droites

$$\Sigma \cos A (\cos B - \cos C)\alpha = 0, \tag{5}$$
$$\Sigma (1 - k \cos^2 A)(\cos B - \cos C)\alpha = 0. \tag{6}$$

La droite (5) ne dépend pas de k; c'est la droite HI, les coordonnées des points H et I étant $\left(\frac{1}{\cos A}, \frac{1}{\cos B}, \frac{1}{\cos C}\right)$, (1, 1, 1). Les coordonnées du point Q″ peuvent donc être représentées par

$$\frac{1}{\cos A} + \varkappa'', \quad \frac{1}{\cos B} + \varkappa'', \quad \frac{1}{\cos C} + \varkappa''; \tag{7}$$

en les substituant dans l'équation (6), on trouve

$$\varkappa'' = \frac{1}{k \cos A \cos B \cos C},$$

ou en remplaçant k par $\varkappa\varkappa'$

$$\varkappa\varkappa'\varkappa'' = \frac{-1}{\cos A \cos B \cos C}. \tag{8}$$

La relation (8) caractérise trois points collinéaires Q, Q′, Q″ dont les deux premiers sont arbitraires sur l'hyperbole et dont le troisième est situé sur HI.

4. Avant de passer aux conséquences de la formule (8), il peut être

utile de rappeler quelques points remarquables de l'hyperbole de Feuerbach.

Si l'on fait $n = 1$, Q devient le point de Gergonne Γ, situé à l'intersection des droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$.

L'hypothèse $n = -1$ fait coïncider Q_a, Q_b, Q_c avec les points diamétralement opposés à α, β, γ sur le cercle inscrit; Q se confond alors avec le point de Nagel ν, l'anticomplémentaire de I.

L'hypothèse $n = 2$ donne pour Q_a, Q_b, Q_c les symétriques de I par rapport à BC, CA, AB; appelons σ_2 le point correspondant Q.

Si l'on fait $n = -2$, on obtient pour Q un point σ'_2 (le point R de Fuhrmann; voir *Mathesis*, (1), X, pp. 105-111); σ'_2 est situé sur la circonférence (I, $2r$) et sur la droite IO_2, c'est donc le symétrique de I par rapport au point de contact du cercle inscrit à ABC avec le cercle des neuf points.

Portons sur $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ à partir de I une longueur égale au rayon R du cercle ABC et joignons les extrémités respectivement à A, B, C; le point correspondant Q sera désigné par σ_n. En portant la longueur R à partir de I dans le sens opposé, on obtient un point Q que nous désignons par σ'_n. Ce point est le quatrième point commun à l'hyperbole ABCHI et au cercle ABC (voir *Mathesis*, (2), III, n° 6, où ce point est représenté par V); les points ν, O, σ'_n sont en ligne droite.

5. Cela posé, si dans la formule (8) on fait $n' = n$, la valeur correspondante de n'' fixe le point de rencontre de la tangente en Q à l'hyperbole avec la droite HI. Ce point de rencontre étant le même pour les valeurs $+n$ et $-n$ du paramètre, on a le théorème suivant :

Un cercle quelconque de centre I *coupe* $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ *en* Q_a, Q_b, Q_c *et les prolongements de ces droites au-delà de* I *en* Q'_a, Q'_b, Q'_c. *Les tangentes à l'hyperbole de Feuerbach aux points de rencontre* Q, Q' *des droites* (AQ_a, BQ_b, CQ_c), (AQ'_a, BQ'_b, CQ'_c) *concourent sur la droite* HI.

La corde QQ' *passe par un point fixe* ψ, *pôle de la droite* HI.

Cette dernière propriété résulte de la théorie des pôles et polaires. On la déduit aussi de ce que les points Q, Q' vérifient la relation $n + n' = 0$, cas particulier de l'égalité (4) pour $\lambda = 0$, $\nu = 0$. Les équations $\lambda = 0$, $\nu = 0$ représentent deux droites se coupant en ψ; comme elles sont vérifiées respectivement par les coordonnées de H et de I, elles représentent les tangentes $H\psi$, $I\psi$. La droite $\nu = 0$ passe aussi par le centre O du cercle ABC, de sorte que l'hyperbole touche IO en I.

En particulier, les cordes $\Gamma\nu$, $\sigma_2\sigma'_{-2}$, $\sigma_R\sigma'_{-R}$ concourent en ψ et les deux tangentes menées aux extrémités de ces cordes se coupent sur HI.

Des équations $\lambda = 0$, $\nu = 0$, on déduit les coordonnées de ψ :

$$\cos B + \cos C, \quad \cos C + \cos B, \quad \cos A + \cos B.$$

Ce point a été signalé par M. Boutin (voir *J. M. S.* et *Mathesis*, loc. cit.).

6. L'involution $nn' = -2$ admet les solutions $n = 1$, $n' = -2$ et $n = -1$, $n' = 2$; donc les droites $\Gamma\sigma'_2$ et $\nu\sigma_2$ se coupent sur HI. On verrait de même $\Gamma\sigma_2$ et $\nu\sigma'_2$ concourent sur HI.

L'involution $nn' = -\dfrac{2R}{r}$ donne

$$n'' = \frac{r}{2R \cos A \cos B \cos C};$$

elle est vérifiée par $n = 2$, $n' = -\dfrac{R}{r}$ et par $n = -2$, $n' = \dfrac{R}{r}$, et le point Q'' a pour coordonnées

$$r + 2R \cos B \cos C, \quad r + 2R \cos C \cos A, \quad r + 2R \cos A \cos B.$$

Il résulte de là que les cordes $\sigma_2\sigma R'$, $\sigma'_2\sigma R$ se coupent au milieu de HI.

7. Si l'égalité (4) a la forme

$$\frac{nn' + 1}{n + n'} = k, \tag{9}$$

on a $\lambda = \nu$, $\mu + k\nu = 0$. L'équation $\lambda = \nu$ est

$$\Sigma (1 - \cos^2 A)\ (\cos B - \cos C)\ x = 0; \tag{10}$$

elle est vérifiée par les coordonnées des points Γ et ν, qui sont

$$(1 + \cos A)^{-1}, \quad \cdots; \quad (1 - \cos A)^{-1}, \quad \cdots$$

Donc les cordes QQ' dont les extrémités vérifient la relation (9), passent par un même point Q''' de la droite $\Gamma\nu$.

Des équations $\lambda - \nu = 0$, $\mu + k\nu = 0$, on déduit les coordonnées de Q''' :

$$\begin{aligned} &1 + k(\cos B + \cos C) + \cos B \cos C, \\ &1 + k(\cos C + \cos A) + \cos C \cos A, \quad \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Remplaçons k par $-n'''$ et appelons n''' le *paramètre* du point Q'''; la relation (9) prendra la forme symétrique

$$nn' + nn''' + n'n''' = -1. \tag{12}$$

Si l'on y fait $n''' = \infty$, elle se réduit à $n + n' = 0$ et les expressions (11) sont remplacées par $\cos B + \cos C$, $\cos C + \cos A$, $\cos A + \cos B$; on retrouve ainsi la propriété que le point ψ est situé $\Gamma\nu$.

Si l'on fait $n''' = 0$, l'égalité (12) se réduit à $nn' = -1$ et admet la solution $n = 1$, $n' = -1$; ce qui montre que les coordonnées des points d'intersection de $\Gamma\nu$ avec HI ont pour valeurs

$$1 + \cos B \cos C, \quad 1 + \cos C \cos A, \quad 1 + \cos A \cos B.$$

Enfin, si l'on suppose

$$n''' = \frac{1 + \Sigma \cos A \cos B}{\Sigma \cos A + \cos A \cos B \cos C}, \text{ ou } n''' = \frac{\Sigma \cos A + \cos A \cos B \cos C}{1 + \Sigma \cos A \cos B},$$

on obtient pour les coordonnées de Q''' :

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A}, \frac{\cos B}{\sin^2 B}, \frac{\cos C}{\sin^2 C}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sin^2 A}, \frac{1}{\sin^2 B}, \frac{1}{\sin^2 C};$$

Q''' est alors respectivement le réciproque de H ou de I.

8. Réduisons la relation (4) à $n + n' = k$, ou en posant $k = -n^{IV}$, à

$$n + n' + n^{IV} = 0; \tag{13}$$

nous aurons alors

$$\lambda = 0, \quad \mu n^{IV} + \nu = 0. \tag{14}$$

Les cordes QQ' passent maintenant par un même point Q^{IV} de la droite $H\psi$ ($\lambda = 0$). Des équations (14) on déduit les coordonnées de Q^{IV} :

$$n^{IV} \cos B \cos C + (\cos B + \cos C), \quad n^{IV} \cos C \cos A + (\cos C + \cos A), \tag{15}$$

Voici quelques cas particuliers de la relation (13) :

1° $n^{IV} = 0$, $n + n' = 0$. Les cordes QQ', comme on l'a déjà vu, passent par ψ.

2° $n^{IV} = -1$, avec $n = 1$, $n' = 0$ ou avec $n = 2$, $n' = -1$. Les droites ΓI et $\sigma_2\nu$ se coupent sur $H\psi$.

3° $n^{IV} = 1$, avec $n = -1$, $n' = 0$ ou avec $n = -2$, $n' = 1$. Les droites $I\nu$ et $\sigma'_2\Gamma$ se coupent sur $H\psi$.

4° $n^{IV} = -2$, avec $n = n' = 1$ ou avec $n = 2$, $n' = 0$. La tangente en Γ et la droite $I\sigma_2$ concourent en un point de $H\psi$.

5° $n^{IV} = 2$, avec $n = n' = -1$ ou avec $n = -2$, $n' = 0$. La tangente en ν et $I\sigma'_2$ concourent sur $H\psi$.

9. La droite qui joint ψ au milieu M de HI est le diamètre conjugué

avec HI; elle contient donc le centre de l'hyperbole. Les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles des lignes ψM et HI. Le centre coïncide avec le point de contact du cercle inscrit et du cercle des neuf points; il est au milieu de la distance $I\sigma'_2$.

NOTES MATHÉMATIQUES.

18. *Sur le quadrilatère complet.* Soit ABCD un quadrilatère complet, AD et BC se rencontrant en E, DC et AB en F. Appelons H_1 l'orthocentre de EDC, H_2 celui de EAB, G le milieu de AC, I celui de BD et K celui de AD; démontrons que H_1H_2 est perpendiculaire à GI. Les distances EH_1, EH_2 sont doubles des distances des centres O_1, O_2 des cercles CED, AEB respectivement aux milieux L_1, L_2 des côtés CD, AB; mais les angles L_1O_1D, L_2O_2A étant égaux à l'angle CED, on a

$$\frac{EH_1}{EH_2} = \frac{O_1L_1}{O_2L_2} = \frac{DL_1}{AL_2} = \frac{KG}{KI}.$$

Il résulte de là que les triangles EH_1H_2, KGI ont deux côtés perpendiculaires et proportionnels; donc ils sont semblables et les troisièmes côtés H_1H_2, GI sont également perpendiculaires.

On prouverait de la même manière que la droite joignant deux orthocentres quelconques est perpendiculaire à la droite joignant les milieux des trois diagonales du quadrilatère complet.

(D'après C. A. Cikot, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1903, p. 62).

19. *Sur un système d'équations.* Un abonné nous demande la résolution du système d'équations

$$\begin{aligned}(a_1x + b_1y + c_1z - 1)^2 &= r_1^2(x^2 + y^2 + z^2),\\ (a_2x + b_2y + c_2z - 1)^2 &= r_2^2(x^2 + y^2 + z^2),\\ (a_3x + b_3y + c_3z - 1)^2 &= r_3^2(x^2 + y^2 + z^2).\end{aligned}$$

En posant $x^2 + y^2 + z^2 = u^2$ et en convenant que r_1, r_2, r_3 désignent des quantités positives ou négatives, on peut écrire

$$a_1x + b_1y + c_1z = 1 + r_1u, \quad a_2x + b_2y + c_2z = 1 + r_2u,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 1 + r_3u.$$

De ce nouveau système on peut tirer les valeurs de x, y, z en fonction de u :

$$x = \frac{|1\ b_1\ c_1| + u\,|r_1\ b_1\ c_1|}{|a_1\ b_1\ c_1|}, \quad y = \frac{|a_1\ 1\ c_1| + u\ a_1\ r_1\ c_1|}{|a_1\ b_1\ c_1|}, \text{ etc.};$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = u^2$, on obtient une équation du second degré en u.

Géométriquement, la question revient à déterminer l'équation d'un plan qui touche trois sphères données dont les centres ont pour coordonnées (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), et dont les rayons sont r_1, r_2, r_3. Cette interprétation géométrique suggère l'idée de chercher l'équation du couple de deux plans tangents touchant les trois sphères de la même manière. (J. N.)

20. *Théorèmes sur les nombres figurés.* 1° En partageant la progression arithmétique

$$1, \quad r+1, \quad \ldots$$

en groupes successifs comprenant respectivement

$$1, \quad 2^1, \quad 2^2, \quad \ldots \text{ termes},$$

on trouvera que la somme des termes du $n^{ième}$ groupe est

$$S = \frac{3r \cdot 2^{n-2} - (3r-2) \cdot 2^{n-1}}{2},$$

ce qui est le $(2^{n-1})^{ième}$ nombre polygone de $(3r+2)$ côtés.

Si $r = 1$, $S = \dfrac{3 \cdot 2^{2n-2} - 2^{n-1}}{2} =$ pentagone.

Si $r = 2$, $S =$ octogone, etc.

2° On partage la progression arithmétique

$$1, \quad r+1, \quad \ldots$$

en groupes consécutifs respectivement composés de

$$1, \quad 3^1, \quad 3^2, \quad \ldots \text{ termes}.$$

La somme des termes du $n^{ième}$ groupe est

$$S = 3^{n-1} \cdot [3^{n-1} \cdot r - (r-1)]$$

et l'on reconnaît immédiatement que S est le $(3^{n-1})^{ième}$ nombre polygone de $2(r+1)$ côtés.

Si l'on suppose, par exemple, $r = 1$

$$S = (3^{n-1})^2$$

et l'on retrouve une proposition déjà énoncée (*Mathesis*, T. XV, 1895, p. 58, quest. 14).

Si $r = 2$, S est un nombre hexagone, etc. (DE ROCQUIGNY.)

BIBLIOGRAPHIE.

Sur la philosophie des mathématiques, par J. Richard, docteur ès-sciences mathématiques, professeur au lycée de Dijon. Paris, Gauthier-Villars, (250 pages in-18). Prix : 3 fr. 25.

Sommaire. *Première partie.* **La Logique.** *Règles de la logique.* Le raisonnement ne consiste pas en syllogismes. Notions de rang, de nombre entier. — *Puissance du raisonnement.* Comment il permet de tirer des axiomes des propositions vraiment nouvelles.

Deuxième partie. **Principes de la géométrie.** Rôle de l'intuition. *Le postulatum d'Euclide* : Historique. Tentatives infructueuses de démonstration. Impossibilité d'une démonstration.

Troisième partie. **Questions diverses.** *L'infini.* Ensembles dénombrables et non dénombrables. Si une proposition est démontrable, on peut trouver la démonstration par un nombre de tâtonnements fini, mais si grand, peut-être, que l'imagination la plus puissante ne peut s'en faire l'idée. Suites sans loi. — *Le Continu.* Paradoxe de Zénon. Autres paradoxes. — *Les trois dimensions de l'espace. L'univers, la matière, l'éther.* Considérations sur l'infinité de l'univers. Si l'univers est infini, les mêmes événements se répètent une infinité de fois. Considérations sur la matière et l'éther. *Sur la notion de temps.*

Quatrième partie. **Sur diverses sciences.** *Calcul des probabilités.* Principes. Exemple de conséquences fausses auxquelles peuvent conduire les démonstrations par statistiques. Problème curieux. — Sur les jeux du hasard. *Aperçu général sur la géométrie actuelle. Sur les principes de la mécanique. Sur les lois physiques. Applications des mathématiques.* Chapitre étendu sur les diverses applications. — *Rôle de la science dans l'enseignement.*

Note I. La géométrie dite projective établie sans faire usage de la notion de distance. **Note II.** Sur la notion de Groupe. Sur les notions premières. Sur la classification des sciences.

Petit livre excellent, écrit sans prétention, avec bon sens et réflexion, et qui fait réfléchir. Les lecteurs les plus instruits y apprendront quelque chose. Il est digne d'être mis à côté de l'ouvrage analogue de Poincaré : *La science et l'hypothèse.*

Nous notons çà et là quelques petites inexactitudes historiques : Le postulat attribué à Euclide est un cas particulier du vrai postulat 5 d'Euclide. J. Bolyai n'a pas été en correspondance avec Gauss et n'est pas « russe ». La première publication de Lobatchefsky a précédé et non suivi celle de J. Bolyai (p. 72). L'axiome d'Archimède n'est pas d'Archimède, mais d'Eudoxe (p. 100). Le théorème attribué à Kœnigs (p. 176 et p. 201) est dû à Kempe. La jolie solution du problème de l'aiguille (p. 159) n'est pas de Bertrand, mais de M. Barbier, d'après Bertrand lui-même. — Nous doutons qu'on puisse établir la géométrie projective, sans la notion de distance comme le dit l'auteur (p. 216), parce que l'on a besoin de cette notion dans l'étude des points fictifs ou idéaux dont il est question dans la note de cette page. Pareille géométrie d'ailleurs ne serait plus qu'un assemblage de numéros, n'ayant rien de commun avec l'espace. Enfin nous ne voudrions pas signer toutes les remarques de l'auteur sur le syllogisme. La correction typographique de l'ouvrage laisse un peu à désirer. (P. M.).

Principes de Géométrie, par E. Delsol. Paris, Naud, 1903 (96 p. in-12 carré).

Introduction. 1. Du nombre. 2. De l'espace. 3. Théorie des parallèles et des tangentes. 4. Application du calcul à la géométrie. 5. Postulatum d'Euclide. 6. La géométrie d'Euclide est la seule possible *a priori*. 7. Appendice. Réponse à quelques objections tirées des géométries non euclidiennes.

L'auteur, qui ne connaît pas suffisamment les géométries non euclidiennes, essaie de démontrer que la géométrie d'Euclide est seule possible à priori, au moyen d'un raisonnement faux qui se trouve à la page 50. En appliquant ce raisonnement aux rayons vecteurs de la courbe qui a pour équation en coordonnées polaires

$$r = 1 + \mathrm{E}\left[\frac{\theta - \theta\,\mathrm{E}\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)}{\pi}\right]$$

où θ varie de 0 à 2π (E signifie *le plus grand entier contenu dans*), on prouverait que le faisceau de ceux de ses rayons vecteurs qui sont égaux à 1 (de 0 inclusivement à π exclusivement), et le faisceau de ceux qui sont égaux à 2 (de π inclusivement à 2π exclusivement) doivent être séparés l'un de l'autre par un rayon qui n'est égal ni à 1, ni à 2, ce qui est absurde. (P. M.)

Essai philosophique sur les géométries non euclidiennes, par L.-J. Delaporte. Paris, A. Naud, 1903 (in-8° de 143 pages). Prix : 5 fr.

Cet opuscule a été écrit et imprimé hâtivement, car on y trouve de grosses erreurs relatives aux mathématiques classiques (pp. 30, 31, 68, 69, 89, 91, 98, 103). L'auteur ne connaît pas les travaux les plus profonds relatifs aux principes de la géométrie non euclidienne, savoir ceux de Lobatchefsky, de De Tilly, de Barbarin, de Hilbert, et des géomètres italiens. Par suite, il a confondu la géométrie non euclidienne avec son interprétation euclidienne sur la sphère ou la pseudosphère et n'a rien compris (comme il l'avoue, p. 62) à la géométrie non euclidienne à trois dimensions. Son erreur fondamentale, c'est de croire que l'intuition ou même les expériences les plus précises puissent démontrer les postulats de la géométrie euclidienne.

Cet essai est donc sans valeur, non seulement au point de vue mathématique, mais aussi au point de vue philosophique.

Nous avons cru devoir le dire pour que les philosophes non géomètres — il y en a toujours beaucoup, malgré l'antique exhortation de Platon — ne s'imaginent pas que cet ouvrage puisse les initier à la géométrie non euclidienne : ils pourraient le penser après l'accueil qui lui a été fait dans des revues philosophiques justement estimées. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 257.

(Voir *Mathesis*, (1), IV, p. 159).

Dans le développement de

$$\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots\right)^m,$$

le coefficient de x^p est

$$\frac{S_{m+n-1,\,p}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+p)},$$

$S_{n,p}$ désignant la somme des produits p à p des n premiers nombres entiers. (E. Cesàro).

Soit

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_px^p+\cdots$$

le développement; nous pourrons écrire

$$\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^m=A_0x^m+A_1x^{m+1}+\cdots+A_px^{m+p}+\cdots$$

Si l'on suppose $x<1$, la *série* $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$ a pour valeur $-l(1-x)$; par conséquent, A_p est le coefficient de x^{m+p} dans le développement en série de $(-1)^m l^m(1-x)$ par la formule de Maclaurin.

Représentons par $f(x)$ cette dernière quantité; nous aurons

$$A_p=\frac{1}{1\cdot 2\cdots(m+p)}f^{(m+p)}(0).$$

Pour calculer aisément les dérivées de $f(x)$, nous suivons la méthode indiquée dans les *Exercices sur le calcul infinitésimal* par Tisserand (p. 39).

Faisons $u=l(1-x)$, $y=(-1)^m u^m$ et désignons par y', y'', $\cdots$ les dérivées successives de y par rapport à x, et par y_1, y_2, $\cdots$ les dérivées de y par rapport à u. En observant que $u'=-(1-x)^{-1}$, nous aurons

$$\begin{aligned}
y' &= y_1u'=-(1-x)^{-1}y_1,\\
y'' &= -(1-x)^{-2}y_1-(1-x)^{-1}y_2u'=(1-x)^{-2}(y_2-y_1),\\
y''' &= 2(1-x)^{-3}(y_2-y_1)+(1-x)^{-2}(y_2-y_1)u'\\
&= -(1-x)^{-3}[y_2-3y_2+2y_1].
\end{aligned}$$

Si l'on convient de traiter les indices de y comme des exposants, ces égalités prennent la forme

$$\begin{aligned} y' &= -(1-x)^{-1}y_1, \\ y'' &= (1-x)^{-2}y_1(y_1-1), \\ y''' &= -(1-x)^{-3}y_1(y_1-1)(y_1-2). \end{aligned}$$

Nous sommes donc conduits à poser

$$y^{(n)} = (-1)^n(1-x)^{-n}Y_n, \qquad (1)$$

Y_n désignant le produit *symbolique*

$$y_1(y_1-1)(y_1-2)\cdots(y_1-n+1),$$

où après avoir effectué les multiplications on remplace y_1^p par y_p ou par $\frac{d^py}{dx^p}$.

Pour montrer que l'égalité (1) est générale, dérivons-en les deux membres par rapport à x ; il vient

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= (-1)^n n(1-x)^{-n-1}Y_n + (-1)^n(1-x)^{-n}\frac{dY_n}{dx}x' \\ &= (-1)^n(1-x)^{-n-1}\left(nY_n - \frac{dY_n}{dx}\right). \end{aligned}$$

Or, dans notre notation symbolique,

$$\frac{dY_n}{dx} = y_1^2(y_1-1)(y_1-2)\cdots(y_1-n+1);$$

car dériver Y_n par rapport à x revient à majorer d'une unité les indices de y dans le *produit effectué* Y_n. Donc

$$\begin{aligned} nY_n - \frac{dY_n}{dx} &= ny_1(y_1-1)\cdots(y_1-n+1) - y_1^2(y_1-1)\cdots(y_1-n+1 \\ &= -y_1(y_1-1)\cdots(y_1-n+1)(y_1-n), \end{aligned}$$

et

$$y^{(n+1)} = (-1)^{n+1}(1-x)^{-n-1}y_1(y_1-1)\cdots(y_1-n).$$

D'après cela,

$$f^{(m+p)}(x) = (-1)^{m+p}(1-x)^{-m-p}y_1(y_1-1)\cdots(y_1-m-p+1).$$

Pour simplifier l'écriture écrivons S_n au lieu de $S_{m+p-1,n}$. Alors, le produit symbolique $y_1(y_1-1)\cdots(y_1-m-p+1)$ a pour expression

$$y_{m+p} - S_1y_{m+p-1} + S_2y_{m+p-2} - \cdots + (-1)^pS_py_m\cdots$$

Remarquons maintenant que

$$y_1 = (-1)^m m x^{m-1}, \quad y_2 = (-1)^m m(m-1)x^{m-2}, \quad \cdots,$$
$$y_m = (-1)^m m!, \quad y_{m+1} = y_{m+2} = \cdots = 0.$$

Les dérivées $y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$ sont également nulles pour $x = 0$; par suite

$$f^{(m+p)}(0) = (-1)^{m+p}(-1)^{m+p} S_p \cdot m! \cdot = S_p \cdot m! \cdot,$$

$$A_p = \frac{S_p}{m(m+1)\cdots(m+p)}. \qquad \text{(J. N.)}$$

La même question a été résolue par M. Verniory à l'aide d'un procédé plus compliqué.

×Question 1279.

(Voir *Mathesis*, (3), II, p. 184 et III, p. 98).

Trouver sur les côtés AB, BC *d'un triangle* ABC *des points* C', A' *tels que* $\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC}$, $CC' = AA'$.

Plus généralement, *soit à trouver sur les côtés* BC, B'C' *de deux triangles donnés* ABC, A'B'C' *des points* D, D' *tels que* $\frac{BD}{DC} = \frac{B'D'}{D'C'}$, $AD = \lambda . A'D'$.

Sur BC construisons le triangle A_1BC semblable à A'B'C'; alors $A_1D : A'D' = a : a'$. Le problème est ramené à trouver sur BC un point M dont les distances aux deux points A et A_1 soient dans le rapport $\frac{\lambda a'}{a}$. On divisera donc la droite AA_1 additivement et soustractivement dans ce rapport, et la circonférence qui a pour diamètre la distance des deux points de division coupera BC en deux points qui donnent chacun une solution du problème.

Si l'on fait $BD : DC = x : y$ et qu'on suppose $\lambda = 1$, on trouve l'équation

$$(b^2 - b'^2)x^2 + [b' - b'^2 + c^2 - c'^2 - (a^2 - a'^2)]xy + (c^2 - c'^2)y^2 = 0.$$

Comparez Schröter, *Theorie der Oberflächen 2ter Ordnung*, pp. 414-418.

(J. N.).

Question 1284.

(Voir *Mathesis*, (3), II, p. 216).

Démontrer, par des considérations purement géométriques, que les centres isodynamiques d'un triangle et les foyers de la plus grande ellipse inscrite sont situés sur une même circonférence, et que les tangentes menées à celle-ci par les deux premiers points concourent sur le grand axe de l'ellipse. (E. Cesàro).

Solution par M. Emmerich. Soient M le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité, O, O′ les centres isogones et Q, Q′ les centres isodynamiques du triangle donné. On sait que les triples (G, O, Q′), (G, Q, O′) sont collinéaires, de sorte que OQ est parallèle à Q′O′; l'axe focal de l'ellipse de Steiner est alors la bissectrice intérieure de l'angle $OGO' \equiv Q'GQ$, et l'excentricité résulte de

$$\overline{GF}^2 = \overline{GF'}^2 = GO.GO' = GQ.GQ'.$$

En écrivant

$$GQ : GF = GF : GQ', \quad GQ : GF' = GF' : GQ',$$

on voit que les triangles GQF et GFQ′, de même que GQF′ et GF′Q′, sont semblables. On a donc *angle* $GFQ = GQ'F$, $GF'Q = GQ'F'$, puis par addition

$$\textit{angle}\ GFQ + GF'Q, \quad \text{ou} \quad 2^{\text{dr.}} - FQF' = FQ'F',$$

ce qui démontre que le quadrilatère FQF′Q′ est inscriptible. Comme

$$FQ : FQ' = GQ : GF = GQ : GF' = F'Q : F'Q',$$

il s'agit d'un quadrilatère harmonique dans lequel les diagonales sont des symédianes des quatre triangles traversés. En effet, en abaissant les perpendiculaires FH, FH′ sur F′Q, F′Q′ respectivement, on tire des triangles semblables $FH : FH' = FQ : FQ' = F'Q : F'Q'$. Par conséquent F′F est une symédiane du triangle F′QQ′ et passe par le point d'intersection T des tangentes menées en Q, Q′ au cercle circonscrit.

Remarque. Q et Q′ étant des points inverses par rapport au cercle de Brocard du triangle ABC, on conclut que TM est la polaire du point de Lemoine K par rapport au cercle FQF′Q′.

Question 1406.

(Voir *Mathesis*, (3) III, p. 40.)

On joint le foyer F ***d'une conique à un point quelconque*** M ***de la courbe et, par l'autre foyer*** F′, ***on mène une parallèle à*** FM. ***Trouver le lieu des point de rencontre*** N ***de cette parallèle avec la tangente ou avec la normale au point*** M. (G. Andrien.)

Solution géométrique par E. Weber (Liège). Considérons d'abord une ellipse. Soit NMT la tangente au point M de la courbe. Les parallèles FM et F′N nous donnent l'égalité des angles FMT et F′NT. Comme *angle* FMT = *angle* F′MN, le triangle MF′N est isoscèle. Le rayon vecteur F′M est égal à F′N. Prolongeons NF′ jusqu'à son intersection P avec l'ellipse. On voit facilement que F′P = FM. Exprimant que la somme des rayons vecteurs FM, F′M est constante et égale à $2a$, on a

$$NF' + F'P = PN = 2a.$$

Le point N décrit donc une conchoïde du foyer F′ de l'ellipse, la longueur constante étant $2a$ et portée vers F′.

Traçons la normale en M, et cherchons le lieu du point N′, intersection de cette normale avec F′N. On voit tout de suite, que le triangle MF′N′ est isoscèle et que

$$F'N' = F'N.$$

Le point N′ décrit donc une conchoïde d'ellipse symétrique, par rapport au foyer F′, de celle que décrit le point N.

Quand la conique considérée est une hyperbole, les points N et N′ décrivent des conchoïdes d'hyperbole symétriques l'une de l'autre, par rapport au foyer F′.

Remarques. I. Les extrémités du grand axe (ou de l'axe transverse) appartiennent au lieu.

II. Le cercle principal (podaire) de l'ellipse ou de l'hyperbole considérée passe par les milieux des segments, tels que MN.

III. Dans le cas de la parabole, le lieu dégénère en l'axe de la courbe. En effet, le rayon vecteur, mené à la courbe du foyer à l'infini F, est parallèle à l'axe de la parabole.

M. Barisien trouve également que les courbes cherchées sont des conchoïdes et indique leurs équations en coordonnées polaires :

$$\rho = 2a - \frac{p}{1 - e\cos\omega}, \quad \rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega} - 2a. \tag{1}$$

Ces courbes, dans le cas d'une ellipse, ont pour aire $4\pi a^2 - 8\pi ab$.

M. Audibert donne aussi les équations (1).

M. Emmerich met l'équation de la courbe (N) sous la forme

$$\rho = \frac{a^2 + c^2 + 2ac\cos\omega}{a + c\cos\omega},$$

et en donne une seconde démonstration : si O est le centre, L le milieu de MN, D la projection de L sur F'N, on a $D'O = a$, $\overline{LF'}^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos\omega$, $DF' = a + c\cos\omega$,

$$F'N = \frac{\overline{LF'}^2}{F'D}.$$

Le lieu (N) rapporté aux axes principaux de la conique a pour équation

$$a^2(x^2 + y^2 - c^2)^2 = (a^2 - cx)^2[(x + c)^2 + y^2].$$

M. Rose cherche les équations des lieux (N), (N') en coordonnées rectangulaires.

M. Lez trouve les mêmes équations et en fait une discussion soignée ; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de reproduire cette solution accompagnée de figures.

×QUESTIONS D'EXAMEN

1124. On considère l'équation du second degré en x

$$x^2 - 6x + 5 + z(x^2 - 5x + 6) = 0. \tag{1}$$

Quelles sont les valeurs de z pour lesquelles les racines de cette équation sont égales? On désignera ces valeurs par z_1 et z_2 ; par x_1 la valeur commune des racines de (1) pour $z = z_1$, et par x_2 leur valeur commune pour $z = z_2$.

Soient maintenant x' et x'' les racines de (1) pour une valeur quelconque z, distincte de z_1 et de z_2 ; on demande de calculer la valeur de l'expression $\dfrac{(x' - x_1)(x'' - x_2)}{(x' - x_2)(x'' - x_1)}$ et de vérifier que cette valeur ne dépend pas de z. (*École Navale*, 1903.)

Si l'on considère les valeurs de x comme les abscisses des points d'une droite, les deux racines de (1) qui correspondent à une même valeur de z définissent un couple de points; tous les couples qu'on obtient en faisant varier z appar-

tiennent à une involution qui a pour points doubles les points qui correspondent à z égal à z_1 et à z_2. Le segment des points doubles est divisé harmoniquement par deux points homologues quelconques; c'est la vérification analytique de cette propriété qui fait le fond de la question ci-dessus.

1125. Construire un triangle ABC connaissant les pieds des hauteurs issues des sommets B, C et sachant que ces sommets se trouvent sur une droite donnée.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***1447.** La somme des nombres respectivement figurés par 1999, 199, 99, 89 et 7 n'est un carré parfait dans aucun système de numération. (La base du système est supposée égale ou supérieure à 9, et le symbole 9 a sa valeur usuelle du système décimal.) (PAULMIER.)

1448. Trouver le poids d'un onglet ellipsoïdal compris entre les plans $z = 0$, $y = 0$, $y = x \operatorname{tang} \beta$, et la surface

$$1 = x^2 + y^2 + l^2 + 2 \cos\alpha \cos\gamma xz$$

la densité en chaque point étant égale à

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\alpha - y^2 - z^2 \sin^2\gamma}}$$

Les coordonnées sont rectangulaires. (GAUSS.)

***1449.** Démontrer la relation suivante entre les angles A, B, C d'un triangle :

$$\begin{aligned}&(\sin B \sin C - 2\cos A)(\sin A \sin C - 2\cos B)\sin C\\ &+ (\sin A \sin C - 2\cos B)(\sin A \sin B - 2\cos C)\sin A\\ &+ (\sin A \sin B - 2\cos C)(\sin B \sin C - 2\cos A)\sin B\\ &= \sin A \sin B \sin C.\end{aligned}$$

(E. N. BARISIEN.)

1450. Soient $a_1, a_2, \ldots a_p$ les racines, supposées inégales de l'équation

$$F(x) \equiv A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p = 0.$$

Former l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction

$$y = C_1(x - a_1)^m + C_2(x - a_2)^m + \ldots + C_p(x - a_p)^m,$$

où $C_1, C_2, \ldots C_p$ sont des constantes arbitraires.

Cas particulier de $F(x) \equiv x^p - 1$. (BOUTIN.)

TABLE DES MATIÈRES(*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Sur un nouveau système de numération 92
×Théorème sur les nombres figurés; par M. de Rocquigny 271
×Question 1398; solution par M. G. Verheugen 78
Question 1385; solutions par MM. Emmerich, Plakhovo. 118
Question 1402; solution par M. Prange 213

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Théorie purement analytique des fonctions circulaires d'après Seidel (P M.) 81, 109, 129
×Question d'algèbre. 92
×Piège 133
×Fonctions hyperboliques et trigonométrie lobatchefskienne (P. M.). . . . 241
×Sur un système d'équations (J. N.). 270
×Question 1359; solution par M. Emmerich 24
×Question 1372; solution par M. Emmerich 25
×Question 1383; solutions par MM. Cristesco, Audibert, etc. 29
×Question 1377; solution par MM. Emmerich, Rius y Casas, etc. . . . 96
×Question 1413; solution par M. Emmerich 181
×Question 1428; solution par M. Emmerich, Dalle, etc. 237
Question 857; solution par M. J. Neuberg 274

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE; MÉTAGÉOMÉTRIE.

Généralisation d'un théorème de Ed. Lucas; par M. A. Demoulin . . . 16
Prix académiques 59
Deux théorèmes sur la droite d'Euler; par J. Neuberg. 60
Problème de géométrie; par M. Lauvernay 61
Sur une nouvelle définition du point de Lemoine; par M. Barisien . . . 112

(*) Rectifications, pp. 56, 80, 184.

Les articles marqués d'une croix n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.

Exercices de mathématiques élémentaires; par MM. Barisien et Weber . 131
Sur le quadrilatère inscrit dans un cercle; par M. Barisien 162
Sur la droite de Simson; d'après M. V. Hioux 167
Sur les triangles automédians; par M. J. Déprez 196, 226, 245
Géométrie des êtres plans; par M. De Tilly 217
Sur le quadrilatère complet; d'après M. A. Cikot 270
Question 1387; solutions par MM. P. Bastin, Déprez, etc. 32, 134
Question 1368; solutions par MM. P. Bastin, Emmerich, etc. 50
Question 1316; solution par M. Emmerich 69
Question 1373; solutions par MM. Emmerich, P. Bastin 94
Question 1377; solution par M. Emmerich. 97
Question 1379; solutions par MM. J. Neuberg et Déprez 98
Question 1395; solution par MM. Bastin, Déprez, etc. 100
Question 1392; solutions par MM. Rose, Déprez, etc. 120
Question 1399, solution par M. Bastin. 146
Question 1405; solution par MM. Bastin, Emmerich, etc. 178
Question 1391; solutions par MM. Bastin, Emmerich, etc. 205
Question 986; solution par MM. Déprez et Emmerich. 232
Question 973; solutions par MM. J. Neuberg et G. Césaro 253
Question 1418; solution par M. François 258
Question 1421; solution par MM. Emmerich et Barisien 259
Question 1379; solution par M. J. Neuberg 276

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Notes de géométrie; par M. H. Van Aubel 22
Relations entre deux systèmes d'axes; par M. C. Servais. 41
La construction de Nicollic pour le problème de Halley; par M. G. Fontené 42
Sur les asymptotes des coniques; par M. Ad. Mineur 44
Géométrie du triangle; par M. J. Déprez 64
Notes de géométrie; par M. L. Casteels 84
Sur le centre de courbure des coniques; par M. J. Rose 89
Sur les couples de triangles homologiques dont les sommets sont situés sur six droites données; par M. J. Neuberg 105
Construction du centre de courbure de la parabole; par MM. Barisien, Rose, Servais. 112, 165
Sur le complexe des axes d'une quadrique; par M. Servais 185
Exercices de géométrie analytique; par M. E. Barisien 193
Sur les triangles automédians; par M. J. Déprez 196, 226, 245
Métaparallélisme et orthologie (J. N.). 200
Sur un groupe de trois paraboles (J. N.) 249
Sur l'hyperbole de Feuerbach; par M. Speckman 265
Question 1389; solution par MM. Verheugen, Andrien, etc. 38
Question 1390; solution par M. Cl. Servais 53

Pages.

Question 1382; solution par M. Stuyvaert. 74
Question 1397; solution par M. Audibert 125
Question 1404; solution par M. Barisien 149
Question 1363; solution par M. J. Déprez. 168
Question 1370 (nouvelle); solution par M. P. Bastin 171
Question 742; solution par un anonyme 230
Question 1033; solution par M. Emmerich 235
Question 1411; solution par M. Emmerich 257
Question 1384; solution par M. Emmerich 277

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Une leçon sur les cubiques gauches; par M. Stuyvaert. 5
Sur la définition générale des asymptotes (P. M.) 46
La courbe horoptère; par M. Stuyvaert 153
Question 1380; solution par MM. Bastin et Emmerich. 26
Question 1388; solution par M. R. Van Cauwenberghe 86
Question 1376; solution par M. Déprez 71
Question 1381; solution par M. P. Thonet 72
Question 1382; solution par M. Stuyvaert 73
Question 1360; solutions par MM. Rose et Demoulin 93, 138
Question 1396; solution par M. Déprez 101
Question 1394; solution par MM. Emmerich et Bastin. 123
Question 1386; solution par MM. Emmerich et Déprez 144
Question 1403; solution par M. P. Thonet. 174
Question 1352; solution par M. J. Rose 204
Question 1406; solution par M. E. Weber. 278

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Note sur quelques séries; par M. A. Boutin 57
Intégration d'une équation différentielle du deuxième ordre; par G. Pirondini 91
Démonstration du théorème de J. Bernoulli. Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités; par M. P. Mansion . . . Supplément pp. 1-24
Question 1140; solution par M. Couvert 202
Question 882; solution par M. Hacken 230
Question 1437; solution par M. E. Cesáro. 238
Question 1438; solution par MM. E. Cesáro, Rose, etc. 260

BIBLIOGRAPHIE.

R. Fricke. Diff. und Integral. Rechnung (J. N.) 19
M. Stuyvaert. Surfaces algébriques (Cl. S.) 20
Annuaire du bureau des longitudes. 21

Pages.

E. Estanave. Nomenclature des thèses 21
Abhandlungen zur Geschichte der math. Wiss. 47
E. Gelin. Résolution des problèmes. — Problèmes. 47
O. Stolz u. Gmeiner. Arithmetik 48
R. Bettazzi. Aritmetica. 48
A. Capelli. Aritmetica 48
G. Peano. Aritmetica e Algebra. 48
P. Bachmann. Zahlentheorie. 48
E. Netto. Combinatorik. 48
E. Bardey. Algebraische Aufgaben 49
Schuster. Trigonometrie. Aufgaben 49
J. Neuberg. Algèbre supérieure 49
C. Alasia. Recente geometria 69
C. Alasia. Complementi di geometria 87
Veronese e Gazzaniga. Geometria. 87
A. Faifofer. Géométrie 87
H. Mandart. Trigonométrie (M. Stuyvaert) 87, 195
J. Pionchon. Grandeurs géométriques. 87
Appell et Chappuis. Mécanique 87, 113
G. Loria. Spezielle ebene Kurven 88, 116
C. Guichard. Géométrie. Compléments (J. N.) 136
E. Pascal. Calcolo infinitesimale (P. M.). 137
G. Vivanti. Complementi di matematica (P. M.) 137
L. Kiepert. Differential Rechnung 138
Ch. de la Vallée Poussin. Analyse infinitésimale. 138
F. Klein. Principen der D. u. I. Rechnung 138
Godefroy. Séries 196
Ed. Fouet. Fonctions analytiques 196
J. et P. Tannery. Notions de mathématiques (J. N.) 250
Bauer. Algebra. 251
Müller u. Pietzker. Rechenbuch. 252
Ch. Michel. Mécanique 252
Müller et Pressler. Projektionslehre (J. N.) 258
J. Richard. Philosophie des mathématiques (P. M.) 272
E. Delsol. Principes de géométrie (P. M.) 273
L.-J. Delaporte. Géométries non euclidiennes (P. M.) 273

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 1078-1081, 1082-1087, 1088-1096, 1097-1104, 1105-1109, 1110-1116, 1117-1123, 1124-1125 : pages 54, 79, 101, 126, 183, 214, 262, 279.
École polytechnique de Paris. Concours d'admission en 1903. 151
Question de géométrie analytique. Concours général de 1903, Belgique . 289

SUPPLÉMENT.

Démonstration du théorème de Jacques Bernoulli; Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités; par P. Mansion. page 1-24

QUESTIONS.

Solutions de questions posées dans les deux premières séries.

357	(1) IV 15	274	
742	(2) I 240	230	
883	(2) III 240	230	
973	(2) IV 216	253	
986	263	232	
1033	(2) V 215	235	
1140	(2) VII 237	202	

Questions résolues et non résolues des tomes I, II et III de la troisième série.

NR = Non résolue.

Tome I

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1311	88	NR	1338	240	NR
1313	88	NR	×1339	240	
×1316	112	69	1344	264	
1335	215				

Tome II

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1352	32	204	1382	184	74
1357	56		×1383	216	29
×1359	56	24	1384	216	277
1360	56	93, 138	1385	216	118
1363	80	168	1386	216	144
1365	104	NR	1387	216	32, 134
×1368	104	50	1388	216	36
1370 (nouvelle)	240	171	1389	240	38
1371	128	NR	1390	240	53
×1372	128	25	×1391	240	205
×1373	152	94	×1392	240	120
1374	152		1393	264	
×1375	152	96	1394	264	123
1376	152	71	×1395	264	100
×1377	184	97	×1396	264	101
1378	184	NR	1397	280	125
×1379	184	98, 276	1398	280	78
1380	184	26	1399	280	146
1381	184	72	1400	280	NR

Tome III

	POSÉE	RÉSOLUE
1401	40	
×1402	40	218
1403	40	174
1404	40	149
×1405	40	178
1406	40	278
1407	56	
1408	56	
1409	56	
×1410	56	
1411	80	257
×1412	80	
×1413	80	181
1414	80	
1415 = 1393	104	
1415bis	128	
1416	104	
1417	104	
×1418	104	258
1419	128	
1420	128	
×1421	128	259
1422	128	
×1423	152	237
1424	152	
1425	152	
1426	152	
1427	184	
1428	184	
1429	184	
×1430	184	
1431	215	
1432	216	
1433	216	
×1434	216	
1435	216	
×1436	216	
1437	216	238
1438	216	260
1439	240	
1440	240	
1441	240	
×1442	240	
1443	264	
1444	264	
1445	264	
1446	264	
×1447	280	NR
1448	280	NR
×1449	280	NR
1450	280	NR

Questions des deux premières séries résolues, mais non publiées.

(I-X) 95, 353, 597. (XI-XX) 892bis, 953, 1046, 1057, 1079, 1087, 1101, 1107, 1177, 1275, 1287.

Questions non résolues des deux premières séries.

(I-X) 513, 598. (XI-XX). 778, 825, 876, 905, 1133, 1147, 1179, 1220, 1225, 1228, 1233, 1240, 1246, 1247, 1271, 1297.

TABLE DES NOMS.

(Cette table ne renferme pas tous les noms cités dans les comptes-rendus d'ouvrages).

Abramescu, 261.
Alasia, 69, 87.
Andrien, 38, 40, 53, 56, 216, 278.
Anonyme, 280.
Apollonius, 89.
Appell, 88, 113.
Audibert, 31, 125, 158, 259, 279.
Bachmann, 48.
Bardey, 49, 127, 252.
Barisien, 38, 54, 56, 72, 79, 80, 92, 101, 112, 122, 132, 146, 149, 152, 162, 168, 178, 182, 193, 202, 214, 215, 216, 240, 257, 264, 279, 280.
Bastin, 27, 32, 38, 51, 71, 72, 94, 97, 100, 101, 123, 143, 151, 171, 178, 205, 259.
Bauer, 251.
Bertrand (J.), 272.

Bettazzi, 48.
Biddle, 126.
Björnø, 47.
Bolyai, 272.
Bopp, 47.
Bosmans, S. J., 116.
Boutin, 57, 128, 144, 265, 280.
Brocard, 96, 104, 118, 198, 201, 227, 240.
Buysens, 158.
C (A.), 134, 173, 240.
Cadenat, 92.
Candido, 102.
Canon, 39.
Capelli, 48.
Caronnet, 177.
Casteels, 84.
Catalan, 57, 257.
Cay (M'), 265,
Chappuis, 88, 113.
Chasles, 15, 18, 227.
Cesàro (E.), 96, 204, 230, 238, 26), 274, 277.
Cesàro (G), 255.
Cikot, 270.
Claeys, 39, 239, 261.
Clebsch, 15.
Collette, 93, 138, 143.
Couvert, 29, 101, 128, 202.
Cremona, 15.
Cristesco (V.), 29, 32, 104, 134.
Dalle, 38, 237.
Degueldre, 166.
Delahaye, 33, 88, 100.
Delambre, 237.
Delaporte, 273.
Delsol, 273.
Demoulin, 16, 40, 139, 152, 174, 178, 216, 238, 240, 260, 262, 264.
Déprez, 22, 27, 29, 33, 38, 52, 64, 71, 96, 99, 100, 101, 104, 120, 123, 144, 169, 196, 205, 215, 226, 232, 245.
Desprets, 237.
De Tilly, 217.
Drach, 15.
Droz Farny, 237.
Duran Loriga, 201.
Emmerich, 24, 25, 27, 32, 33, 38, 50, 69, 78, 94, 97, 100, 101, 118, 120, 123, 144, 146, 178, 181, 205, 232, 235, 237, 238, 257, 259, 277, 279.
Estanave, 21.
Euclide, 60, 218, 227.
Faifofer, 87.
Feuerbach, 202, 265.
Fontené, 42.
Fouet, 196.
François, 38, 258.
Frégier, 198.
Fricke, 19.
Fuhrmann, 50, 265.
Gascó, 241.
Gatti, 263.
Gauss, 280.
Gelin, 47.
Gmeiner, 48.
Gob, 40, 56, 80, 128, 140, 149, 257.
Godefroy, 196.
Greenstreet, 230.
Guichard, 136.
Hacken, 230.
Halley, 42.
Haton de la Goupillière, 57.
Haussner, 237.
Helmholtz, 153.
Hervey, 61.
Hioux, 268.
Hire (De la), 42.
Housel, 43.
Janne, 261.
Jerabeck, 158.
Joachimesco, 126.
Joachimsthal, 192.
Kempe, 273.
Klepert, 138, 198, 227, 285.
Klein (F.), 20, 138, 153
Kœnigs, 185, 272.
Laisant, 230.
Lancia, 263.
Lauvernay, 61.
Leboucq, 38.
Legendre, 219.
Lemoine, 59, 68, 100, 112, 198, 217.
Lez, 31, 94, 100, 101, 122, 238, 257.
Lindemann, 15.
Lobatchefsky, 218, 272.
Longchamps (G. de), 226.
Loria (Gino), 88, 116.
Lucas, 16, 57.
Ludwig, 153.
Mac-Alister-Loup, 120.
Mac-Leod, 127.
Malengreau, 32, 38, 74.
Mandart, 78, 87, 195, 214, 265.
Mansion, 47, 84, 112, 131, 137, 204, 217, 245, 272, 278.
Massau, 36.
Michel, 252.
Mineur, 44.
Mirea (St. N.), 40, 54, 184.
Moebius, 5.
Müller (C. H.), 253.
Müller (Conradt), 138.
Müller-Kutnewsky, 252.
Netto, 48.
Neuberg, 20, 36, 40, 49, 52, 53, 56, 61, 68, 69, 74, 80, 99, 103, 104, 105, 136, 137, 146, 149, 151, 152, 167, 174, 178, 184, 193, 201, 205, 216, 250, 251, 252, 253, 256, 258, 265, 276.

Newton, 42.
Nicollic, 42.
Ocagne (d'), 59.
Ots, 180, 182.
Pascal (E.), 137,
Pasquier, 116.
Paulmier, 118, 128, 280.
Peano, 48.
Pesci, 152, 237.
Petit-Bois, 36.
Pietzker, 49, 127, 252.
Pionchon, 87.
Pirondini, 91.
Plakhovo, 100, 119, 120, 182, 238, 259.
Poincaré, 272.
Popovici, 216.
Prange, 32, 182, 213,
Presler, 253.
Retali, 71.
Reye, 16, 21, 185.
Richard, 272.
Riemann, 196.
Ripert, 97, 171.
Rius y Casas, 31, 97.
Rocquigny (de), 113, 264, 271.
Rose, 32, 38, 54, 71, 74, 89, 93, 99, 101, 120, 151, 168, 204, 239, 261.
Salmon, 15.
Sauerbeck, 47.
Savary, 231.
Scheffers. 176.
Schröter, 15, 276.
Schur, 153.
Seidel, 81, 109.
Servais, 15, 21, 23, 41, 53, 168, 171, 185,
Simson, 167, 199.
Sondat, 52.
Soons, 71, 94.
Speckman, 265.
Staudt (von), 15.
Steiner, 158, 199, 226.
Stolz, 48.
Sturm (R.), 15, 21.
Stuyvaert, 5, 20, 74, 105, 153, 184. 195.
Suter, 47.
Tannery (J.), 138, 250.
Tannery (P.), 250.
Tarry, 199, 217.
Thonet, 72, 174.
Thiry, 120.
Tisserand, 274.
Tucker, 100, 232, 235.
Vallée-Poussin (de la), 138.
Van Aubel (H.), 22, 201.
Van Cauwenberghe, 36.
Van Rijn, 237, 259.
Verheugen, 32, 38, 78, 97, 151.
Verniory, 276.
Veronese, 87.
Vivanti, 137.
Wasteels, 256.
Weber (Emile), 138, 180, 259.
Weierstrass, 196.
Zeeman Gz., 60.

DÉMONSTRATION

DU

THÉORÈME DE JACQUES BERNOULLI

PAR

P. MANSION
Professeur à l'Université de Gand

THÉORÈME. *La somme* P *des valeurs de* $T_m = C_\mu^m p^m q^m$, *où* m *est compris entre* $\mu p - \mu l$, $\mu p + \mu l$, μ *étant égal à* $m + n$ *et au moins égal à dix,* p *et* q *des quantités positives telles que* $p + q = 1$, $p \leqslant q$, *l'inférieur ou égal à* $\frac{1}{2}q$, $\mu \geqslant \frac{1}{q^2}$, *est supérieure à*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2}\, dt - \frac{3}{\sqrt{2\pi\mu pq}}, \qquad T = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}},$$

et a l'unité pour limite quand μ *croît indéfiniment* (*).

(*) Nous avons publié une esquisse de la présente démonstration dans les Akten des fünften internationalen Kongresses katholischer Gelehrten zu München von 24. bis 28. september 1900 (München, 1901, Herder und Co.) pp. 427 et 428. Laplace (*Théorie analytique des probabilités*, Livre II, n° 16, pp. 275-284 de la troisième édition) donne des limites plus rapprochées que les nôtres, mais il n'a pas vraiment évalué les termes qu'il néglige. Il se contente de dire (p. 279) : « Il serait facile, par l'analyse précédente, d'avoir égard aux termes de l'ordre $\frac{1}{n}$ et des ordres supérieurs ». En réalité, ce n'est pas du tout facile.

1. *Formules analytiques employées dans la démonstration.* I. Si α est une quantité positive inférieure à l'unité, on a

$$(1) \qquad \log(1+\alpha) = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \cdots,$$

$$(2) \qquad -\log(1-\alpha) = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^4}{4} + \cdots,$$

On déduit de (1), (2),

$$(3) \qquad \log(1+\alpha) > \alpha - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}(1-\alpha) > \frac{\alpha}{2},$$

$$(4) \qquad -\log(1-\alpha) < \alpha + \frac{\alpha^2}{2}(1+\alpha+\alpha^2+\cdots) = \alpha + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}.$$

Enfin, quel que soit α, θ étant compris entre 0 et 1,

$$(5) \qquad e^{-\alpha} = 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2} e^{-\theta\alpha} > 1 - \alpha.$$

II. Si N est un nombre entier, on a, d'après la formule de Stirling, sous sa forme élémentaire,

$$(6) \qquad 1.2.3\ldots N > \sqrt{2\pi N}\ N^N e^{-N},$$

$$(7) \qquad 1.2.3\ldots N < \sqrt{2\pi N}\ N^N e^{-N+\frac{1}{12N}}.$$

III. En faisant $t^2 = z$, on trouve aisément que

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-t^2} t^4\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{3}{2}}\, dz = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}.$$

IV. Si z_x est une fonction de x décroissante depuis $x = 0$ jusque $x = N + 1$, N étant entier, on a évidemment

$$(9) \qquad z_0 + z_1 + \cdots + z_N > \int_0^{N+1} z_x\, dx.$$

V. Enfin, puisque $q \leqslant \frac{1}{2}$, $\mu \leqslant \frac{1}{q^2}$, $p \leqslant q$, on a

$$\mu q \leqslant \frac{1}{q} \leqslant 2, \qquad \mu p \leqslant \mu q \leqslant 2, \tag{10}$$

même sans supposer μ au moins égal à 10.

2. *On a*

$$T_m > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\left[1 - \frac{1}{6\mu\,pq}\right] t_m, \quad \text{si} \quad t_m = \left(\frac{m}{\mu p}\right)^{-m-\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\mu q}\right)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

En effet, d'après les inégalités (6) et (7),

$$C_\mu^m = \frac{1.2.\dots\mu}{1.2.\dots m.\,1.2.\dots n} > \frac{\sqrt{2\pi\,\mu}\,\mu^\mu e^{-\mu}}{\sqrt{2\pi\,m}\,m^m e^{-m}\sqrt{2\pi\,n}\,n^n e^{-n}.e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}},$$

ou

$$C_\mu^m > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu}} \frac{1}{\left(\frac{m}{\mu}\right)^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{\mu}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\mu}{12mn}}}.$$

Par suite,

$$T_m = C_\mu^m p^m q^n > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}} \frac{1}{\left(\frac{m}{\mu p}\right)^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{\mu q}\right)^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\mu}{12mn}}.$$

Mais, d'après (5), on a

$$e^{-\frac{\mu}{12mn}} > 1 - \frac{\mu}{12mn}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$T_m > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\left(1 - \frac{\mu}{12mn}\right) t_m.$$

Le produit mn des deux quantités m et n, dont la somme est la constante μ, est d'autant plus petit que $m - n$ ou $n - m$ est plus grand. La valeur la plus petite de mn correspondra donc à l'une ou l'autre des valeurs extrêmes que peuvent prendre m et n, savoir, au plus, $\mu p + \mu l$, $\mu p - \mu l$ pour m, $\mu q - \mu l$, $\mu q + \mu l$ pour n. Or

$$(\mu p + \mu l)\ (\mu q - \mu l) = \mu^2\ [pq - (p - q)\ l - l^2],$$

$$(\mu p - \mu l)\ (\mu q + \mu l) = \mu^2\ [pq + (p - q)\ l - l^2].$$

Le produit $12mn$ est donc égal ou supérieur à

$$12\ (\mu p + \mu l)\ (\mu q - \mu l) = 12\mu^2\ (p + l)\ (q - l).$$

Le produit $12\ (p + l)\ (q - l)$ est aussi d'autant plus petit que la différence $p - q + 2l$ entre les deux facteurs $p + l$, $q - l$ est plus grande. Or, la plus grande valeur que puisse prendre l est $\frac{1}{2}q$. Par suite,

$$12\ (p + l)\ (q - l) \geqslant 12\left(p + \frac{1}{2}q\right)\left(q - \frac{1}{2}q\right)$$
$$= 3\ (1 + p)\ q > 3.2p.q = 6pq.$$

On a donc

$$1 - \frac{\mu}{12mn} > 1 - \frac{\mu}{12\mu^2\ (p + l)\ (q - l)} > 1 - \frac{1}{6\mu pq},$$

et enfin

$$T_m > \frac{1}{\sqrt{2\pi\ \mu pq}} \cdot \left(1 - \frac{1}{6\mu pq}\right) t_m.$$

3. *On a* $t_{\mu p + 1} < t_{\mu p}$ *ou* 1. En effet, posons, en général,

$$t_m = e^{-u},$$

$$u = \left(m + \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{m}{\mu p}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{n}{\mu q}\right).$$

Si l'on fait

$$m = \mu p + x, \qquad n = \mu q - x,$$

on a

$$u = \left(\mu p + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) + \left(\mu q - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right).$$

Pour $x = 1$, on trouve

$$u_1 = \left(\mu p + \frac{3}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{\mu p}\right) + \left(\mu q - \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{1}{\mu q}\right),$$

et, d'après les inégalités (3) et (4),

$$\begin{aligned} u_1 &> \left(\mu p + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{\mu p} - \frac{1}{2\mu^2 p^2}\right) - \left(\mu q - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{\mu q} + \frac{1}{2\mu^2 q^2\left(1 - \frac{1}{\mu q}\right)}\right] \\ &= 1 + \frac{3}{2\mu p} - \frac{1}{2\mu p} - \frac{3}{4}\frac{1}{\mu^2 p^2} - 1 + \frac{1}{2\mu q} - \frac{1}{2(\mu q - 1)} + \frac{1}{4\mu q(\mu q - 1)} \\ &= \frac{1}{\mu p} - \frac{3}{4}\frac{1}{\mu^2 p^2} - \frac{1}{4\mu q(\mu q - 1)} \\ &= \frac{3}{4\mu p}\left(1 - \frac{1}{\mu p}\right) + \frac{1}{4\mu}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q(\mu q - 1)}\right]. \end{aligned}$$

D'après (10), μp est supérieur à 1, et $1 - \frac{1}{\mu p}$ est positif. On a aussi

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q(\mu q - 1)} \leqslant 0.$$

En effet, d'après (10) encore, $\mu q - 1$ est positif. La précédente inégalité peut donc s'écrire successivement

$$q(\mu q - 1) - p \leqslant 0, \qquad \mu q^2 - p - q \leqslant 0,$$

$$\mu q^2 \leqslant 1,$$

ce qui est conforme à l'une des hypothèses de l'énoncé du théorème.

On a donc

$$u_1 > 0, \qquad e^{-u_1} < 1, \qquad \text{ou} \qquad t_{\mu p+1} < t_{\mu p}.$$

4. *La fonction $t_{\mu p+x}$ a un seul maximum, soit pour $x = 0$, soit pour une valeur comprise entre $x = 0$ et $x = p$.* De l'égalité

$$u = \left(\mu p + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) + \left(\mu q - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right),$$

on déduit, par dérivation,

$$u' = \log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + x} - \frac{1}{\mu q - x}\right),$$

$$u'' = \frac{1}{\mu p + x}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu p + x}\right) + \frac{1}{\mu q - x}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu q - x}\right).$$

Si x est positif, même pour $x = \mu l$ et $l = \frac{1}{2}q$, $2(\mu q - x) = 2\mu q - \mu q = \mu q$ est égal ou supérieur à 2; donc u'' est une quantité positive. Si x est négatif, même pour sa valeur extrême, $x = -\mu l = -\frac{1}{2}\mu q$, $2(\mu p + x) = 2\mu p - \mu q$ est égal ou supérieur à μp, lui-même égal ou supérieur à 2 d'après (10); donc u'' est encore une quantité positive. Par suite, u' est une fonction croissante.

Si $p = q = 1$, pour $x = 0$, $u' = 0$; u', qui croît sans cesse, passe donc du négatif au positif pour $x = 0$; u a son minimum en $x = 0$, et $t_{\mu p} = e^{-u}$ a sa valeur maxima, savoir 1, aussi pour $x = 0$.

Si p est supérieur à q, on a, pour $x = 0$,

$$u' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p} - \frac{1}{\mu q}\right) < 0.$$

Pour $x = p$, on trouve après quelques transformations,

$$u' = \log\left(1 + \frac{1}{\mu q - p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + p} - \frac{1}{\mu q - p}\right).$$

Donc, d'après (3),

$$u' > \frac{1}{2}\frac{1}{\mu q - p} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + p} - \frac{1}{\mu q - p}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu p + p} > 0.$$

Ainsi u' passe du négatif au positif, quand x varie de 0 à p; u a donc un minimum et $t_{\mu p + x} = e^{-u}$, un maximum pour une valeur X de x comprise entre 0 et p.

Remarque (*). *La valeur maxima de $t_{\mu p + x}$ est inférieure à $\sqrt{e}$, supérieure à 1, quand p est $> q$.* En effet, la valeur minima de u, correspondant à $x = X$, s'obtiendrait en éliminant X entre les relations

$$u_{minima} = \left(\mu p + X + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{X}{\mu p}\right) + \left(\mu q - X + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{X}{\mu q}\right),$$

$$u'_x = 0 = \log\left(1 + \frac{X}{\mu p}\right) - \log\left(1 - \frac{X}{\mu q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + X} - \frac{1}{\mu q - X}\right).$$

L'élimination complète est impraticable, mais en éliminant $\log\left(1 - \frac{X}{\mu q}\right)$ entre les équations, il vient

$$u_{minima} = (\mu p + 1)\log\left(1 + \frac{X}{\mu p}\right) - \frac{1}{2}\left(\mu q - X + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mu q - X} - \frac{1}{\mu p + X}\right)$$

$$> -\frac{1}{2}\left(\mu q - X + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mu q - X} - \frac{1}{\mu p + X}\right).$$

(*) La démonstration du théorème de Bernoulli ne repose nullement sur cette remarque curieuse, mais, comme on le voit, assez difficile à démontrer.

Je dis que l'on a

$$\left(\mu q - X + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mu q - X} - \frac{1}{\mu p + X}\right) < 1.$$

En effet, cette inégalité, après quelques transformations, devient

$$\mu p + 4\mu q X + 2X(1 - X) < 2\mu^2 q^2 + \mu q.$$

On a $\mu q^2 \gtrless 1$, ou $\mu q^2 = 1 + \alpha$, α étant positif ou nul; $X < p$ a pour conséquence $4\mu q X < 4\mu p q < 4\mu . \frac{1}{4}$ ou μ, et, par suite, $4\mu q X = \mu - \beta$, β étant positif; $X(1 - X)$ est inférieure à $\frac{1}{4}$ ou de la forme $\frac{1}{4} - \gamma$, γ étant positif. L'inégalité à vérifier peut s'écrire

$$\mu p + \mu - \beta + \frac{1}{2} - 2\gamma < 2\mu(1 + \alpha) + \mu q,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} < 2\mu q + 2\mu\alpha + \beta + 2\gamma.$$

Mais on a, d'après la formule (10), $\mu q \gtrless 2$. Donc l'inégalité devient

$$\frac{1}{2} < 4 + 2\mu\alpha + \beta + 2\gamma,$$

laquelle est évidente.

Il en résulte que la valeur minima de u surpasse $-\frac{1}{2}$, la valeur maxima de $-u$ est inférieure à $\frac{1}{2}$, et, par suite, celle de $t_{\mu p + x}$ est inférieure à $\sqrt{e}$.

Dans le cas actuel où μ est $> q$, elle surpasse d'ailleurs $t_{\mu p}$ ou 1, puisque X n'est pas nul.

5. *Transformation de la somme des t_m et des T_m.* Si μp est entier, les valeurs de m à considérer dans $P = ST_m$ sont, $E(x)$ désignant le plus grand entier contenu dans x,

$$\mu p \text{ et } \left\{ \begin{array}{llll} \mu p + 1, & \mu p + 2, & \cdots, & \mu p + E(\mu l) \\ \mu p - 1, & \mu p - 2, & \cdots, & \mu p - E(\mu l) \end{array} \right\}.$$

Dans ce cas,

$$St_m = t_{\mu p} + \sum_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p+x} + t_{\mu p-x}] > \sum_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p+x} + t_{\mu p-x}].$$

Si μp n'est pas entier, il y aura entre μp et $\mu p + 1$ un seul entier r. On aura

$$t_r > t_{\mu p+1},$$

puisque la fonction $t_{\mu p+x}$ a sa valeur minima, pour $x = 1$, dans l'intervalle de $x = 0$, à $x = 1$, d'après les n^os^ 3 et 4.

On devra donc donner à m les valeurs

$$r \text{ et } \left\{ \begin{array}{llll} r + 1, & r + 2, & r + 3, & \text{etc.} \\ r - 1, & r - 2, & r - 3, & \text{etc.} \end{array} \right\}$$

comprises entre $\mu p - \mu l$, $\mu p + \mu l$.

La fonction t_m décroît de part et d'autre à partir de sa valeur maxima comprise entre $t_{\mu p}$ et $t_{\mu p+p}$; donc

$$\begin{array}{ll} t_{r-1} > t_{\mu p-1}, & t_r > t_{\mu p+1}, \\ t_{r-2} > t_{\mu p-2}, & t_{r+1} > t_{\mu p+2}, \\ t_{r-3} > t_{\mu p-3}, \text{ etc.} & t_{r+2} > t_{\mu p+3}, \text{ etc.} \end{array}$$

Par suite, la somme de tous les t_m à considérer sera supérieure à

$$\sum_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p+x} + t_{\mu p-x}].$$

On a donc aussi

$$P > \left[1 - \frac{1}{6\mu pq}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi \mu pq}} St_m$$

$$> \left[1 - \frac{1}{6\mu pq}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi \mu pq}} \sum_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p+x} + t_{\mu p-x}].$$

6. *Transformation de la dernière somme.* Posons

$$y_x^2 = t_{\mu p+x} \times t_{\mu p-x}.$$

La moyenne arithmétique de deux quantités est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique (*). On a donc

$$t_{\mu p+x} + t_{\mu p-x} \geqq 2y_x,$$

$$P > \left(1 - \frac{1}{6\mu pq}\right) \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}} \sum_{x=1}^{x=E(\mu l)} y_x.$$

Soit

$$y_x^2 = e^{-v},$$

de sorte que

$$v = \left(\mu p + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) + \left(\mu p - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)$$
$$+ \left(\mu q + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right) + \left(\mu q - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right).$$

On trouve, en dérivant deux fois par rapport à x,

$$v' = \log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + x} - \frac{1}{\mu p - x}\right)$$
$$+ \log\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu q + x} - \frac{1}{\mu q - x}\right);$$

$$v'' = \frac{1}{\mu p + x} + \frac{1}{\mu p - x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu p + x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu p - x)^2}$$
$$+ \frac{1}{\mu q + x} + \frac{1}{\mu q - x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu q + x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu q - x)^2}.$$

(*) Nous avons déjà fait connaître cette transformation dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1892, t. XVI, 1re partie, pp. 85-87, ou dans nos *Mélanges mathématiques* (1883-1898), pp. 79-80.

La dérivée v'' est inférieure au second membre où l'on ne laisse que les termes positifs. On a donc

$$v'' < \frac{1}{\mu p + x} + \frac{1}{\mu p - x} + \frac{1}{\mu q + x} + \frac{1}{\mu q - x}$$
$$= \frac{2\mu p}{\mu^2 p^2 - x^2} + \frac{2\mu q}{\mu^2 q^2 - x^2}.$$

Or

$$\frac{2\mu p}{\mu^2 p^2 - x^2} = \frac{2}{\mu p} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{\mu^2 p^2}} = \frac{2}{\mu p}\left[1 + \frac{x^2}{\mu^2 p^2} + \frac{x^4}{\mu^4 p^4} + \cdots\right]$$
$$= \frac{2}{\mu p} + \frac{2x^2}{\mu^3 p^3}\left[1 + \frac{x^2}{\mu^2 p^2} + \frac{x^4}{\mu^4 p^4} + \cdots\right].$$

Puisque x a tout au plus la valeur μl égale ou inférieure à $\frac{1}{2}\mu p$, de sorte que $\frac{x^2}{\mu^2 p^2}$ est égale ou inférieure à $\frac{1}{4}$, on a

$$\frac{2\mu p}{\mu^2 p^2 - x^2} \leqq \frac{2}{\mu p} + \frac{2x^2}{\mu^3 p^3}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right] = \frac{2}{\mu p} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu^3 p^3}.$$

De même,

$$\frac{2\mu q}{\mu^2 q^2 - x^2} \leqq \frac{2}{\mu q} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu^3 q^3}.$$

Par suite,

$$v'' > \frac{2}{\mu p} + \frac{2}{\mu q} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu^3 p^3} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu^3 q^3} = \frac{2}{\mu pq} + \frac{8}{3}\frac{x^2(p^3 + q^3)}{\mu^3 p^3 q^3},$$

et, puisque $p^3 + q^3$ est inférieur à $(p + q)^3 = 1$,

$$v' < \frac{2}{\mu pq} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu^3 p^3 q^3}.$$

On déduit de là, en intégrant deux fois de 0 à x,

$$v' < \frac{2x}{\mu pq} + \frac{8}{9}\frac{x^3}{\mu^3 p^3 q^3}, \qquad v < \frac{x^2}{\mu pq} + \frac{2}{9}\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3},$$

puis,

$$-\frac{v}{2} > -\frac{x^2}{2\mu pq} - \frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3},$$

$$y_x = e^{-\frac{v}{2}} > e^{-\frac{x^2}{2\mu pq} - \frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3}},$$

et, d'après (5),

$$y_x > z_x,$$

si l'on pose

$$z_x = e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\left(1 - \frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3}\right).$$

Si l'on introduit z_x à la place de y_x dans l'inégalité relative à P donnée au début de ce numéro, elle devient

$$P > \left(1 - \frac{1}{6\mu pq}\right)\frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}} \sum_{x=1}^{x=\mu l} z_x.$$

Pour $x = 0$, $z_0 = 1$; pour x croissant, z_x décroît. On a donc, d'après la formule (9), en observant d'ailleurs que $E(\mu l) + 1$ surpasse μl,

$$z_0 + \sum_{x=1}^{x=E(\mu l)} z_x > \int_0^{E(\mu l)+1} z_x\,dx > \int_0^{\mu l} z_x\,dx,$$

$$\sum_{x=1}^{x=E(\mu l)} z_x > \int_0^{\mu l} z_x\,dx - 1.$$

Donc enfin

$$P > \left[1 - \frac{1}{6\mu pq}\right]\frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\left\{\int_0^{\mu l} z_x\,dx - 1\right\}.$$

7. *Première estimation de la limite inférieure de* P. On a

$$\int_0^{\mu l} z_x\,dx = \int_0^{\mu l} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\left(1-\frac{1}{9}\,\frac{x^4}{\mu^2p^2q^2}\right)dx$$

$$> \int_0^{\mu l} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\,dx - \frac{1}{9}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\,\frac{x^4}{\mu^2p^2q^2}\,dx.$$

Posons

$$\frac{x^2}{2\mu pq} = t^2, \qquad \frac{\mu^2 l^2}{2\mu pq} = \mathrm{T} \quad \text{ou} \quad \mathrm{T} = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}.$$

La première intégrale du second membre de la dernière égalité deviendra

$$\sqrt{2\mu pq}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\,dt.$$

La seconde prendra la forme

$$\frac{4}{9\mu pq}\sqrt{2\mu pq}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,t^4\,dt,$$

et est égale, d'après la formule (8), à

$$\frac{4}{9\mu pq}\sqrt{2\mu pq}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\pi} = \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}{\mu pq}.$$

Donc enfin

$$\int_0^{\mu l} z_x dx > \sqrt{2\mu pq}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}{\mu pq}.$$

Il en résulte, pour P, d'après la dernière formule du n° 6, la relation

$$\mathrm{P} > \left[1-\frac{1}{6\mu pq}\right]\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{3\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\right)$$

et, *à fortiori,*

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{1}{6\mu pq} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{1}{3\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}.$$

Or, on a

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

Donc enfin,

$$P > \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{1}{6\mu pq} - \frac{1}{3\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}},$$

ou

$$P > \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{1}{2\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}.$$

8. *Seconde estimation de la limite inférieure de* P. Si μ est au moins égal à 10, on a

$$\frac{1}{2\mu pq} < \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}.$$

En effet, cette inégalité équivaut à la suivante :

$$\pi < 2\mu pq.$$

Or, d'après (10), $\mu q = 2 + \delta$, δ étant positif ou nul, $p = 1 - q = 1 - \frac{2+\delta}{\mu}$. Par suite, l'inégalité à vérifier devient

$$\pi < 2\,(2+\delta)\left(1 - \frac{2+\delta}{\mu}\right) = 2\mu.\,\frac{2+\delta}{\mu}\left(1 - \frac{2+\delta}{\mu}\right).$$

Le produit du second membre est minimum quand les deux derniers facteurs diffèrent le plus possible. La différence entre ces

deux facteurs est $1 - 2\frac{2+\delta}{\mu}$ dont la valeur maxima correspond à $\delta = 0$. Alors $q = \frac{2}{\mu}$, $p = 1 - \frac{2}{\mu}$, et l'on a

$$2\mu pq = 4\left(1 - \frac{2}{\mu}\right).$$

Cette dernière expression, pour $\mu \geqslant 10$ (hypothèse dont nous ne nous servons qu'ici) a une valeur égale ou supérieure à $4\left(1 - \frac{2}{10}\right)$ ou $3\frac{1}{5}$, donc supérieure à π. On a donc

$$\frac{1}{2\mu pq} < \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

et, par suite, la dernière inégalité du n° précédent donne

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{3}{\sqrt{2\mu pq}}.$$

9. *Théorème de Jacques Bernoulli.* On a évidemment

$$P < (p+q)^{\mu} = 1.$$

Pour μ croissant indéfiniment, T croît aussi indéfiniment; on déduit des inégalités

$$1 > P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{3}{\sqrt{2\mu pq}}$$

pour $\mu = \infty$,

$$\lim P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1,$$

c'est-à-dire le théorème de Jacques Bernoulli.

Note sur la valeur approchée de $t_{\mu p \pm x}$

Dans les traités de Calcul des probabilités, on admet que l'on a très approximativement, pour de grandes valeurs de μ,

$$t_{\mu p + x} = t_{\mu p - x} = e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}.$$

Nous allons chercher une limite supérieure et une limite inférieure de ces expressions afin de voir jusqu'à quel point est justifiée l'approximation dont il vient d'être question.

I. *Limites de* $\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Les valeurs extrêmes de $\frac{x}{\mu p}$, $\frac{x}{\mu q}$ sont 0 et $\frac{1}{2}$, cette dernière valeur correspondant au cas où $2x = p = q = 2l$. Cherchons quelle valeur on peut donner à j et k dans la double égalité

$$1 - j\epsilon \leqslant (1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \leqslant 1 - k\epsilon$$

ϵ, quantité inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$, représentant $\frac{x}{\mu p}$ ou $\frac{x}{\mu q}$.

La première inégalité devient successivement

$$1 \leqslant (1 + \epsilon)(1 - 2j\epsilon + j^2\epsilon^2) = 1 + \epsilon(1 - 2j) + \epsilon^2(-2j + j^2) + j^2\epsilon^3$$

$$0 \leqslant 1 - 2j + j\epsilon(-2 + j) + j^2\epsilon^2 = 1 - 2j - j\epsilon(2 - j - j\epsilon).$$

On voit d'abord que j ne peut surpasser $\frac{1}{2}$. La valeur minima du second membre, pour une valeur donnée de j, correspond à la valeur maxima de $j\epsilon(2 - j - j\epsilon)$, laquelle s'obtient en donnant à ϵ sa valeur maxima $\frac{1}{2}$. L'inégalité devient alors

$$0 \leqslant 1 - 2j - \frac{1}{2}j\left(2 - j - \frac{1}{2}j\right) = 1 - 3j + \frac{3}{4}j^2.$$

On peut supposer $j = \frac{1}{3}$, ou même un peu plus grand.

La seconde inégalité devient de même

$$1 \geqq (1+\epsilon)(1-k\epsilon)^2 = 1 + \epsilon(1-2k) + \epsilon^2(-2k+k^2) + k^2\epsilon^3,$$

$$0 \geqq 1 - 2k - k\epsilon(2-k-k\epsilon).$$

Si l'on fait $k = \frac{1}{2}$, l'inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs de ϵ de 0 à $\frac{1}{2}$; pour $k < \frac{1}{2}$, l'inégalité n'est plus vérifiée quand ϵ est très petit. La valeur $k = \frac{1}{2}$ est donc la plus petite que l'on puisse donner à k.

Nous écrirons donc

$$1 - \frac{1}{3}\epsilon \geqq (1+\epsilon)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 - \frac{1}{2}\epsilon,$$

$$1 - \frac{1}{3}\frac{x}{\mu p} \geqq \left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\mu p},$$

$$1 - \frac{1}{3}\frac{x}{\mu q} \geqq \left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\mu q}.$$

II. *Limites de* $\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}}$. On trouve, de même, par les calculs élémentaires que nous supprimons. pour abréger,

$$1 + \frac{5}{6}\epsilon \geqq (1-\epsilon)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 + \frac{1}{2}\epsilon,$$

$$1 + \frac{5}{6}\frac{x}{\mu p} \geqq \left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{\mu p},$$

$$1 + \frac{5}{6}\frac{x}{\mu q} \geqq \left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{\mu q}.$$

III. *Limites de* $w_1 = (\mu p + x)\log\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right) + (\mu p - x)$.

$\log\left(1-\frac{x}{\mu q}\right)$, *x étant nul ou positif.* On trouve, pour les dérivées première et seconde de w_1,

$$w_1' = \log\left(1+\frac{x}{\mu p}\right) - \log\left(1-\frac{x}{\mu q}\right),$$
$$w_1'' = \frac{1}{\mu p + x} + \frac{1}{\mu q - x};$$

Or

$$\frac{1}{\mu p + x} = \frac{1}{\mu p}\frac{1}{1+\frac{x}{\mu p}} = \frac{1}{\mu p}\left[1 - \frac{x}{\mu p} + \frac{x^2}{\mu p\,(\mu p + x)}\right]$$
$$= \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{x^2}{\mu^2 p^2\,(\mu p + x)}.$$

Mais $\mu p + x$ est compris entre μp et $\mu p + \frac{1}{2}\mu p$; donc

$$\frac{1}{\mu p + x} < \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{x^2}{\mu^3 p^3},$$
$$\frac{1}{\mu p + x} > \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{2}{3}\frac{x^2}{\mu^3 p^3}.$$

De même,

$$\frac{1}{\mu q - x} = \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + \frac{x^2}{\mu^2 q^2\,(\mu q - x)}.$$

L'expression $\mu q - x$ est comprise entre $\mu q - \frac{1}{2}\mu q$ et μq; donc

$$\frac{1}{\mu q - x} < \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + 2\frac{x^2}{\mu^3 q^3},$$
$$\frac{1}{\mu q - x} > \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + \frac{x^2}{\mu^3 q^3}.$$

De ces diverses inégalités, on tire

$$w_1'' < \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{x^2}{\mu^3 q^3} + \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + 2\frac{x^2}{\mu^3 q^3}$$
$$= \frac{1}{\mu p q} + \frac{x^2}{\mu^2 p^2 q^2}(p-q) + \frac{x^2}{\mu^3 p^3 q^3}(2p^3 + q^3);$$

$$w_1'' > \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{2}{3}\frac{x^2}{\mu^3 p^3} + \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + \frac{x^2}{\mu^3 q^3}$$
$$= \frac{1}{\mu p q} + \frac{x}{\mu^2 p^2 q^2}(p - q) + \frac{x^2}{\mu^3 p^3 q^3}\left(p^3 + \frac{2}{3}q^3\right).$$

On déduit de là, en intégrant deux fois de 0 à x, w_1' et w_1 étant nuls pour $x = 0$,

$$w_1 < \frac{x^2}{2\mu p q} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p - q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(2p^3 + q^3);$$
$$w_1 > \frac{x^2}{2\mu p q} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p - q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(p^3 + \frac{2}{3}q^3\right).$$

IV. *Limites* de $w_2 = (\mu p - x)\log\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right) + (\mu q + x)\log\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)$, x *étant positif*. On trouve de même, en changeant p en q et q en p, dans les calculs précédents,

$$w_2 < \frac{x^2}{2\mu p q} - \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p - q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(p^3 + 2q^3);$$
$$w_2 > \frac{x^2}{2\mu p q} - \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p - q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(\frac{2}{3}p^3 + q^3\right).$$

V. *Limites de* $t_{\mu p + x}$, $t_{\mu p - x}$. On a d'abord

$$t_{\mu p + x} = \left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{-\mu p + q - \frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{-\mu p - q - \frac{1}{2}}$$
$$= \left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-w_1}.$$

Par suite, d'après I, II, III,

$$t_{\mu p - x} < \left(1 - \frac{1}{3}\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 + \frac{5}{6}\frac{x}{\mu q}\right)$$
$$\times\ e^{-\frac{x^2}{2\mu p q} - \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p - q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(p^3 + \frac{2}{3}q^3\right)}$$
$$> \left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{\mu q}\right)$$
$$\times\ e^{-\frac{x^2}{2\mu p q} - \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p - q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(2p^3 + q^3)}.$$

De même,

$$t_{\mu p - x} = \left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{-\mu p + q - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{-\mu p - q - \frac{1}{2}}$$
$$= \left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-w_2}.$$

Par conséquent, d'après I, II, IV,

$$t_{\mu p - x} < \left(1 + \frac{5}{6}\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\frac{x}{\mu q}\right)$$
$$\times\ e^{-\frac{x^2}{2\mu pq} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(\frac{2}{3}p^3 + q^3\right)}$$
$$> \left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\mu q}\right)$$
$$\times\ e^{-\frac{x^2}{2\mu pq} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(p^3 + 2q^3)}.$$

VI. *Conclusion.* On voit d'après ces calculs combien il est difficile de justifier la formule classique

$$t_{\mu p \pm x} = e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}.$$

Pour qu'elle soit admissible, il faut supposer : 1° $\frac{x}{\mu p}$, $\frac{x}{\mu q}$ très petits comparés à l'unité, c'est-à-dire que $\frac{l}{p}$, $\frac{l}{q}$ soient des fractions très petites puisque x peut prendre la valeur extrême μl; 2° $\frac{x^2}{\mu^2 p^2 q^2}$ doit être très petit comparé à $\frac{x^2}{\mu pq}$, ou $\frac{x}{\mu pq}$ comparé à 1, c'est-à-dire que $\frac{l}{pq}$ doit aussi être une fraction très petite.

En résumé, comme la seconde condition implique la première, on doit supposer l très petit par rapport à pq.

Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités

On peut trouver une valeur approchée de l'expression

$$P = \int_{\frac{m}{\mu}-l}^{\frac{m}{\mu}+l} z^m (1-z)^n \, dz : \int_0^1 z^m (1-z)^n \, dz,$$

de la manière suivante. Posons pour abréger,

$$p = \frac{m}{\mu}, \qquad q = 1 - p = \frac{n}{\mu},$$

puis, faisons dans la première intégrale,

$$z = p + x, \qquad 1 - z = q - x.$$

Cette intégrale deviendra

$$\int_{-l}^{+l} (p+x)^m (q-x)^n \, dx = p^m q^n \int_{-l}^{+l} \left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n dx.$$

Pour fixer les idées, nous supposons l tout au plus égal à la moitié de q et p égal ou supérieur à q.

On a, comme on sait,

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n + \left(1 - \frac{x}{p}\right)^m \left(1 + \frac{x}{q}\right)^n$$
$$\geq 2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right)^m \left(1 - \frac{x^2}{q^2}\right)^n}$$
$$= 2e^{\frac{1}{2}\mu p \log\left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right) + \frac{1}{2}\mu q \log\left(1 - \frac{x^2}{q^2}\right)}.$$

Or, si α est inférieur à l'unité,

$$l(1-\alpha) \cdot - \alpha - \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\mu p \log\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)+\frac{1}{2}\mu q \log\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)$$

surpasse

$$\frac{1}{2}\mu p\left[-\frac{x^2}{p^2}-\frac{x^4}{2p^4\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\mu q\left[-\frac{x^2}{q^2}-\frac{x^4}{2q^4\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)}\right]$$

$$=-\frac{\mu x^2}{2p}-\frac{\mu x^4}{4p\,(p^2-x^2)}-\frac{\mu x^2}{2q}-\frac{\mu x^4}{4q\,(q^2-x^2)}$$

$$=-\frac{\mu x^2}{2pq}-\frac{\mu x^4}{4}\left(\frac{1}{p\,(p^2-x^2)}+\frac{1}{q\,(q^2-x^2)}\right).$$

On a

$$\frac{1}{p\,(p^2-x^2)}+\frac{1}{q\,(q^2-x^2)}$$

$$=\frac{p^2+q^2-x^2}{pq\,(p^2-x^2)\,(q^2-x^2)}<\frac{1}{pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}.$$

Par conséquent, on a

$$\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)^m\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)^n}>e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\,e^{-\frac{\mu x^4}{4pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}}$$

et, puisque $e^{-\alpha}$ est $>1-\alpha$,

$$\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)^m\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)^n}>e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\left(1-\frac{\mu x^4}{4pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}\right).$$

Il en résulte que l'on a

$$P>\frac{p^m q^n\displaystyle\int_{-l}^{+l} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\left(1-\frac{\mu x^4}{4pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}\right)dx}{\displaystyle\int_0^1 z^m(1-z)^n\,dz}.$$

L'intégrale eulérienne du dénominateur est égale à

$$\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\mu+2)}=\frac{1.2.3.\ldots m.\ 1.2.\ldots n}{1.2.3.\ldots\mu}\cdot\frac{1}{\mu+1}.$$

Posons dans l'intégrale du numérateur,

$$\frac{\mu x^2}{2pq} = t^2, \qquad T = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}},$$

elle deviendra

$$\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_{-T}^{+T} e^{-t^4} dt \left(1 - t^2 \frac{pq}{\mu (p^2 - l^2)(q^2 - l^2)}\right)$$

supérieure à

$$\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_{-T}^{+T} e^{-t^2} dt - \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \frac{pq}{\mu (p^2 - l^2)(q^2 - l^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^4 dt.$$

Or, en faisant $t = \sqrt{u}$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^4 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{3}{2}} du = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}\sqrt{\pi}.$$

On a donc enfin

$$P > \frac{1.2.3.\ldots\mu}{1.2.3.\ldots m.1.2.\ldots n} p^m q^n \frac{\mu+1}{\mu} \sqrt{2\mu pq}$$

$$\times \left\{ 2 \int_0^T e^{-t^2} dt - \frac{15}{4} \frac{\sqrt{\pi}\, pq}{\mu (p^2 - l^2)(q^2 - l^2)} \right\}.$$

Au moyen de la formule de Stirling, on prouve assez facilement l'inégalité suivante :

$$\frac{1.2.3.\ldots\mu}{1.2.3.\ldots m.1.2.\ldots n.} p^m q^n > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \left(1 - \frac{1}{12\mu (p+l)(q-l)}\right).$$

Le facteur qui précède la parenthèse dans l'inégalité relative à P, est donc supérieur à

$$\frac{\mu+1}{\mu} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{12\mu (p+l)(q-l)}\right]$$

$$> \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{12\mu (p+l)(q+l)}\right].$$

On a donc

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-t^2} dt$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-t^2} dt . \frac{1}{12\mu (p+l)(q-l)} - \frac{15pq}{4\mu (p^2-l^2)(q^2-l^2)} .$$

Or

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-t^2} dt < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = 1,$$

$$12 (p+l)(q-l) > 12\left(p+\frac{1}{2}q\right)\left(q-\frac{1}{2}q\right) = 3(1+p)q > 6pq,$$

$$(p^2-l^2)(q^2-l^2) > \left(p^2-\frac{1}{4}p^2\right)\left(q^2-\frac{1}{4}q^2\right) = \frac{9}{16}p^2q^2.$$

Par suite,

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-t^2} dt - \frac{1}{6\mu pq} - \frac{15pq . 16}{4\mu . 9 . p^2q^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-t^2} dt - \frac{1}{6\mu pq} - \frac{20}{3\mu pq} .$$

Comme

$$\frac{1}{6} + \frac{20}{3} = \frac{41}{6}$$

est inférieur à 7, on a enfin

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-t^2} dt - \frac{7}{\mu pq} .$$

ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIB
ANFORD U RD UNIVERSI
NIVERSITY ITY LIBRARI
BRARIES · S · STANFO
ITY LIBRARIES ARIES STA
IES · STANFOR NFORD UNI
ORD UNIVERSIT ERSITY LIBI
ANFORD U D UNIVERSI
NIVERSITY TY LIBRARI
BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFO
ITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STA
IES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNI
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBR

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STORAGE AREA 510.5
M429
[redacted]
22-23
1902-1903